Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1941. Heft II/III

Sitzungen Juli-Dezember

München 1941
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VIII.

Auswirkung der Kompression von Gitterpunktmengen auf die zugehörigen Partitionen.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 15. November 1941.

§ 1. Einleitung.

1. Im Raum $\mathfrak{R}^n$ von $n = q + 1 \geqq 2$ Dimensionen[1] bezeichnen wir die Koordinaten mit $x, y_1, \ldots, y_q$. Ist x' eine positive ganze Zahl, so werde für eine Menge $\mathfrak{M}$ von Gitterpunkten[2] des $\mathfrak{R}^n$ mit $\mathfrak{M}(x')$ die Menge aller Punkte $(y_1, \ldots, y_q)$ des q-dimensionalen $(y_1 \ldots y_q)$-Raumes bezeichnet, für welche $(x', y_1, \ldots, y_q)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}$ ist[3]. Mit $m(y')$ werde für irgend ein System $(y') = (y_1', \ldots, y_q')$ von ganzen positiven Zahlen die Anzahl der zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkte $(x, y_1', \ldots, y_q')$ bezeichnet[4]. Unter „x-Kompression" der Menge $\mathfrak{M}$ versteht man dann[5] den Übergang von $\mathfrak{M}$ zu der – für jedes $(y') = (y_1', \ldots, y_q')$ – durch[6]

$$0 < x \leqq m(y')$$

definierten Menge $[\mathfrak{M}]^* = \mathfrak{M}^*$ von Gitterpunkten $(x, y_1', \ldots, y_q')$.

---

[1] Daß $n = 2$ die niedrigste für unsere Fragen in Betracht kommende Dimensionszahl ist, erhellt aus der auf $n = 1$ bezüglichen Anmerkung 12 (vgl. auch Anm. 16).

[2] Wir betrachten, ohne dies weiterhin noch besonders hervorzuheben, nur Gitterpunkte mit lauter positiven Koordinaten.

[3] Es ist dies der Sonderfall $p = 1$ der in „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren V. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen", diese Sitz.ber. 1941, S. 1–38, Nr. **7**, S. 8, für eine Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ des $(x_1 \ldots x_p y_1 \ldots y_q)$-Raumes eingeführten Mengen $\mathfrak{M}^q(x')$.

[4] Es ist also $m(y')$ die Anzahl der Punkte (Zahlen) x jener eindimensionalen Menge, die gemäß Note V, l. c.[3], mit $\mathfrak{M}^1(y')$ zu bezeichnen ist. (Es ist $m(y') = \infty$ zu setzen, wenn $\mathfrak{M}^1(y')$ eine unendliche Menge ist.)

[5] Vgl. „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VII. Schrittweise Kompression partiell-komprimierter Mengen", diese Sitz.ber. 1941, S. 165–170, Nr. **3**, S. 166, sowie ebenda, S. 1*, Sitzung vom 11. Jan. 1941, Punkt 2. Es ist $[\mathfrak{M}]^*$ dasselbe, was an den genannten Stellen mit $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ bezeichnet wird.

[6] Wenn $m(y') = \infty$ ist (vgl. [4]), dann sind alle Punkte mit $y_1 = y_1', \ldots, y_q = y_q$ in $[\mathfrak{M}]^*$ aufzunehmen.

Auf das Zeichen $[\mathfrak{M}]^*$ werden wir in § 5 zurückgreifen, wo nebeneinander

2. Wir wollen $\mathfrak{M}$ als endliche Menge voraussetzen, – ihr „Grad", d. i. die Anzahl ihrer Punkte, die mit der Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}^*$ übereinstimmt, sei m, – und mit $\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A}, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_q$, bzw. $\mathfrak{A}_0^* = \mathfrak{A}^*, \mathfrak{A}_1^* \ldots, ., \mathfrak{A}_q^*$ die zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ gehörigen $n = q + 1$ Partitionen der Zahl m bezeichnen[7] ($\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{M}), \mathfrak{A}_\nu^* = \mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{M}^*)$ für $0 \leqq \nu \leqq q$), wobei natürlich $\mathfrak{A}_\nu^* = \mathfrak{A}_\nu$ für $1 \leqq \nu \leqq q$ gilt. Außerdem wollen wir über die Menge $\mathfrak{M}$ noch die folgende „Monotonie-Voraussetzung" machen[8]:

Voraussetzung (V): Die auf die x-Koordinate bezügliche Partition $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M}) = (a_1, a_2, \ldots)$ genüge den Ungleichungen[9]:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots. \tag{1}$$

Für die (wegen $\mathfrak{A}_\nu^* = \mathfrak{A}_\nu$ für $\nu \geqq 1$) – allein unter allen $q + 1$ Partitionen – von der x-Kompression betroffene Partition $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{M}$ und die entsprechende Partition $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{M}^*$ wollen wir dann für den Fall, daß nicht $\mathfrak{M}$ selbst x-komprimiert[10], also $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ ist, das Bestehen der Ordnungsbeziehung[11]

$$\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A} \tag{2}$$

beweisen, d. h. die Gültigkeit des Satzes:

---

für mehrere Mengen das Ergebnis der x-Kompression betrachtet wird. Sonst schreiben wir in §§ 1–4 meist einfacher: $\mathfrak{M}^*$.

[7] Ist a_μ (bzw. $b_\mu^{(q)}$) die Anzahl der in der q-dimensionalen Ebene $x = \mu$ (bzw. $y_q = \mu$) gelegenen Gitterpunkte von $\mathfrak{M}$, dann ist $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}) = (a_1, a_2, \ldots)$ (bzw. $\mathfrak{A}_\nu(\mathfrak{M}) = (b_1^{(\nu)}, b_2^{(\nu)}, \ldots)$ für $1 \leqq \nu \leqq q$); vgl. etwa „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren II. Komprimierte Gitterpunktmengen", diese Sitz.ber. 1940, Nr. **4**, S. 72, Nr. **48**, S. 115.

[8] Über diese Voraussetzung, die für die Formulierung der Behauptung und den Beweis eine gewisse Vereinfachung bringt, vgl. § 2, im besonderen Satz 2.

[9] Ist $\mathfrak{M}$ eine 1-dimensionale Menge ($n = 1$), sodaß jedes a_μ nur einen der Werte 1 oder 0 haben kann, dann bedeutet (V), daß $a_\mu = 1$ für $1 \leqq \mu \leqq m$ und $a_\mu = 0$ für $\mu > m$ ist. Die Menge $\mathfrak{M}$ ist dann x-komprimiert (und überhaupt komprimiert).

[10] Eine Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ des $(xy_1 \ldots y_q)$-Raumes heißt „x-komprimiert", wenn mit jedem zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkt $(x', y_1', \ldots, y_q')$ auch alle Punkte $(x, y_1', \ldots, y_q')$ mit $0 < x \leqq x'$ zu $\mathfrak{M}$ gehören; vgl. Note VII, l. c.[5], Nr. **2**.

[11] Vgl. hierzu Nr. **7**, Anm. 22.

