Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

1942. Heft I/III

Sitzungen Januar – Dezember

München 1942

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Deutsche Akademie
der Wissenschaften
zu Berlin
Bibliothek

C. H. Beck'sche Buchdruckerei Nördlingen

Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien I.

Über die speziellen Simony-Knoten und Simony-Ketten.

Von **Heinrich Tietze**, München.

Vorgelegt in der Sitzung vom 4. Juli 1942.

Die sogenannten Torusknoten, die füglich auch nach Simony benannt werden können (s. u.), sind mit gruppentheoretischen Hilfsmitteln schon verschiedentlich untersucht worden. Es zeigt sich, daß ein Teil dieser Knotenlinien sowie analog gebildete Verkettungen zweier Linien der von Reidemeister herrührenden Theorie unmittelbar zugänglich sind, da die zu der Linie bzw. dem Liniensystem gehörige quadratische Form in besonders einfacher Weise als Summe rein-quadratischer Glieder dargestellt werden kann (vgl. Gleichung (5), Nr. **6**).

1. Die zwei von A und von B ausgehenden Schnüre $a'\ b''\ a'''\ldots$ und $b'\ a''\ b'''\ldots$ (s. Fig. 1) denken wir nach Art eines Zopfes verflochten, derart, daß für den Beschauer n Überkreuzungen erscheinen (es sind das die Stellen, an denen in der Figur 1, wo $n = 6$ gewählt ist, ein Zeichen $+$ steht). Dabei möge n eine ganze positive Zahl $\geqq 2$ sein.[1] Was die Figur zeigt, ist die Projektion der Schnüre auf eine Ebene. In dieser Ebene entstehen dabei $n - 1$ Gebiete, jedes von einem Bogen a und einem Bogen b begrenzt (in der Figur sind es die mit den Nummern 1 bis 5 bezeichneten Gebiete). Verbindet man die Schnurenden C mit B und D mit A durch die in der Figur strichlierten mit c und d bezeichneten Schnurteile, so erhält man bei ungeradem n eine einzige verknotete geschlossene Raumkurve,[2] dagegen bei geradem n zwei miteinander verkettete Linien, von denen jede

[1] Wegen Einbeziehung des Falles $n = 1$ vgl. Anm. 2.

[2] Im Falle $n = 3$ ist die Kurve einer sogenannten „Kleeblattschlinge" gleichwertig. Nur in dem durch Fig. 2 dargestellten Fall $n = 1$ (vgl. Anm. 1) ist die Raumkurve unverknotet.

einzelne unverknotet ist. In beiden Fällen werde mit L_n die so erhaltene Linien-Projektions-Figur bezeichnet. Gelegentlich werden wir das Zeichen L_n auch für das durch diese Projektion dargestellte räumliche Liniensystem verwenden; mit L_n' werde dann das Spiegelbild[2a] dieser räumlichen Figur (vgl. Nr. 2), ebenso aber auch dessen ebene Projektion bezeichnet.

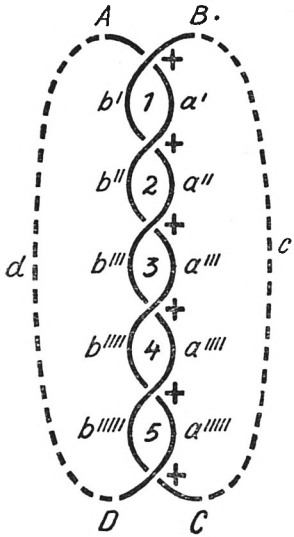

Fig. 1

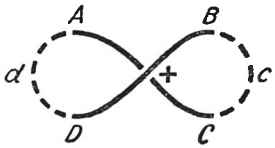

Fig. 2

Das durch L_n dargestellte räumliche Liniensystem ist dem auf einem Torus

$$r = \alpha + \beta \cos u, \quad z = \beta \sin u \quad (\alpha > \beta > 0) \tag{1}$$

liegendem System $[m, n]$ für $m = 2$ gleichwertig, wobei r, v, z Zylinderkoordinaten ($x = r \cos v$, $y = r \sin v$ und z cartesische Koordinaten) und u, v (mod. 2π) die Parameter der Fläche (1) sind, deren Achse **A** durch $r = 0$ und deren Mittellinie **M** durch $z = 0$, $r = \alpha$ gegeben ist; wobei ferner für

