Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1941. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1941

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VII.

Schrittweise Kompression partiell-komprimierter Mengen.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgetragen in der Sitzung vom 25. Oktober 1941.

1. Nach Erklärung des Begriffes der partiellen Komprimiertheit, d. h. der Komprimiertheit in bestimmten Achsenrichtungen, sowie des Begriffes der Kompression einer Gitterpunktmenge in einer Achsenrichtung wird im Folgenden ein Satz bewiesen, der besagt, daß bei einer Kompression in einer bestimmten Achsenrichtung die Eigenschaft der Komprimiertheit in anderen Achsenrichtungen erhalten bleibt (Nr. **4**, Satz 1). Diese überaus einfache Tatsache läßt sich, wie an anderer Stelle ausgeführt werden soll, mit benützen zum Nachweis des Satzes[1], daß zu jeder endlichen n-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ sich eine komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ gleichen Grades so finden läßt, daß für die zugehörigen Partitionen die Beziehungen $\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{K}) \geqq \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{M})$ (für $1 \leqq \nu \leqq n$) gelten.

2. Sind $\nu_1, \ldots, \nu_q$ verschiedene Zahlen aus der Reihe $1, \ldots, n$ $(1 \leqq q \leqq n)$, dann heiße eine (endliche oder unendliche) Menge $\mathfrak{M}$ von Gitterpunkten[2] des $(x_1 \ldots x_n)$-Raumes $\mathfrak{R}^n$ „$(x_{\nu_1} \ldots x_{\nu_q})$-

[1] Über diesen Satz vgl. diese Sitz.ber. 1941, S. 2*, Sitzung vom 11. Jan. 1941, Punkt 2 und S. 17*, Sitzung vom 25. Okt. 1941, Punkt 3, sowie eine in den Math. Annalen erscheinende Arbeit „Über die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben über Gitterpunktfiguren". Für $n = 2$ Dimensionen deckt sich dieser Satz im Wesentlichen mit Satz (m) in der Arbeit „Über symmetrische Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen", Monatshefte f. Math. u. Physik, **49** (1940), Nr. **39**, S. 25 oder mit dem gleichwertigen Satz (c), ebenda Bd. **48** (1939), Nr. **12**, S. 496, also mit einer bekannten Tatsache aus der Lehre von den symmetrischen Funktionen.

[2] Andere Gitterpunkte als solche mit positiven Koordinaten werden wir hier nicht in Betracht ziehen, sodaß im Folgenden unter einem „Gitterpunkt" stets ein Punkt mit p o s i t i v e n ganzzahligen Koordinaten verstanden werden soll.

komprimiert", wenn mit jedem zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkt $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ auch alle jene Punkte $(x_1, \ldots, x_n)$ zu $\mathfrak{M}$ gehören, für welche

$$0 < x_{\nu_h} \leqq x_{\nu_h}^0 \quad (1 \leqq h \leqq q)$$

und

$$x_\lambda = x_\lambda^0 \quad (1 \leqq \lambda \leqq n,\ \lambda \neq \nu_1, \ldots, \nu_q)$$

gilt. Da es auf die Reihenfolge in der Numerierung der Koordinaten nicht ankommt, können wir bequemer Weise etwa $\nu_1 = 1, \ldots, \nu_q = q$ setzen. Ist $1 \leqq r < q$, so ist eine Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ offenbar dann und nur dann $(x_1 \ldots x_q)$-komprimiert, wenn sie sowohl $(x_1 \ldots x_r)$-komprimiert, als auch $(x_{r+1} \ldots x_q)$-komprimiert ist. Die in früheren Noten[3] schlechthin als „komprimiert" bezeichneten Gitterpunktmengen sind nichts anderes als die $(x_1 \ldots x_n)$-komprimierten.

3. Ist $\mathfrak{M}$ eine Gitterpunktmenge im $\mathfrak{R}^n$ und $(x') = (x_2', \ldots, x_n')$ ein System positiver ganzer Zahlen[4]. Dann werde mit $m(x')$ die Anzahl der zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Gitterpunkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_2 = x_2', \ldots, x_n = x_n'$ bezeichnet, wobei

$$\sum_{(x')} m(x') = m \tag{1}$$

ist, wenn die Summe über alle Systeme (x') erstreckt wird und m die Anzahl der Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$ bedeutet. Dabei braucht der Fall einer unendlichen Menge $\mathfrak{M}$ nicht ausgeschlossen zu werden: es ist dann $m = \infty$ zu setzen und (1) bedeutet dann, daß

---

[3] „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen" und „V. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen", diese Sitz.ber. 1940, S. 70 und 1941, S. 4; ferner „Über Tripel konjugierter Partitionen", Abhandlungen a. d. math. Seminar der Hansischen Universität (Hamburg), Bd. 14 (1941), Nr. **1**, Anm. 5, S. 273; „Über die Anzahl komprimierter Gitterpunktmengen von gegebener Punktezahl", Math. Zeitschr. 47 (1941), Nr. **1**, S. 352; „Komprimierte Gitterpunktmengen und eine additiv-zahlentheoretische Aufgabe" [erscheint in Crelles Journal für reine und angew. Math., Bd. 184], Nr. **3**.