Satz 1. Ist eine endliche, der Monotonie-Voraussetzung (V) genügende Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ des $(x y_1 \ldots y_q)$-Raumes nicht selbst x-komprimiert[12], sodaß aus $\mathfrak{M}$ durch x-Kompression eine von $\mathfrak{M}$ verschiedene Menge $\mathfrak{M}^*$ entsteht, dann ist von den auf die x-Koordinate bezüglichen Partitionen die zu $\mathfrak{M}^*$ gehörige Partition $\mathfrak{A}^*$ höher als die zu $\mathfrak{M}$ gehörige Partition $\mathfrak{A}$.

Eine Anwendung dieses Satzes soll an anderer Stelle gegeben werden[13].

§ 2. Befreiung von der Monotonie-Voraussetzung.

3. Es seien noch ein paar Worte eingefügt über die in Satz 1 über die Menge $\mathfrak{M}$ gemachte Monotonie-Voraussetzung (V). Um es gleich zu sagen, so ist diese Voraussetzung nichts, was das Wesen der Sache sehr tief berühren würde. Gleichwohl müßte man den Satz ein wenig anders formulieren (s. unten Satz 2), wenn man (V) nicht als erfüllt voraussetzen will. Sei also $\mathfrak{M}^0$ irgend eine Gitterpunktmenge. Dann betrachten wir zugleich mit $\mathfrak{M}^0$ noch gewisse Mengen, die wir als nicht wesentlich von $\mathfrak{M}^0$ verschieden ansehen. Jede solche Menge entstehe aus $\mathfrak{M}^0$, wie man sagen kann, durch eine Vertauschung der Ebenen $x = 1$, $x = 2$, ..., sodaß die in einer Ebene $x = \nu$ liegenden Gitterpunkte $(\nu, y_1, \ldots, y_q)$ verpflanzt werden in jene Ebene $x = i_\nu$, die bei der Vertauschung aus der Ebene $x = \nu$ hervorgeht[14]. Für eine auf solche Weise aus $\mathfrak{M}^0$ gebildete Menge ist offenbar die auf die x-Koordinate bezügliche zugehörige Partition von der entsprechenden zu $\mathfrak{M}^0$ gehörenden Partition $\mathfrak{A}^0 = (a_1^0, a_2^0, \ldots)$ nur durch die Reihenfolge der Elemente a_μ verschieden[15]; solche Partitionen werden, wie üblich, nicht als wesentlich ver-

[12] Für die Dimensionszahl $n = 1$ sind diese Voraussetzungen unerfüllbar (vgl. Anm. 9); aus (V) folgt dann $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$.

[13] „Über die Anzahl der Lösungen gewisser Aufgaben über Gitterpunktmengen“ [erscheint in den Mathemat. Annalen]. Vgl. auch die vorläufigen Mitteilungen in diesen Sitz.ber., 1941, S. 1*, Sitzung vom 11. Januar 1941, Punkt 2 und S. 17*, Sitzung vom 25. Oktober 1941, Punkt 3.

[14] Anders gesagt werden, wenn $\pi = (i_1, i_2, i_3, \ldots)$ irgend eine Permutation der Folge $(1, 2, 3, \ldots)$ der natürlichen Zahlen ist, in die zu bildende Menge $\pi(\mathfrak{M}^0)$ für jedes ν alle jene Punkte $(i_\nu, y_1, \ldots, y_q)$ aufgenommen, für welche $(\nu, y_1, \ldots, y_q)$ ein Punkt von $\mathfrak{M}^0$ ist. Noch anders kann man unter Heranziehung der oben erklärten q-dimensionalen Mengen $\mathfrak{M}(x')$ sagen: Es wird $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{M}^0)$ so gebildet, daß für jedes ν stets $\mathfrak{M}^0(\nu) = \mathfrak{M}(i_\nu)$ ist.

[15] Gemäß Anm. 14 ist $a_{i_\nu} = a_\nu^0$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$, wenn $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots)$ die auf die x-Koordinate bezügliche Partition ist, die zur Menge $\mathfrak{M} = \pi(\mathfrak{M}^0)$ gehört.

schieden angesehen (die auf die übrigen Koordinaten $y_1, \ldots, y_q$ bezüglichen Partitionen stimmen für die betrachteten Mengen natürlich überhaupt, auch in der Reihenfolge der Elemente, überein).

Bei einer endlichen Menge $\mathfrak{M}^0$, wo kein $a_\mu^0 = \infty$ ist, wo es unter den a_μ^0 einen größten Wert gibt und wo jeder Wert > 0 nur von endlich vielen a_μ^0 angenommen wird, läßt sich nun die besprochene Vertauschung der Ebenen $x = 1, x = 2, \ldots$ (d. h. die Wahl der in Anm. 14 genannten Permutation π) sicher auch so vornehmen, daß die zur so gebildeten Menge $\mathfrak{M}$ gehörige Partition $\mathfrak{A}$ den Ungleichungen (1) genügt, die Monotonie-Voraussetzung (V) also erfüllt ist. Ist $\mathfrak{M}$ so bestimmt und ergibt sich dabei $\mathfrak{M}$ als eine nicht x-komprimierte Menge, dann ist Satz 1 auf $\mathfrak{M}$ anwendbar, wobei natürlich durch x-Kompression aus $\mathfrak{M}^0$ dieselbe Menge wie aus $\mathfrak{M}$ entsteht: $[\mathfrak{M}^0]^* = [\mathfrak{M}]^* = \mathfrak{M}^*$. Satz 1 liefert dann $\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A}$, also $\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A}^0$, da ja für diese Ordnungsbeziehung zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^0$ kein Unterschied zu machen ist. Damit haben wir

Satz 2. Ist $\mathfrak{M}^0$ eine endliche Gitterpunktmenge des $(xy_1 \ldots y_q)$-Raumes, die weder selbst x-komprimiert ist, noch (in der eben besprochenen Weise) durch Umordnung der Ebenen $x = 1, x = 2, \ldots$ in eine x-komprimierte Menge übergeführt werden kann[16], ist ferner $\mathfrak{M}^*$ die aus $\mathfrak{M}$ durch x-Kompression entstehende Menge, dann gilt für die auf die x-Koordinate bezüglichen zu $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}^*$ gehörigen Partitionen $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}^*$ die Ordnungsbeziehung $\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A}$.

§ 3. Aufteilung der Partition $\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{M}$) in Abschnitte.