---

[2a] Vgl. J. W. Alexander-G. B. Briggs, Annals of Math., ser. 2, vol. 28 (1927), S. 564. Doch ist dort die analoge Bezeichnung nur bei einer einzigen Linie angewendet, wobei diese orientiert angenommen wird, während in unseren Betrachtungen die Linien ohne Richtungssinn genommen werden. (Bei zwei und mehr orientierten Linien eines Systems scheint eine einheitliche Bezeichnungsweise nicht eingeführt, die sowohl die Spiegelung der Gesamtfigur als auch die Richtungsänderung nur einiger – nicht aller – Linien des Systems umfaßt.)

zwei ganze Zahlen m, n, die nicht beide null sind, $[m, n; u_0, v_0]$ dasjenige Liniensystem auf (1) bedeute, das alle Punkte (u, v) umfaßt, für die

$$n(v - v_0) \equiv m(u - u_0) \pmod{2\pi} \tag{2}$$

ist, — ein Liniensystem, das, falls $n \neq 0$ ist,[3] aus dem Liniensystem $[m, n] = [m, n; 0, 0]$ durch bloße Drehung um A, nämlich durch die Drehung $v' = v - v_0 + \frac{m}{n} u_0$ entsteht. Ist nun $k = (m, n)$ der größte gemeinsame Teiler von m und n, $m = km_1$, $n = kn_1$, dann besteht $[m, n]$ für $k = 1$ aus einer geschlossenen Linie, für $k > 1$ aus k miteinander verketteten geschlossenen Linien, von denen die einzelne durch $[m_1, n_1; \lambda\frac{2\pi}{k}, 0]$ gegeben ist ($\lambda = 0, 1, \ldots, k - 1$) und die aus $[m_1, n_1]$ durch Drehungen um A hervorgehen. Ersichtlich ist stets $[-m, -n] = [m, n]$, ferner $[m, -n]$ gleichwertig mit dem Spiegelbild von $[m, n]$.

Mit eben diesen Verknotungen und Verkettungen $[m, n]$ hat sich seinerzeit O. Simony[4] ausführlich — der damaligen Lage nach experimentell — beschäftigt: durch Zusammenfügen der Enden tordierter Bänder und Auseinanderschneiden längs der Mittellinie des Bandes erhielt er die speziellen durch L_n dargestellten Gebilde $[2, n]$, während er allgemeine Gebilde $[m, n]$ herstellte durch Zerschneiden von Gummi-Hohlringen längs Schnitten, die sich bei der Herumführung um die Ring-Achse zugleich um die Mittellinie des Ringes winden. Die bekannte Tatsache, daß $[m, n]$ und $[n, m]$ topologisch gleichwertig (ineinander überführbar) sind, wird auch bereits von Simony (ohne Beweis[5]) hervorgehoben.

---

[3] Im Falle $n = 0$ besteht $[m, n; u_0, v_0] = [m, 0; u_0, 0]$ aus $|m|$ Breitenkreisen des Torus (1).

[4] Siehe etwa in Poggendorff's biographisch-literarischem Handwörterbuch zur Geschichte der exacten Wissenschaften Bd. III (1858–1883), 2. Abt., S. 1251–1252, und Bd. IV (1883–1904), 2. Abt., S. 1400, die einschlägigen unter den aufgeführten Publikationen. Ein Bild von der Vielseitigkeit O. Simony's erhält man aus dem Nachruf im Centralblatt für das gesamte Forstwesen, Wien, Jgg. 42 (1916), S. 64–69. Vgl. auch ib. Jgg. 44 (1918), S. 167–170; Österr. Forst- u. Jagd-Zeitung, 36. Jgg., Wien 1918, S. 63 und l. c. Anm. 7, S. 44, 45.