[4] Bei dieser Überlegung zwecks Definition der „x_1-Kompression" einer Menge $\mathfrak{M}$ wird $n \geqq 2$ vorausgesetzt. Wegen des Falles $n = 1$ vgl. [5].

in der Summe unendlich viele Summanden > 0 vorhanden sind, wenn nicht überhaupt wenigstens ein Summand $m(x')$ selbst $= \infty$ ist. Ist nun $\mathfrak{M}_1$ die Gitterpunktmenge, die für jedes System (x') alle Gitterpunkte $(x_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ mit

$$0 < x_1 \leqq m(x') \tag{2}$$

umfaßt (bzw. überhaupt alle Gitterpunkte $(x_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, falls $m(x') = \infty$ ist), dann werde der Übergang von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}_1$ als „x_1-Kompression" der Menge $\mathfrak{M}$ bezeichnet[5]. Man kann $\mathfrak{M}_1$ auch definieren als diejenige x_1-komprimierte Menge, die auf jeder Geraden $x_2 = x'_2, \ldots, x_n = x'_n$ genau soviele Gitterpunkte enthält wie die Menge $\mathfrak{M}$.

Analog werde für irgend eine Koordinate x_ν die „x_ν-Kompression" erklärt.

4. Wir wollen nun den Satz beweisen:

Satz 1. Aus einer $(x_1 \ldots x_q)$-komprimierten Gitterpunktmenge entsteht durch (x_{q+1})-Kompression eine $(x_1 \ldots x_q\ x_{q+1})$-komprimierte Menge. Anders gesagt: Bei Kompression in einer Koordinatenrichtung bleibt jede Komprimiertheit in einer anderen Koordinatenrichtung erhalten[6].

Beim Beweis dieses Satzes braucht nur für irgend einen Wert h $(1 \leqq h \leqq q)$ gezeigt zu werden, daß die aus der Ausgangsmenge $\mathfrak{M}$ durch (x_{q+1})-Kompression entstandene Menge $\mathfrak{M}_1$ ebenso wie $\mathfrak{M}$ x_h-komprimiert ist. Das heißt man braucht den Satz nur für $q = 1$ zu beweisen. Es kommt also, wenn wir die Bezeichnung etwas ändern, nur auf den Beweis des folgenden Satzes an:

(a) Sei $\mathfrak{M}$ im Raum von $n = p + 2 \geqq 2$ Dimensionen mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_p, y, z$ eine y-komprimierte Gitterpunkt-

---

[5] Im Falle $n = 1$ umfaßt $\mathfrak{M}_1$ alle Punkte (x_1), die der Ungleichung (2) genügen, wenn darin $m(x')$ ersetzt wird durch die Anzahl m der Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$.

[6] In Satz 1 wird die Anzahl n $(\geqq q + 1)$ der Dimensionen des Raumes (gemäß $q \geqq 1$) natürlich $\geqq 2$ vorausgesetzt.

menge. Aus $\mathfrak{M}$ entstehe durch z-Kompression die Menge $\mathfrak{M}'$. Dann ist $\mathfrak{M}'$ ebenso wie $\mathfrak{M}$ eine y-komprimierte Menge.

5. Wir beweisen Satz (a) zunächst im Falle $n = 2$, $p = 0$, wo also die Koordinaten $x_1, \ldots, x_p$ wegfallen und $\mathfrak{M}$ in der yz-Ebene liegt. Sei b_μ die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}$, die auf der Geraden $y = \mu$ liegen, analog c_μ die Anzahl der auf der Geraden $z = \mu$ liegenden Punkte von $\mathfrak{M}$. Die entsprechende Bedeutung mögen b'_μ und c'_μ für $\mathfrak{M}'$ haben, wobei natürlich durchwegs $b'_\mu = b_\mu$ ist. Aus der y-Komprimiertheit von $\mathfrak{M}$ folgen die Ungleichungen[7]

$$b_\mu \geqq b_{\mu+1} \quad (\mu = 1, 2, \ldots).$$

Aus den somit geltenden Ungleichungen $b_\mu \geqq b'_{\mu+1}$ ist aber sofort die y-Komprimiertheit vom $\mathfrak{M}'$ ersichtlich, wenn man beachtet, daß $\mathfrak{M}'$ diejenige Punktmenge ist, die für jeden Wert $y = \mu$ die Gitterpunkte $(y, z) = (\mu, z)$ mit $0 < z \leqq b_\mu$ umfaßt[8,9].