4. Wir wenden uns dem Beweis von Satz 1 zu. Wie aus der Voraussetzung (V) folgt, tritt in $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots)$ zunächst eine gewisse Anzahl k von positiven Zahlen auf und auf diese folgen lauter Nullen (natürlich ist $k \leqq$ dem Grad m von $\mathfrak{M}$). Die Gesamtheit der ganzen Zahlen x von 1 bis k, also jener x-Werte, zu denen Punkte von $\mathfrak{M}$ gehören, soll nun in gewisse Abschnitte und Teilabschnitte eingeteilt werden. Wir beginnen mit der Erklärung der Teilabschnitte. Sie werden gewonnen durch Betrachtung der zum einzelnen x-Wert $(1 \leqq x \leqq k)$ gemäß Nr. **1** gehörigen Menge $\mathfrak{M}(x)$ des $(y_1 \ldots y_q)$-Raumes. In einen Teilabschnitt fassen wir eine Folge unmittelbar aufeinanderfolgender x-Werte zusammen, die in der zugehörigen Menge $\mathfrak{M}(x)$

[16] Falls eine solche Überführung möglich oder $\mathfrak{M}$ selbst x-komprimiert ist, dann ist natürlich die Behauptung $\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A}$ unzutreffend, da dann $\mathfrak{M}^* = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}$ ist. (Bei der Dimensionszahl $n = 1$ tritt nur dieser Fall ein; vgl. Anm. 9, 12).

übereinstimmen[17]. Nun ist laut Definition der Partition $\mathfrak{A}$ für jedes ganze positive μ die Anzahl der Punkte von $\mathfrak{M}(\mu)$ gleich der Zahl a_μ; für alle Zahlen μ, die einem unserer Teilabschnitte angehören, hat also a_μ denselben (positiven) Wert. Wir wollen nun überhaupt alle Werte $x = \mu$, für welche das zugehörige a_μ den gleichen Wert hat, in einen Abschnitt zusammenfassen, wobei zufolge der Voraussetzung (V) von vorneherein klar ist, daß die in einem Abschnitt vereinigten Werte eine Gesamtheit unmittelbar aufeinander folgender ganzer Zahlen bilden. Jeder solche Abschnitt umfaßt dann einen oder mehrere der obigen Teilabschnitte.

Zugleich mit der Folge der Zahlen $\mu = 1, \ldots, k$ denken wir auch die Partition $\mathfrak{A} = (a_1, \ldots, a_k)$ in die entsprechenden Abschnitte und Teilabschnitte zerlegt.

5. Betrachten wir als Beispiel (mit $q = 1$, $n = 2$) die in Fig. 1 dargestellte[18,19] $m = 14$ Gitterpunkte umfassende Menge $\mathfrak{M}$, für welche die Partition $\mathfrak{A} = (4, 2, 2, 2, 2, 1, 1)$ ist. Da drei ver-

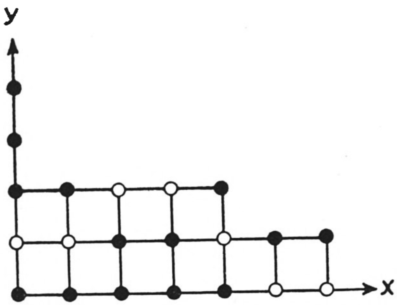

Fig. 1

[17] Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß es zwei ganze positive Zahlen μ' und μ'' mit $\mathfrak{M}(\mu') = \mathfrak{M}(\mu'')$ gibt, ohne daß sie zum selben Teilabschnitt gehören; es braucht eben nur ein μ''' mit $\mu' < \mu''' < \mu''$ und $\mathfrak{M}(\mu''') \neq \mathfrak{M}(\mu')$ zu geben. Wohl aber gehören dann μ', μ'' (und μ''') stets zum gleichen „Abschnitt“, wie er weiter unten im Text erklärt ist. Vgl. Nr. **5**, Anm. 20.

[18] Zwecks Vereinfachung der Figur sind nicht die Koordinatenachsen durch den Ursprung (0, 0), sondern die ihnen parallelen Geraden durch den Punkt (1, 1) gezeichnet.

[19] Die zur Menge $\mathfrak{M}$ gehörenden Gitterpunkte sind in der Figur durch kleine schwarze Kreise ● dargestellt. Wegen der nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden Punkte, die durch kleine innen weiß gelassene Kreise ○ dargestellt sind, vgl. Nr. **12**, Anm. 32.

schiedene Werte unter den Zahlen a_μ auftreten, erhalten wir drei Abschnitte: der erste enthält nur $\mu = 1$, der zweite reicht von $\mu = 2$ bis $\mu = 5$, der dritte umfaßt $\mu = 6$ und $\mu = 7$. Der erste und der dritte Abschnitt, zu $a_\mu = 4$ bzw. $a_\mu = 1$ gehörig, bildet jeder für sich einen einzigen Teilabschnitt (die Mengen $\mathfrak{M}(6)$ und $\mathfrak{M}(7)$ stimmen ja überein: jede von ihnen besteht aus dem einen Punkt $y = 2$ auf einer y-Geraden). Der zweite Abschnitt, zu $a_\mu = 2$ gehörig, zerfällt in drei Teilabschnitte, von denen der erste nur den Wert $\mu = 2$ enthält, der zweite die Werte $\mu = 3$ und $\mu = 4$ umfaßt, der dritte nur $\mu = 5$ enthält; dabei besteht jede der Mengen $\mathfrak{M}(2)$ und $\mathfrak{M}(5)$ aus den beiden Punkten $y = 1$ und $y = 3$, während $\mathfrak{M}(4) = \mathfrak{M}(3)$ die beiden Punkte $y = 1$, $y = 2$ umfaßt[20]. Die Aufteilung der Partition $\mathfrak{A}$ können wir demnach etwa durch

$$(4;\ 2;\ 2,\ 2;\ 2;\ 1,\ 1)$$

ersichtlich machen.

Analog kann zu der in Fig. 2 (Nr. **10**) dargestellten Gitterpunktmenge[21] die Aufteilung der zugehörigen Partition $\mathfrak{A}$ durch $(4;\ 3;\ 2;\ 2;\ 1;\ 1,\ 1)$ dargestellt werden.

6. Die Anzahl der Abschnitte, in die die Partition $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ zerfällt, ist nach dem in Nr. **4** Gesagten nichts anderes als die Anzahl r der verschiedenen positiven Werte unter den Zahlen a_μ der Partition $\mathfrak{A}$ (wobei $1 \leqq r \leqq k \leqq m$ ist). Seien $a' > a'' > \ldots > a^{(r)}$ diese Werte, wobei der Wert $a^{(\varrho)}$ in unserer Partition λ_ϱ-mal auftrete, sodaß

$$\sum_{\varrho=1}^{r} \lambda_\varrho\, a^{(\varrho)} = \sum_{\mu=1}^{k} a_\mu = m$$

und

$$a_\mu = a^{(\varrho)} \text{ für } l_{\varrho-1} + 1 \leqq \mu \leqq l_\varrho \tag{3}$$

ist ($1 \leqq \rho \leqq r$), wenn die Zahlen l_ϱ für $0 \leqq \rho \leqq r$ durch

$$l_0 = 0,\ l_\varrho = \sum_{i=1}^{\varrho} \lambda_i \qquad (1 \leqq \rho \leqq r)$$

[20] Hier tritt also der in Anm. 17 erwähnte Fall ein, daß zwei x-Werte, wie hier 2 und 5 in verschiedene Teilabschnitte fallen, obwohl die zugehörigen Mengen $\mathfrak{M}(2)$ und $\mathfrak{M}(5)$ übereinstimmen.