[5] Eine Torusfläche T, aus der eine kleine Kreisscheibe K herausgeschnitten ist (die so angebracht werden kann, daß sie das Liniensystem $[m, n]$ nicht trifft), läßt sich so deformieren, daß nach anfänglicher Ausdehnung und späterem Zusammenschrumpfen der Randlinie von K wieder eine Torusfläche T' mit einer kleinen Öffnung entsteht, wobei die Meridiankreise von T in die Breitenkreise von T' übergeführt sind und umgekehrt. (Man kann diese Überführung auch in dem durch Einführung eines uneigentlichen Punktes U aus dem euklidischen R_3 entstehenden sphärischen Raum deuten, wobei die

2. In Fig. 3 ist das Spiegelbild von Fig. 1 wiedergegeben. Aus „positiven" Überkreuzungen der Fig. 1 sind „negative" geworden, wenn wir die üblichen Festsetzungen zugrunde legen.

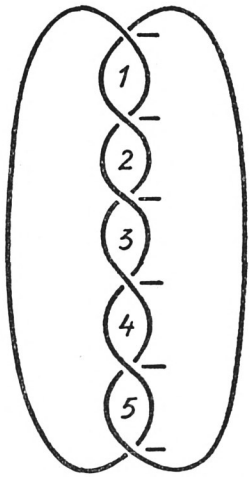

Fig. 3

3. In bekannter Weise ist jeder Linienprojektion der betrachteten Art eine quadratische Form f zugeordnet, wobei dem Übergang zum Spiegelbild die Multiplikation der Form mit -1 entspricht und in unserem Fall die Formen f und $-f$ (positiv- bzw. negativ-) definit sind. Wir wollen feststellen, welche ungeraden Primzahlen p für wenigstens eine der Formen f und $-f$ „singulär" sind[5a] (s. u. Nr. **5**). Für diejenigen Werte n, für welche wenigstens eine solche Primzahl vorhanden ist, läßt sich so ohne Heranziehung der Gruppentheorie, allein mit den genannten Hilfsmitteln der Reidemeisterschen Theorie[6] ein Beweis dafür

---

ungelochte Fläche T in T' so übergeführt wird, daß in einem Zwischenstadium die deformierte Fläche durch U geht.)

[5a] Die umgekehrte Aufgabe, zu vorgegebenen singulären Primzahlen von L_n, bzw. von L_n und von L_n' die (unendlich vielen) zugehörigen Werte n aufzustellen, soll in Noten in den Monatsheften f. Math. u. Phys. und in der Math. Zeitschr. behandelt werden. [Zusatz bei der Korrektur.]

[6] Vgl. Anm. 9 und 11.

geben, daß die betrachtete Linie tatsächlich verknotet, bzw. die beiden Linien des Systems tatsächlich verkettet sind.[7]

Zahlentheoretische Vorbemerkungen.

4. Für die ganze Zahl $\nu \geqq 1$ sei $\varkappa^2$ die größte in ν aufgehende Quadratzahl, also $\frac{\nu}{\varkappa^2} = \gamma$ ganz und quadratfrei. Wir schreiben $\varkappa = \varkappa(\nu)$, $\gamma = \gamma(\nu)$. Ersichtlich ist stets $\gamma(\nu)\,\gamma(\nu+1)$ quadratfrei.

Ist p eine ungerade Primzahl und sind ν und μ zu p teilerfremd, so sind natürlich ν und $\gamma(\nu)$, desgleichen ν und $\mu^2\nu$ gleichzeitig quadratische Reste oder gleichzeitig quadratische Nichtreste modulo p; durch das Legendresche Restsymbol ausgedrückt ist also:

$$\left(\frac{\gamma(\nu)}{p}\right) = \left(\frac{\nu}{p}\right) = \left(\frac{\mu^2\nu}{p}\right). \tag{3}$$

5. Eine quadratische Form $f = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}\, t_\mu\, t_\nu$ mit rationalen Koeffizienten $c_{\mu\nu}$ läßt sich durch rationalzahlige linear-homogene Transformation auf die Gestalt $f = \sum A_\mu x_\mu^2$ mit ganzzahligen quadratfreien A_μ bringen. Ist p eine ungerade Primzahl und sind (gegebenenfalls nach Umnumerierung der Variablen) die Koeffizienten $A_1, \ldots, A_m$ durch p teilbar: $A_\mu = p\, a_\mu$ für $1 \leqq \mu \leqq m$, hingegen A_μ für $\mu > m$ zu p teilerfremd, dann wird die zu f gehörige Minkowskische Einheit C_p gleich dem Le-