---

[7] Bei unendlichen Mengen $\mathfrak{M}$, wo auch Werte ∞ bei den b_μ auftreten können, wird durch diese Ungleichungen mit ausgedrückt, daß niemals ein b_μ endlich ist, wenn $b_{\mu+1} = \infty$ ist. Bei einer endlichen Menge $\mathfrak{M}$ mit m Gitterpunkten stellen $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots)$ und $\mathfrak{C} = (c_1, c_2, \ldots)$ die zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Partitionen von m dar (vgl. etwa „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren I. Rekursionsformeln", Nr. **3**, diese Sitz.ber. 1940, S. 26 oder Note II, l. c.[3], Nr. **4**, S. 71, 72 oder die l. c.[3] genannte Arbeit in Crelles Journal, Nr. **4**).

[8] Es ist $\mathfrak{M}'$, weil sowohl y-komprimiert als z-komprimiert, eine „komprimierte" Menge (vgl. Nr. **2**) der yz-Ebene und im Falle der Endlichkeit von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ ist $\mathfrak{C}' = (c'_1, c'_2, \ldots)$ die zu $\mathfrak{B}' = \mathfrak{B}$ konjugierte Partition.

Übrigens kann man offenbar den Begriff der Konjugiertheit ohne weiteres auf „Partitionen von $m = \infty$" übertragen: Eine solche Partition $\mathfrak{B} = (b_1, b_2, \ldots)$, bei der also unendlich viele $b_\mu > 0$ (also b_μ entweder unendlich oder endlich $\geqq 1$) auftreten oder andernfalls wenigstens ein $b_\mu = \infty$ ist, – wobei wieder $b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots$ angenommen werde, – heiße zu $\mathfrak{C} = (c_1, c_2, \ldots)$ konjugiert, wenn es im I. Quadranten der yz-Ebene eine unendliche komprimierte Gitterpunktmenge $\mathfrak{K}$ gibt, die auf jeder Geraden $y = \mu$ genau b_μ Punkte enthält und auf jeder Geraden $z = \mu$ genau c_μ Punkte ($\mu = 1, 2, \ldots$).

[9] Die hier besprochene an einer zweidimensionalen Gitterpunktmenge vorgenommene Kompression wird bereits in Nr. **39**, **40** der l. c.[1] genannten

6. Um nunmehr Satz (a) auch für $n = p + 2 > 2$ zu beweisen, benützen wir folgende einfache Überlegung. Dabei werde, wenn $\mathfrak{M}$ eine Gitterpunktmenge des $n = (p + q)$-dimensionalen Raumes mit den Koordinaten $x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_q$ ist, für jedes Wertsystem $(x') = (x'_1, \ldots, x'_p)$ mit $\mathfrak{M}^q(x')$ diejenige Menge des q-dimensionalen $(y_1 \ldots y_q)$-Raumes bezeichnet, die aus allen jenen Punkten $(y_1, \ldots, y_q)$ besteht, für welche $(x'_1, \ldots, x'_p, y_1, \ldots, y_q)$ zu $\mathfrak{M}$ gehört[10]. Natürlich gilt dann für irgend eine Zahl r mit $1 \leqq r \leqq q$:

(b) Eine Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ des $(x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q)$-Raumes ist dann und nur dann $(y_1 \ldots y_r)$-komprimiert, wenn die Mengen $\mathfrak{M}^q(x')$ – für jedes Wertsystem (x') – durchwegs $(y_1 \ldots y_r)$-komprimiert sind.