[21] Für Fig. 2 gelten wieder die Bemerkungen in Anm. 18, 19.

definiert sind (wobei $l_r = k$ ist). Der ρ-te Abschnitt umfaßt dann diejenigen x-Werte μ, die durch (3) gekennzeichnet sind.

Mit t_ϱ werde die Anzahl der Teilabschnitte bezeichnet, in die der ρ-te Abschnitt zerfällt, ferner mit $\varkappa_{\varrho\tau}$ (für $1 \leqq \tau \leqq t_\varrho$) die Anzahl der Elemente (x-Werte μ, bzw. Zahlen a_μ), die zum τ-ten dieser Teilabschnitte gehören. Definiert man die Zahlen $k_{\varrho\tau}$ für $0 \leqq \tau \leqq t_\varrho$ durch

$$k_{\varrho 0} = 0, \; k_{\varrho\tau} = \sum_{j=1}^{\tau} \varkappa_{\varrho j} \quad (1 \leqq \tau \leqq t_\varrho),$$

(wobei $k_{\varrho t_\varrho} = \lambda_\varrho$ ist), dann gehören zum τ-ten Teilabschnitt des ρ-ten Abschnitts alle x-Werte μ, die der Ungleichung

$$l_{\varrho-1} + k_{\varrho,\tau-1} + 1 \leqq \mu \leqq l_{\varrho-1} + k_{\varrho\tau} \tag{4}$$

genügen. Zu allen diesen Werten μ gehört also dieselbe Menge $\mathfrak{M}(\mu)$ des $(y_1 \ldots y_q)$-Raumes; eine Menge, die wir mit $\mathfrak{Y}_{\varrho\tau}$ bezeichnen wollen. Dagegen ist für jedes τ aus $1 \leqq \tau < t_\varrho$ stets $\mathfrak{Y}_{\varrho\tau} \neq \mathfrak{Y}_{\varrho,\tau+1}$.

§ 4. Ein erster Schritt zur x-Kompression von $\mathfrak{M}$.

7. Der Beweis von Satz 1 soll nun durch die Betrachtung von Abänderungen der Menge $\mathfrak{M}$ erbracht werden, die zwar nicht allemal sofort auf die Menge $\mathfrak{M}^*$ führen, wohl aber notwendig nach endlich vielen Schritten. Die einzelne Abänderung läßt sich, wie wir sehen werden, so bestimmen, daß zu der dabei aus $\mathfrak{M}$ entstehenden Menge $\mathfrak{M}'$ eine Partition $\mathfrak{A}(\mathfrak{M}') = \mathfrak{A}' = (a'_1, a'_2, \ldots)$ gehört, sodaß erstens wieder die Monotonie-Voraussetzung (V) erfüllt ist und zweitens die Ordnungsbeziehung[22] $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$ besteht.

[22] Von zwei verschiedenen Partitionen $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots)$, $\mathfrak{A}' = (a'_1, a'_2, \ldots)$, die beide so angeordnet seien, daß (1) bzw. $a'_1 \geqq a'_2 \geqq \ldots$ gilt, wird $\mathfrak{A}'$ als höher, $\mathfrak{A}$ als tiefer bezeichnet:

$$\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A} < \mathfrak{A}',$$

wenn für jedes $\lambda = 1, 2, \ldots$ die Ungleichung

$$\sum_{\mu=}^{\lambda} a'_\mu \geqq \sum_{\mu=1}^{\lambda} a_\mu \tag{5}$$

gilt (natürlich gilt wegen der Verschiedenheit von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ für wenigstens einen Wert λ in (5) nicht das Gleichheitszeichen); vgl. „Über symmetrische

8. Es mögen dabei bezüglich der Partition $\mathfrak{A}$ und ihrer Aufteilung in Teilabschnitte (§ 3) zwei Fälle unterschieden werden.

I. Fall: es sind nicht alle $t_\varrho = 1$; es gibt dann wenigstens eine Zahl σ $(1 \leqq \sigma \leqq r)$, sodaß $t_\sigma \geqq 2$ ist, in der Partition $\mathfrak{A}$ also diejenigen Elemente a_μ, deren Wert $= a^{(\sigma)}$ ist, in mindestens 2 Teilabschnitte aufgeteilt sind. Dasselbe gilt von der Aufteilung der zugehörigen μ-Werte (nämlich $l_{\sigma-1} + 1 \leqq \mu \leqq l_\sigma$) in Teilabschnitte[23]. Den einzelnen Teilabschnitten entsprechen als zugehörige Mengen $\mathfrak{M}(\mu)$ der Reihe nach die Mengen

$$\mathfrak{Y}_{\sigma 1}, \mathfrak{Y}_{\sigma 2}, \ldots, \mathfrak{Y}_{\sigma t_\sigma},$$

von denen zwei aufeinander folgende stets voneinander verschieden sind. Dabei haben diese Mengen des $(y_1 \ldots y_q)$-Raumes alle den gleichen Grad (die gleiche Punktzahl) $a^{(\sigma)}$. Wir können also für jeden Wert τ mit $1 \leqq \tau < t_\sigma$ einen Punkt $(y^{\sigma\tau}) = (y_1^{\sigma\tau}, \ldots, y_q^{\sigma\tau})$ so wählen, daß er ein Punkt von $\mathfrak{Y}_{\sigma, \tau+1}$, nicht aber ein Punkt von $\mathfrak{Y}_{\sigma\tau}$ ist. Falls $t_\sigma > 2$ ist, wählen wir noch für jedes τ mit $1 < \tau < t_\sigma$ eine Zahl $\mu = \mu_{\sigma\tau}$, die der Bedingung (4), darin $\rho = \sigma$ gesetzt, genügt; wir setzen ferner $\mu_{\sigma 1} = l_{\sigma-1} + 1$ und $\mu_{\sigma t_\sigma} = l_{\sigma-1} + k_{\sigma t_\sigma} = l_\sigma$. Die Zahlen $\mu_{\sigma 1}, \ldots, \mu_{\sigma t_\sigma}$ sind also aus den einzelnen Teilabschnitten des σ-ten Abschnittes der μ-Werte ausgewählt, u. zw. $\mu_{\sigma 1}$ als kleinste und $\mu_{\sigma t_\sigma}$ als größte Zahl des ersten bzw. letzten dieser Teilabschnitte, während (im Falle $t_\sigma > 2$) die aus den mittleren Teilabschnitten genommenen Werte $\mu = \mu_{\sigma\tau}$ irgendwie gewählt werden können.

Funktionen von endlich oder abzählbar unendlich vielen Veränderlichen", Monatshefte f. Math. u. Phys. **48** (1939) S. 487–499, **49** (1940) S. 1–52, Nr. **14**, S. 497, Nr. **24**, S. 8, 9 sowie Note III, l. c.[25], Nr. **5**, S. 136, 137 und „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren VI. Konvexe Polygonzüge und Partitionen nebst deren Ordnungsbeziehungen", diese Sitz.ber. 1941, S. 39–55, Nr. **9**, Anm. 29, – in der letzteren Note VI wird an Polygonzügen eine Deutung der Ordnungsbeziehung zwischen Partitionen gegeben, – sowie die l. c.[13] genannte Arbeit, Nr. 3, Anm. 7.