---

[7] Bezüglich des Bedürfnisses für solche Beweise mag auf eine Bemerkung in einem demnächst in den Hamburger Mathematischen Einzelschriften (als Bd. 36) erscheinenden Vortrag „Ein Kapitel Topologie" verwiesen werden; s. dort Anm. 25, S. 46. – Noch härter als Verf. l. c. drückt sich einmal H. Prüfer, Knotentheorie, Semesterberichte zur Pflege des Zusammenhangs von Universität und Schule, Münster u. Bonn, 3. Sem. (Sommer 1933), S. 63 aus, wenn er, in einem ohne Beweis anschaulich einleuchtenden Fall von Verkettung, diese nur als „wahrscheinlich" bezeichnet. [In den genannten, leider vergriffenen und seltenen Bd. konnte ich dank freundlichen Entgegenkommens von Herrn Kollegen Behnke noch vor Abschluß der Korrektur dieser Note Einsicht nehmen.]

gendreschen Restsymbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ gesetzt, wo a als das Produkt

$$a = a_1 \cdot (-a_2) \cdot a_3 (-a_4) \cdot \ldots \cdot (\pm a_m) \tag{4}$$

definiert ist[8]; es ist also $C_p = +1$, wenn a zu einer Restklasse mod. p gehört, welche Quadratzahlen enthält; andernfalls ist $C_p = -1$. Im letzteren Fall möge p kurz eine „singuläre" ungerade Primzahl von f heißen (vgl. l. c.[7] S. 21).

Die singulären Primzahlen der Linienprojektion L_n.

6. Die zur Linienprojektion L_n (Nr. **1**) gehörige quadratische Form[9] ist gegeben durch[10]

$$f = t_1^2 + \sum_{\lambda=1}^{n-2} (t_\lambda - t_{\lambda+1})^2 + t_{n-1}^2 =$$

$$= 2 \sum_{\lambda=1}^{n-1} t_\lambda^2 - 2 \sum_{\lambda=1}^{n-2} t_\lambda t_{\lambda+1},$$

also durch

$$f = \sum_{\nu=1}^{n-1} \nu(\nu+1)\, \xi_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^{n-1} \gamma(\nu)\, \gamma(\nu+1)\, x_\nu^2, \tag{5}$$

wenn wir (mit $t_n = 0$)

$$\xi_\nu = \frac{1}{\nu} t_\nu - \frac{1}{\nu+1} t_{\nu+1},$$
$$x_\nu = \varkappa(\nu)\, \varkappa(\nu+1)\, \xi_\nu$$

setzen. Wir wollen diejenigen ungeraden Primzahlen bestimmen, die für wenigsten eine der Formen f und $-f$ singulär sind (Nr. **5**), der zitierten Theorie gemäß also Invarianten der räumlichen Linienfigur L_n darstellen.

---

[8] Siehe Reidemeister, l. c.[9] S. 29; vgl. auch l. c.[7] S. 21.

[9] Vgl. K. Reidemeister, Knotentheorie, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band I, Heft 1, zweites Kap., §§ 7–9 S. 25 ff. Die einschlägigen Teile der Reidemeisterschen Theorie sind auch wiedergegeben in dem in Anm. 7 zitierten Vortrag.

[10] Für $n = 2$ entfällt die Summe $\Sigma(t_\lambda - t_{\lambda+1})^2$, für $n = 1$ ist $f = 0$.

7. Zur Entscheidung, ob eine ungerade Primzahl p für die quadratische Form (5) singulär ist, brauchen wir gemäß Nr. **5** nur die durch p teilbaren unter den Koeffizienten $A_\nu = \gamma(\nu)\gamma(\nu+1)$, somit nur jene Werte ν heranzuziehen, für welche in ν oder in $\nu+1$ eine ungerade Potenz von p (als höchste darin aufgehende Potenz von p) aufgeht. Wir betrachten demgemäß jene Werte $\nu(\leqq n)$, zu denen es ein $\tau \geqq 0$ gibt, so daß ν durch $p^{2\tau+1}$, aber nicht durch $p^{2\tau+2}$ teilbar ist; es ist dann $\gamma(\nu) = p\delta(\nu)$, wo $\delta(\nu)$ und somit auch $\delta(\nu)\gamma(\nu-1)$ und $\delta(\nu)\gamma(\nu+1)$ zu p teilerfremd und zugleich quadratfrei ist.