Sind nun $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ im Falle $n = p + 2 > 2$ die in Satz (a) genannten Mengen und hat $\mathfrak{M}^q(x') = \mathfrak{M}^2(x')$ für irgend ein Wertsystem $(x') = (x'_1, \ldots, x'_p)$ die eben erklärte Bedeutung für die Menge $\mathfrak{M}$ (wobei y, z anstelle von $y_1, \ldots, y_q$ treten), ferner $\mathfrak{M}'^2(x')$ die entsprechende Bedeutung für $\mathfrak{M}'$, dann entsteht offenbar für jedes Wertsystem (x') die Menge $\mathfrak{M}'^2(x')$ aus $\mathfrak{M}^2(x')$ durch z-Kompression. Da nun nach Voraussetzung die Menge $\mathfrak{M}$ y-komprimiert ist und dasselbe somit gemäß Hilfssatz (b) (angewendet für $q = 2$, $r = 1$) auch für jede Menge $\mathfrak{M}^2(x')$ gilt, so ist nach dem im zweidimensionalen Fall bereits bewiesenen Satz (a) auch jede Menge $\mathfrak{M}'^2(x')$ eine y-komprimierte Menge; gemäß (b) ist also $\mathfrak{M}'$ selbst y-komprimiert.

Damit ist Satz (a) und also auch Satz 1 allgemein bewiesen.

Arbeit über symmetrische Funktionen (dort in etwas anderer nicht-geometrischer Gestalt) sowie in Nr. **6**, S. 52 der l. c.[3] genannten Arbeit in Crelles Journal herangezogen, u. zw. gerade für Feststellungen im zweidimensionalen Bereich, die aufs engste verwandt sind mit jenem allgemeinen n-dimensionalen Satz, auf den wir in Anm. 1 hingewiesen haben und zu dessen Beweis das Ergebnis der vorliegenden Note dienen soll. (An der zweitgenannten, bzw. an der erstgenannten Stelle liegt nämlich gewissermaßen die Verwendung einer Kompression darin vor, daß beim Beweis neben $\mathfrak{M}$ die komprimierte Menge $\mathfrak{M}_0$ herangezogen wird, bzw. neben den Partitionen $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}$ die zu $\mathfrak{A}^*$ konjugierte Partition $\mathfrak{B}^*$.)

[10] Vgl. Note V, l. c.[3], Nr. **7**, S. 8.

7. Die in Satz 1 ausgesprochene überaus einfache und, wie man sieht, mühelos beweisbare Tatsache gewinnt, wie schon eingangs in Nr. **1** erwähnt, eine gewisse Bedeutung dadurch, daß sie mit herangezogen werden kann zum Beweis eines bemerkenswerten Satzes über die Zahlen $N\ (\mathfrak{A}_1 \,|\, \ldots \,|\, \mathfrak{A}_n)$, von denen insbesondere die Noten I, III und IV handeln. Wie man nämlich sieht, ist in Satz 1 mit enthalten, daß man von jeder n-dimensionalen Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ zu einer komprimierten Gitterpunktmenge gelangen kann, indem man schrittweise Kompressionen in den einzelnen Achsenrichtungen ausführt.

Hiezu sei noch folgende Bemerkung beigefügt: Wenn $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ eine Permutation der Zahlen $(1, \ldots, n)$ darstellt und nun auf $\mathfrak{M}$ zuerst eine x_{ν_1}-Kompression ausgeübt wird, dann auf die erhaltene Menge eine x_{ν_2}-Kompression usw., so wird natürlich die nach diesen n Einzel-Kompressionen sich ergebende Menge im allgemeinen von der Reihenfolge der Kompressionen, d. h. von der gewählten Permutation $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ abhängen. Im Falle von $n = 2$ Dimensionen wird man stets $2! = 2$ verschiedene komprimierte Mengen erhalten, je nachdem, ob man erst die x_1- und dann die x_2-Kompression ausführt oder umgekehrt, – es sei denn, daß schon die Ausgangsmenge $\mathfrak{M}$ in wenigstens einer der beiden Achsenrichtungen partiell-komprimiert war. Ist $n > 3$ und $\mathfrak{M}$ eine in keiner Achsenrichtung komprimierte Gitterpunktmenge[11], dann hängt, wie man an Beispielen sieht, die Anzahl A der verschiedenen unter den komprimierten Mengen, die sich durch unsere schrittweisen Kompressionen aus $\mathfrak{M}$ gewinnen lassen, von der Beschaffenheit von $\mathfrak{M}$ ab. Doch soll auf die Frage, welche Zahlen bei einer bestimmten Dimensionenzahl n der Mengen $\mathfrak{M}$ als Anzahlen $A = A\ (\mathfrak{M})$ auftreten können, nicht weiter eingegangen werden.[12]

---

[11] Im Hinblick auf die eingangs erwähnte Anwendung der vorliegenden Überlegungen über Kompressionen mag man sich dabei etwa auf solche Mengen $\mathfrak{M}$ beschränken, für welche die zugehörigen n Partitionen monoton-nicht-zunehmend sind.

[12] Natürlich ist $A \leqq (n - q)!$, wenn $\mathfrak{M}$ in q Achsenrichtungen komprimiert ist.