An den zitierten Stellen sind übrigens statt (5) vielfach die gleichwertigen Ungleichungen $\sum\limits_{\mu > \lambda} a'_\mu \leqq \sum\limits_{\mu > \lambda} a_\mu$ angegeben, was sich daraus ergab, daß diese letzteren (über $\mu >$ einem λ erstreckten) Summen in früheren Betrachtungen auftraten.

[23] Falls $t_\varrho > 1$ für mehrere Zahlen ρ gilt, denken wir im Folgenden eine dieser Zahlen gewählt und mit σ bezeichnet.

Um nun zur Menge $\mathfrak{M}'$ zu gelangen, ersetzen wir für jeden Wert τ mit $1 \leqq \tau \leqq t_\sigma - 1$ den (zu $\mathfrak{M}$ gehörenden) Punkt $(\mu_{\sigma,\tau+1}, y_1^{\sigma\tau}, \ldots, y_q^{\sigma\tau})$ durch den (nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden) Punkt $(\mu_{\sigma\tau}, y_1^{\sigma\tau}, \ldots, y_q^{\sigma\tau})$. Die so entstehende Menge werde für $\mathfrak{M}'$ genommen.

Die zu $\mathfrak{M}'$ gehörige, auf die x-Koordinate bezügliche Partition $\mathfrak{A}' = (a_1', a_2', \ldots, a_k')$ weist natürlich keine Änderung auf gegenüber der zu $\mathfrak{M}$ gehörigen Partition für alle Indizes μ von a_μ, die von allen $\mu_{\sigma\tau}$ verschieden sind, da für diese Werte $x = \mu$ die Menge $\mathfrak{M}(\mu)$ unverändert geblieben, also $\mathfrak{M}'(\mu) = \mathfrak{M}(\mu)$ und $a_\mu' = a_\mu$ ist. Aber auch für die (im Falle $t_\sigma > 2$ auftretenden) μ-Werte $\mu_{\sigma\tau}$ in den mittleren Teilabschnitten des σ-ten Abschnittes, also für $1 < \tau < t_\sigma$, gilt $a_\mu' = a_\mu$, da $\mathfrak{M}'(\mu) = \mathfrak{M}'(\mu_{\sigma\tau})$ dann aus $\mathfrak{M}(\mu_{\sigma\tau})$ dadurch entsteht, daß genau ein Punkt weggenommen und genau ein Punkt hinzugenommen wird. Hingegen gilt, wenn wir abgekürzt $\mu_{\sigma 1} = h$, $\mu_{\sigma t_\sigma} = i$ setzen,

$$\begin{aligned} a_h' &= a_h + 1 = a^{(\sigma)} + 1, \\ a_i' &= a_i - 1 = a^{(\sigma)} - 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Für alle von h und i verschiedenen Indizes μ aber ist, wie gesagt,

$$a_\mu' = a_\mu \quad (\mu \neq h, i).$$

Wegen

$$\begin{aligned} a_{h-1}' &= a_{h-1} = a^{(\sigma-1)} > a^{(\sigma)} \\ a_{i+1}' &= a_{i+1} = a^{(\sigma+1)} < a^{(\sigma)} \end{aligned} \tag{7}$$

ist dabei[24] $a_{h-1}' \geqq a_h'$, $a_{i+1}' \leqq a_i'$, woraus die Monotonie von $\mathfrak{A}'$ folgt. Außerdem ist aus (6) unter Beachtung von $h < i$ das Erfülltsein der Ungleichungen (5), somit (vgl. Anm. 22) die Beziehung $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$ unmittelbar ersichtlich[25].

---

[24] Für $\sigma = 1$, also $h = \mu_{\sigma 1} = 1$ entfällt die erste, für $\sigma = r$, also $i = \mu_{\sigma t_\sigma} = k$ entfällt die letzte der Ungleichungen (7).

[25] Wird eine den Ungleichungen (1) genügende Partition $\mathfrak{A} = (a_1, a_2, \ldots)$ geometrisch veranschaulicht durch die Menge $\mathfrak{S}$ der Gitterpunkte $s \geqq 1$, $1 \leqq t \leqq a_s$ einer (st)-Ebene und ist $\mathfrak{A}' = (a_1', a_2', \ldots)$ eine zweite den Ungleichungen $a_1' \geqq a_2' \geqq \ldots$ genügende Partition derart, daß die zugehörige Menge $\mathfrak{S}'$ aus der Menge $\mathfrak{S}$ dadurch entsteht, daß ein einziger Gitterpunkt (s_1, t_1) aus $\mathfrak{S}$ ersetzt wird durch einen nicht zu $\mathfrak{S}$ gehörenden Gitterpunkt (s_1', t_1'), für den $s_1' < s_1$, $t_1' > t_1$ gilt, dann heißt der Übergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}'$

Somit ist im I. Falle eine dem Programm von Nr. **7** entsprechende Menge $\mathfrak{M}'$ hergestellt[26].

9. Wir kommen nun zum

II. Fall: es sind alle $t_\varrho = 1$; jeder Abschnitt der Partition $\mathfrak{A}$ umfaßt also nur einen einzigen Teilabschnitt; anders ausgedrückt: wenn wir die Aufteilung der Werte $x = \mu$ in Abschnitte betrachten, so gehört zu zwei Werten $x = \mu'$ und $x = \mu''$ desselben Abschnitts stets die gleiche Menge $\mathfrak{M}(x)$. Dabei muß die Anzahl r der Abschnitte > 1 sein, da sonst $\mathfrak{M}$ eine x-komprimierte Menge wäre, entgegen der Voraussetzung in Satz 1. Ist $x = \mu$ ein der Ungleichung (3) genügender, d. h. zum ρ-ten Abschnitt gehörender μ-Wert, so möge die zugehörige Menge $\mathfrak{M}(\mu)$ (vom Grad $a^{(\varrho)}$ mit $\mathfrak{Y}_\varrho$ bezeichnet werden. In der (wegen $r > 1$) mindestens zwei Mengen umfassenden Folge

$$\mathfrak{Y}_1, \mathfrak{Y}_2, \ldots, \mathfrak{Y}_r \tag{8}$$

kann dann nicht jede spätere Menge $\mathfrak{Y}_\varrho$ ($\rho > 1$) eine Teilmenge der vorhergehenden Menge $\mathfrak{Y}_{\varrho-1}$ sein, da sonst, entgegen der schon erwähnten Voraussetzung, $\mathfrak{M}$ eine x-komprimierte Menge wäre. Wir können also ein σ mit $1 \leqq \sigma \leqq r - 1$ so wählen, daß $\mathfrak{Y}_{\sigma+1}$ nicht Teilmenge von $\mathfrak{Y}_\sigma$ ist. In $\mathfrak{Y}_{\sigma+1}$ wählen wir dann einen nicht zu $\mathfrak{Y}_\sigma$ gehörenden Punkt $(y^{(\sigma)}) = (y_1^\sigma, \ldots, y_q^\sigma)$. Wir setzen $h = l_{\sigma-1} + 1$ (das ist der kleinste μ-Wert im σ-ten

---

ein „einfacher Aufbau" (der inverse Vorgang ein „einfacher Abbau") und es ist $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$. Diese Definition deckt sich inhaltlich mit der in etwas anderer Fassung gegebenen Definition des einfachen Abbaues in „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren III. Ein Satz über das Verhältnis der Lösungsanzahlen gewisser Partitionsaufgaben", diese Sitz.ber. 1940, Nr. **4**, S. 136.