Wir wollen nun die Fälle $\nu < n$ und $\nu = n$ unterscheiden. Im Fall $\nu < n$ sind die beiden aufeinanderfolgenden Koeffizienten $\gamma(\nu-1)\gamma(\nu)$ und $\gamma(\nu)\gamma(\nu+1)$ durch p (genau in der ersten Potenz) teilbar und liefern für (4) zwei Faktoren $\gamma(\nu-1)\,\delta(\nu)$ und $-\delta(\nu)\gamma(\nu+1)$, deren Produkt g quadratischer Rest mod. p ist, da nach (3)

$$\left(\frac{g}{p}\right) = \left(\frac{-\gamma(\nu-1)\,\gamma(\nu+1)}{p}\right) = \left(\frac{-(\nu-1)(\nu+1)}{p}\right)$$

und dabei die Zahl $-(\nu-1)(\nu+1)$, weil $\equiv 1 \pmod{p}$, offenbar quadratischer Rest ist.

Es bleibt der Fall $\nu = n$, der also nur eintreten kann, wenn $n \equiv 0 \pmod{p}$ und die höchste in n aufgehende Potenz von p eine ungerade Potenz ist. In diesem Fall, in dem $n = p^{2\tau+1}n_1$ sei, steuert der letzte Koeffizient $\gamma(n-1)\,\gamma(n) = p\gamma(n-1)\,\delta(n) = p\,\gamma(n-1)\gamma(n_1)$ für (4) den einen Faktor $\gamma(n-1)\gamma(n_1)$ bei und es ist dann $\left(\frac{a}{p}\right) = \left(\frac{\gamma(n-1)\,\gamma(n_1)}{p}\right)$; nach (3) ist das aber auch gleich $\left(\frac{(n-1)\,n_1}{p}\right)$; dies wieder ist wegen $n-1 \equiv -1 \pmod{p}$ gleich $\left(\frac{-n_1}{p}\right)$. Wir haben damit den

Satz 1. Singulär für die zur Figur L_n gehörige quadratische Form f ist die ungerade Primzahl p dann und nur

dann, wenn n von der Gestalt $n = p^{2\tau+1} n_1$ und dabei $(-n_1)$ quadratischer Nichtrest mod. p ist.

Zusatz.[10a] Eine wesentliche Vereinfachung in der Herleitung dieses Satzes erhält man, – worauf mich Herr Kollege Reidemeister in freundlicher Weise aufmerksam macht, – wenn man in Fig. 1 die beiden Verbindungsstücke $c = BC$, $d = AD$ nicht das eine rechts, das andere links, sondern beide auf derselben Seite verlaufen läßt. Man bekommt dann nur ein einziges zu numerierendes Innengebiet und es wird $f = -nt_1^2$. Sei außerdem die Gelegenheit benützt, auf die Gauß'sche Verschlingungszahl V hinzuweisen (vgl. l. c. Anm. 9, S. 17), die sich bei L_n für $n = 2h$ zu $V = \pm h$ ergibt; V ändert aber das Vorzeichen nicht nur bei Spiegelung der Gesamtfigur, sondern auch bei Änderung der Orientierung einer der beiden Kurven, während die singulären Primzahlen der Reidemeisterschen Theorie von Kurvenorientierungen unabhängig sind (vgl. Anm. 2a).

8. Da für eine Primzahl p von der Gestalt $4k + 3$ und ein zu p teilerfremdes a von den zwei Zahlen a und $-a$ stets die eine quadratischer Rest, die andere Nichtrest ist, so folgt aus Satz 1:

Satz 2. Falls n durch eine Primzahl $p = 4k + 3$ in ungerader (höchster) Potenz teilbar ist, dann ist p für genau eine der beiden quadratischen Formen f und $-f$, die zur Figur L_n und ihrem Spiegelbild L_n' gehören, singulär.

Für ein solches n ist mit Satz 2 auch ein Beweis für die Verknotung bzw. Verkettung von L_n und die Nichtüberführbarkeit von L_n in L_n' gegeben.[11]

Da andererseits für eine Primzahl $p = 4k + 1$ stets a und $-a$ gleichzeitig Rest oder gleichzeitig Nichtrest sind, so gilt hier

Satz 3. Eine Primzahl $p = 4k + 1$ ist für die zur Figur L_n gehörige quadratische Form f (und dann zugleich für die zum Spiegelbild L_n' gehörige Form $-f$) singulär dann und nur dann, wenn n von der Gestalt $n = p^{2\tau+1} n_1$ und dabei n_1 quadratischer Nichtrest mod. p ist.