In dem besonderen Fall, daß wenigstens eine der positiven Differenzen $s_1 - s_1'$, $t_1' - t_1$ gleich 1 ist, spricht man von einem „elementaren Aufbau", Monatshefte, l. c. [22], Nr. **26**, Bd. **49**, S. 10 ff., sowie auch Note II, l. c. [7], § 5, Nr. **21**, S. 88 ff. und Note V, l. c. [3], § 3, Nr. **12**, S. 14.

Dieser besondere Fall, also ein elementarer Aufbau, liegt offenbar im Text vor, wo $\mathfrak{S}'$ aus $\mathfrak{S}$ gemäß (6) durch Verlegung des Punktes ($s = i$, $t = a^{(\sigma)}$) nach ($s = h$, $t = a^{(\sigma)} + 1$) entsteht.

[26] Im allgemeinen wird diese Herstellung auf verschiedene Art möglich sein, da ja im allgemeinen sowohl die Zahl σ, als die Zahlen $\mu_{\sigma\tau}$ in den mittleren Teilabschnitten, als auch die Punkte $(y^{\sigma\tau})$ auf mannigfache Weise gewählt werden können.

Abschnitt) und $i = l_{\sigma+1}$ (das ist der größte μ-Wert im $(\sigma+1)$-sten Abschnitt). Aus der Menge $\mathfrak{M}$ bilden wir dann eine Menge $\mathfrak{M}'$, indem wir den (zu $\mathfrak{M}$ gehörenden) Punkt $(i, y_1^\sigma, \ldots, y_q^\sigma)$ ersetzen durch den (nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörenden) Punkt $(h, y_1^\sigma, \ldots, y_q^\sigma)$. Ist $\mathfrak{A}' = (a_1', a_2', \ldots, a_k')$ die zu $\mathfrak{M}'$ gehörige auf die x-Koordinate bezügliche Partition, so ist offenbar

$$a_\mu' = a_\mu \text{ für } \mu \neq h, i,$$

dagegen

$$\begin{aligned} a_h' &= a_h + 1 = a^{(\sigma)} + 1, \\ a_i' &= a_i - 1 = a^{(\sigma+1)} - 1. \end{aligned} \tag{9}$$

Wie im Falle I aus den Ungleichungen (7), so erkennt man hier aus $a_{h-1}' = a^{(\sigma-1)} > a^{(\sigma)}$ und $a_{i+1}' = a^{(\sigma+2)} < a^{(\sigma+1)}$ die Monotonie von $\mathfrak{A}'$, aus (9) aber (wegen $h < i$) die Beziehung[27] $\mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$.

Damit ist auch im II. Fall eine Menge $\mathfrak{M}'$ der gewünschten Art gewonnen.

10. Betrachten wir als Beispiel für die Entwicklungen dieses § die in Fig. 1 (Nr. 5) dargestellte Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$, so erhalten wir hier $r = 3$, $t_1 = 1$, $t_2 = 3$, $t_3 = 1$ (mit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, $\lambda_3 = 2$, $l_1 = 1$, $l_2 = 5$, $l_3 = 7$); es liegt also der I. Fall (Nr. 8) vor. Da nur $t_2 > 1$ ist, haben wir $\sigma = 2$ zu wählen und es wird $\mu_{\sigma 1} = \mu_{21} = l_1 + 1 = 2$, $\mu_{\sigma t_\sigma} = \mu_{23} = l_2 = 5$. Dem mittleren Teilabschnitt des 2-ten Abschnitts gehören – gemäß (4) für $\rho = 2$, $\tau = 2$, $k_{21} = 1$, $k_{22} = 3$, – die Werte $\mu = 3$ und $\mu = 4$ an; wir wählen für μ_{22} einen dieser Werte, etwa $\mu_{22} = 3$. Der einzige Punkt von $\mathfrak{Y}_{22} = \mathfrak{M}(3) = \mathfrak{M}(4)$, der nicht zu $\mathfrak{Y}_{21} =$

[27] Die – im Sinne von Nr. 8, Anm. 25 – die Partition $\mathfrak{A}'$ darstellende Gitterpunktmenge $\mathfrak{S}'$ geht aus der die Partition $\mathfrak{A}$ darstellenden Menge $\mathfrak{S}$ gemäß (9) dadurch hervor, daß der zu $\mathfrak{S}$ gehörende Punkt $(s = i,\ t = a^{(\sigma+1)})$ nach $(s = h,\ t = a^{(\sigma)} + 1)$ verlagert wird. Der Übergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}'$ ist also (vgl. Anm. 25) ein einfacher Aufbau. Da aber die Differenz $(a^{(\sigma)} + 1) - a^{(\sigma+1)}$ der t-Koordinaten beider Punkte sicher > 1 ist, so liegt im allgemeinen kein elementarer Aufbau vor, sondern nur dann, wenn $i - h = \lambda_\sigma + \lambda_{\sigma+1} - 1$ gleich 1, also $\lambda_\sigma = \lambda_{\sigma+1} = 1$ ist, d. h. wenn sowohl der σ-te Abschnitt als auch der $(\sigma+1)$-te Abschnitt nur ein einziges Element umfaßt, jeder der Werte $a^{(\sigma)}$, $a^{(\sigma+1)}$ in der Partition $\mathfrak{A}$ also nur ein einziges mal auftritt.

$= \mathfrak{M}(2)$ gehört, ist der Punkt $y = 2$, den wir also für $(y^{\sigma 1}) = (y^{21})$ nehmen müssen; analog ist für $(y^{\sigma 2}) = (y^{22})$ der Punkt $y = 3$ zu nehmen als der einzige Punkt von $\mathfrak{Y}_{23} = \mathfrak{M}(5)$, der nicht zu $\mathfrak{Y}_{22}$ gehört. Gemäß Nr. **8** besteht dann der Übergang von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}'$ darin, daß der Punkt $(\mu_{22}, y^{21}) = (3, 2)$ durch den Punkt $(\mu_{21}, y^{21}) = (2, 2)$ ersetzt wird und der Punkt $(\mu_{23}, y^{22}) = (5, 3)$ durch den Punkt $(\mu_{22}, y^{22}) = (3, 3)$.

Die so entstehende Menge $\mathfrak{M}'$ wird durch Fig. 2 dargestellt[28].

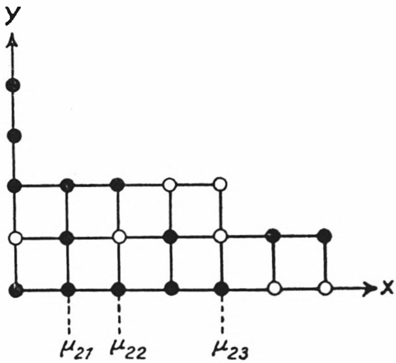

Fig. 2

11. Als zweites Beispiel betrachten wir die durch Fig. 3 dargestellte[29] Gitterpunktmenge $\mathfrak{M}$ vom Grad 5. Die Partition $\mathfrak{A}$ mit ihrer durch $\mathfrak{M}$ bewirkten Aufteilung wird hier durch (2, 2; 1)

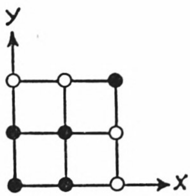

Fig. 3

[28] Um den Zusammenhang der Figur mit Fig. 1 besser hervorzuheben, sind in der Figur – sei es durch kleine schwarze Kreise ●, sei es durch kleine innen weiß gelassene Kreise ○, – sämtliche Punkte verzeichnet, die in Fig. 1 auf die eine oder andere Art dargestellt sind (anders gesagt: sämtliche Punkte von $k_x(\mathfrak{M})$, vgl. Anm. 32). Dabei bedeuten in Fig. 2 die kleinen schwarzen Kreise die Punkte von $\mathfrak{M}'$.

[29] Die auf Fig. 1 bezüglichen Anmerkungen 18, 19 gelten entsprechend auch für Fig. 3.

gegeben, man hat $r = 2$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1$ (mit $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 1$, $l_1 = 2$, $l_2 = 3$); es liegt der II. Fall (Nr. **9**) vor. Die Folge (8) umfaßt hier nur die beiden Mengen $\mathfrak{Y}_1 = \mathfrak{M}(1) = \mathfrak{M}(2)$, $\mathfrak{Y}_2 = \mathfrak{M}(3)$. Demgemäß haben wir $\sigma = 1$. Der einzige Punkt aus $\mathfrak{Y}_2$, der nicht zu $\mathfrak{Y}_1$ gehört, ist der Punkt $y = 3$, den wir also für $(y^{(1)})$ zu wählen haben. Es ergibt sich $h = l_0 + 1 = 1$, $i = l_2 = 3$ und aus $\mathfrak{M}$ entsteht die in Fig. 4 dargestellte[30] Menge $\mathfrak{M}'$ dadurch, daß der Punkt $(i, y^{(1)}) = (3, 3)$ durch den Punkt $(h, y^{(1)}) = (1, 3)$ ersetzt wird.

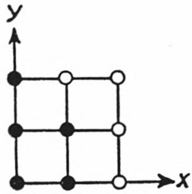

Fig. 4

12. Den Betrachtungen in diesem § 4 seien noch einige Bemerkungen beigefügt.

Ist $P' = (x', y_1', \ldots, y_q')$ ein Gitterpunkt mit positiven Koordinaten und $\mathfrak{M}$ eine aus solchen Gitterpunkten bestehende Menge, so werde mit $k_x(P')$ die Menge aller der Ungleichung $0 < x \leqq x'$ genügenden Punkte $(x, y_1', \ldots, y_q')$, ferner mit $k_x(\mathfrak{M})$, – als „x-komprimierte Hülle (Füllung)" von $\mathfrak{M}$, – die Vereinigung der für alle Punkte P' von $\mathfrak{M}$ gebildeten Mengen $k_x(P')$ bezeichnet[31].

---

[30] Das in Anm. 28 über Fig. 2 und ihren Zusammenhang mit Fig. 1 Gesagte gilt analog für Fig. 4 und ihren Zusammenhang mit Fig. 3.

[31] Vgl. l. c.[5] (Sitzung vom 11. Jan. 1941). Allgemeiner kann man (für $1 \leqq p \leqq n$) im $(x_1 \ldots x_n)$-Raum definieren: $k_{1,2,\ldots,p}(P')$ als die Menge aller den Ungleichungen $0 < x_\nu \leqq x_\nu'$ $(1 \leqq \nu \leqq p)$ genügende Punkte $(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}', \ldots, x_n')$ (unter P' den Punkt $(x_1', \ldots, x_n)$ verstanden), ferner $k_{1,2,\ldots,p}(\mathfrak{M})$ als Vereinigung der für alle Punkte P' von $\mathfrak{M}$ gebildeten Mengen $k_{1,2,\ldots,p}(P')$, – oder auch als kleinste $(x_1 \ldots x_p)$ – komprimierte Gitterpunktmenge $\supseteqq \mathfrak{M}$. Über partiellkomprimierte Gitterpunktmengen vgl. Note VII, l. c.[5], Nr. **2**. Nimmt man $p = n$, so gelangt man zur komprimierten Hülle (Füllung) $k(\mathfrak{M})$ von $\mathfrak{M}$. Vgl. Note V, l. c.[3], S. 4, Nr. **3**, sowie (auch für andere Mengen als Gitterpunktmengen) Note II, § 1, Nr. **1**, **2**, S. 70 und § 3, Nr. **7** ff., S. 74 ff.

Es gilt nun ganz allgemein, ob nun für eine Menge $\mathfrak{M}$ der Fall I (Nr. **8**) oder der Fall II (Nr. **9**) vorliegt, daß die Menge $\mathfrak{M}'$ eine Teilmenge von $k_x(\mathfrak{M})$ ist, wie sofort daraus ersichtlich ist, daß beim Übergang von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}'$ jeder Punkt P von $\mathfrak{M}$, der eine Verlagerung erfährt, durch einen zu $k_x(P)$ gehörenden Punkt ersetzt wird[32].

Dabei ist bei Konstruktion des Verfahrens, das von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}'$ führt, das Bestreben maßgeblich gewesen, für $\mathfrak{M}'$ eine solche Teilmenge von $k_x(\mathfrak{M})$ zu nehmen, daß der Übergang von $\mathfrak{M}$ zu $\mathfrak{M}'$ möglichst einfach wird, d. h. daß möglichst wenige Punkte dabei (u. zw. in der x-Richtung) verlagert werden, zugleich aber natürlich auch die neue Menge $\mathfrak{M}'$ der Monotonie-Voraussetzung (V) genügt. Tatsächlich ist diesem Bestreben entsprechend der Übergang von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{A}'$ zwar nicht immer ein elementarer Aufbau, aber doch stets ein einfacher Aufbau (vgl. Anm. 25, 27)[33].

---

[32] In Fig. 1 und Fig. 3 sind alle Punkte, die nicht zur dargestellten Menge $\mathfrak{M}$, wohl aber zu $k_x(\mathfrak{M})$ gehören, durch kleine, innen weiß gelassene Kreise O gekennzeichnet.

Gemäß dem in Anm. 28 Gesagten sind in Fig. 2 als kleine weiße Kreise nicht nur die nicht zu $\mathfrak{M}'$ gehörenden Punkte von $k_x(\mathfrak{M}')$, sondern überhaupt alle nicht zu $\mathfrak{M}'$ gehörenden Punkte von $k_x(\mathfrak{M})$ eingezeichnet. Entsprechendes gilt für Fig. 4 (wo übrigens $\mathfrak{M}'$ eine x-komprimierte Menge, also $= k_x(\mathfrak{M}')$ ist).