[10a] Zusatz bei der Korrektur.

[11] Vgl. hiezu L. Goeritz, Math. Zeitschr. 36 (1933), Hambg. Abh. 10 (1934) sowie l. c.[7] die dortige Anm. 22 S. 42.

Für ein solches n ist mit Satz 3 auch ein Beweis für die Verknotung bzw. Verkettung von L_n gegeben, während die Nichtüberführbarkeit von L_n in L_n' sich hieraus nicht entnehmen läßt. Vielmehr gilt diesbezüglich nach dem Gesagten

Satz 4. Für genau eine der beiden zu L_n und zu L_n' gehörigen quadratischen Formen ist eine ungerade Primzahl p dann und nur dann singulär, wenn sie von der Gestalt $p = 4k + 3$ ist und die höchste Potenz, in der p in n aufgeht, eine ungerade Potenz ist.[12]

9. Auf Grund dieser Sätze ist die Verknotung bzw. Verkettung von L_n beweisbar beispielsweise für elf von den zwanzig Zahlen des Bereiches $3 \leqq n \leqq 22$, nämlich für alle diese Zahlen n mit Ausnahme der 9 Werte $n = 4, 5, 8, 9, 13, 16, 17, 18, 20$ (auch für $n = 2$ entzieht sich der Nachweis der Verkettung von L_2 unserer Methode; wir lassen diesen Fall beiseite, weil uns insbesondere auch die topologische Verschiedenheit von L_n' und L_n beschäftigt, während L_2' und L_2 ineinander überführbar sind). Im Bereich $31 \leqq n \leqq 50$ für alle n ausgenommen die 8 Werte 32, 34, 36, 37, 41, 45, 49, 50; im Bereich $981 \leqq n \leqq 1000$ für alle n ausgenommen die 2 Werte $n = 981 = 3^2 \cdot 109$ und 997 (prim) und im Bereich $1931 \leqq n \leqq 1950$ für alle n ausgenommen die 4 Werte 1933 (prim), $1936 = 44^2$, $1945 = 5 \cdot 389$ und 1949 (prim). Sieht man von diesen Ausnahmewerten ab, so ergeben die obigen Sätze für die Mehrheit der übrigen Zahlen n außerdem die Nichtüberführbarkeit von L_n in das Spiegelbild L_n'; u. zw. bilden hierbei in den genannten Bereichen eine Ausnahme nur die Werte $n = 10$, bzw. 40, bzw. $985 = 5 \cdot 197$, $986 = 2 \cdot 17 \cdot 29$ und 1000 bzw. $1937 = 13 \cdot 149$ und $1940 = 2^2 \cdot 5 \cdot 97$; die topologische Verschiedenheit der beiden Linienfiguren L_n und L_n' ist also auf die angegebene Weise feststellbar für jeweils 10, bzw. 11, bzw. 15 bzw. 14 von den zwanzig Werten des betrachteten Bereiches.

---

[12] In dem summarischen Bericht auf S. 14* dieser Sitz.Ber. ist dementsprechend die Stelle „Für.....f, oder für $-f$" so zu verstehen, daß p für genau eine der beiden Formen f, $-f$ singulär ist, für die andere nicht.

Doch soll nicht weiter eingegangen werden auf die Frage der asymptotischen Häufigkeit der Zahlen, in denen wenigstens eine Primzahl von der Gestalt $4k + 3$ in ungerader höchster Potenz aufgeht (oder aber andernfalls wenigsten eine ungerade Primzahl $p = 4k + 1$ in ungerader höchster Potenz $p^{2\tau+1}$ in n aufgeht und $n : p^{2\tau+1}$ quadratischer Nichtrest mod. p ist).

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1942

Band/Volume: 1942

Autor(en)/Author(s): Tietze Heinrich

Artikel/Article: Bemerkungen über verknotete und verkettete Linien. Über die speziellen Simony-Knoten und Simony-Ketten 53-62