[33] Gerade auch um zu zeigen, daß sich beim Übergang von $\mathfrak{M}$ zu einer Menge $\mathfrak{M}' \subseteqq k_x(\mathfrak{M})$ nicht immer ein elementarer Aufbau von $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{M})$ erreichen läßt, wurde in Nr. **11** das Beispiel der Fig. 3 gebracht. Soll im Sinne einer x-Kompression ein Punkt der in Fig. 3 dargestellten Menge $\mathfrak{M}$ unter Beibehaltung seiner y-Koordinate so verlagert werden, daß dabei seine x-Koordinate abnimmt, so kommt als einziger Punkt hiefür der Punkt ($x = 3$, $y = 3$) in Betracht. Ihn nach ($x = 2$, $y = 3$) zu verlegen, ergäbe aber eine Menge mit der zur x-Koordinate gehörigen Partition (2, 3), die also nicht der Forderung (V) genügt. Es kommt also nur die Verlagerung des Punktes ($x = 3$, $y = 3$) nach ($x = 1$, $y = 3$), d. h. der Übergang zu der in Fig. 4 dargestellten Menge $\mathfrak{M}'$ in Betracht. Dabei ist der Übergang von $\mathfrak{A} = (2, 2, 1)$ zu $\mathfrak{A}' = (3, 2)$ zwar ein einfacher Aufbau (wie es ganz allgemein gemäß Nr. **9** im Fall II zutrifft), jedoch kein elementarer, – dem entsprechend, daß sich zwischen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ die der Beziehung $\mathfrak{A}' > \mathfrak{B} > \mathfrak{A}$ genügende Partition $\mathfrak{B} = (3, 1, 1)$ einschieben läßt (wobei übrigens die Übergänge von $\mathfrak{A}$ zu $\mathfrak{B}$, sowie von $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}'$ elementare Aufbauten sind).

(Um einen einfachen, in zwei elementare Aufbauten zerlegbaren Aufbau

§ 5. Der vollständige Übergang zu einer x-komprimierten Menge.

13. Um nun den Beweis von Satz 1 so, wie in Nr. **7** entworfen, zu Ende zu führen, betrachten wir die aus der Ausgangsmenge $\mathfrak{M}$ gemäß Nr. **8**, **9** hergestellte Menge $\mathfrak{M}'$. Dabei ist aus der Konstruktion von $\mathfrak{M}'$ unmittelbar zu ersehen, daß die aus $\mathfrak{M}'$ durch x-Kompression entstehende Menge $[\mathfrak{M}']^*$ mit der aus $\mathfrak{M}$ durch x-Kompression entstehenden Menge $\mathfrak{M}^*$ übereinstimmt.

Ergibt sich nun $\mathfrak{M}'$ als eine x-komprimierte Menge, so ist $\mathfrak{M}'$ nichts anderes als die Menge $\mathfrak{M}^*$ des Satzes 1, der dann gemäß $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}' > \mathfrak{A}$ gültig ist. Andernfalls, wenn $\mathfrak{M}'$ nicht x-komprimiert ist, kann man auf $\mathfrak{M}'$ das gleiche Verfahren anwenden, das gemäß Nr. **8**, **9** auf $\mathfrak{M}$ angewendet wurde, und so zu einer Menge $[\mathfrak{M}']' = \mathfrak{M}''$ gelangen, sowie in weiterer Fortsetzung des Verfahrens zu einer Folge von Mengen

$$\mathfrak{M},\ \mathfrak{M}',\ \mathfrak{M}'',\ \ldots .$$

mit

$$\mathfrak{M}^{(h+1)} = [\mathfrak{M}^{(h)}]', \qquad \mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}, \qquad (h \geqq 0),$$

wobei diese Folge nur dann abbricht, wenn einmal eine Menge $\mathfrak{M}^{(s)}$ auftritt, die x-komprimiert ist. Das muß aber sicher einmal der Fall sein, wie aus den Ungleichungen

$$H > H' > H'' > \ldots .$$

für die ganzen positiven Zahlen $H, H', H'', \ldots$ hervorgeht, wenn H die über alle Punkte von $\mathfrak{M}$ erstreckte Summe der x-Koordinaten dieser Punkte bedeutet und $H^{(h)}$ die entsprechende Bedeutung für $\mathfrak{M}^{(h)}$ $(h \geqq 1)$ hat. Für die zu $\mathfrak{M}, \mathfrak{M}', \ldots, \mathfrak{M}^{(s}$

---

handelt es sich übrigens auch im Rahmen anderer Betrachtungen, Monatshefte l. c.[22], Nr. **32**, S. 17, Fall A) beim Übergang von der Partition $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{B}^{(00)}$ zu $\mathfrak{B}^{(0)}$, wie man aus der Veranschaulichung dieser Partitionen durch Gitterpunkte gemäß Anm. 25 sofort erkennt; der Begriff „einfacher Aufbau" war allerdings damals noch nicht eingeführt.)

gehörigen auf die x-Koordinate bezüglichen Partitionen gilt dabei gemäß Nr. **8**, **9**

$$\mathfrak{A} < \mathfrak{A}' < \ldots < \mathfrak{A}^{(s)}.$$

Weil aber $\mathfrak{M}^* = [\mathfrak{M}']^* = \ldots = [\mathfrak{M}^{(s)}]^*$ ist, zugleich aber, der x-Komprimiertheit von $\mathfrak{M}^{(s)}$ zufolge, $[\mathfrak{M}^{(s)}]^* = \mathfrak{M}^{(s)}$ sein muß, so ist $\mathfrak{M}^{(s)} = \mathfrak{M}^*$, also $\mathfrak{A}^{(s)} = \mathfrak{A}^*$, woraus $\mathfrak{A}^* > \mathfrak{A}$ folgt. Satz 1 ist damit bewiesen.

Berichtigungen und Ergänzungen zu der Note „Systeme von Partitionen und Gitterpunktfiguren V. Der Hauptsatz über den Umbau komprimierter Gitterpunktmengen“, S. 1–37 dieser Sitzungsberichte

S. 4, Zeile 16: statt „ist“ lies „sind“.

S. 9, Zeile 2 der Anm. 16 (an zwei Stellen): statt „$\mathfrak{R}^q(x)$“ lies „$\mathfrak{K}^q(x)$“.

S. 9, Zeile 1 der Anm. 16 ist nach „Analog gilt“ einzuschalten:

„für jede komprimierte Menge $\mathfrak{L}^p \supset \mathfrak{o}$ in $\mathfrak{S}^p$, daß die Menge der Punkte (y), für welche $\mathfrak{K}^p(y) \supseteq \mathfrak{L}^p$ bzw. $\mathfrak{K}^p(y) \supset \mathfrak{L}^p$ ist, eine komprimierte Menge in $\mathfrak{T}^q$ ist; entsprechend gilt“.