Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1943

München 1944
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Über gewisse Umordnungen von Permutationen III.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 12. November 1943.

1. In zwei früheren Noten[1] wurde ein Verfahren besprochen, durch das eine Permutation P von $N = n_1 + \ldots + n_f$ in f Kategorien eingeteilter Elemente eine bestimmte Umordnung erfährt; und es wurde die Folge von Permutationen

$$P^0 = P,\ P^1,\ P^2,\ \ldots,\ P^\nu,\ \ldots. \tag{1}$$

betrachtet, die durch fortgesetzte Wiederholung des Umordnungs-Verfahrens entsteht. Auf Entwicklungen, die an anderer Stelle[2] ausgeführt sind, stützt sich dann das in Note II, § 7, Nr. **24–26** angegebene Kriterium, um von P oder einer geeignet ausgewählten Permutation der Folge (1) zu entscheiden, ob sie „stationär" (vgl. Note I, Nr. **5**), genauer gesagt, ob sie „stabil" ist.[3]

Dieses Stabilitäts-Kriterium soll im folgenden § 1 an einigen Beispielen demonstriert werden (Nr. **2–6**). Zum Schluß wird in § 2 auf gewisse Wahrscheinlichkeitsfragen hingewiesen und es werden einem — freilich beschränkten — Material von Einzelfällen entnommene Zahlenangaben gemacht über die Werte der

---

[1] Vorgelegt am 4. Juni und 9. Juli 1943; s. diese Sitz. Ber. S. 131–134 und S. 135–148. Auf diese Noten, die wir kurz als „Note I" und „Note II" zitieren werden, sei wegen der verschiedenen auftretenden Begriffsbildungen und Bezeichnungen verwiesen.

[2] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 53, Jahrgg. 1943, Heft 2, S. 147–182 und Heft 3, (noch nicht erschienen). Vgl. dort insbesondere § 7, Stabilitätskriterium.

[3] Denn jede stationäre Permutation P ist (vgl. Note I) entweder stabil oder abgeschlossen. Für die Abgeschlossenheit aber, die unmittelbar erkennbar ist (es ist $v(P) = f$, alle vollständigen Verbände von P sind maximal), bedarf es keines besonderen Kriteriums.

mit einer Folge (1) zusammenhängenden Funktionen $v(P)$, $\omega(P)$, $\varepsilon(P)$, $\pi(P)$, $\zeta_1(P)$, $\zeta_2(P)$, $\zeta_3(P)$, $\zeta(P)$ (Nr. **7**).

§ 1. Anwendnngen des Stabilitäts-Kriteriums.

2. Wir betrachten das an anderer Stelle[4] angeführte Beispiel mit $f = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 13$, in welchem die betrachtete Permutation[5] P gegeben ist durch[6]

$$P = \sum_{\nu=0}^{11} F^{\nu} + R$$

mit

$$F = F^0 = [d_6 a_6 b_{13,12} c_{12}], \quad F^1 = [d_{13} c_{13} b_1 c_1],$$
$$F^{\nu} = (d_{\eta(\nu)} a_{\eta(\nu)} b_{\nu} c_{\nu}] \text{ für } 2 \leqq \nu \leqq 11, \quad R = [d_{12} a_{13,12}],$$

dabei $\eta(\nu) = \frac{1}{2}(\nu - 1)$ bzw. $\frac{1}{2}\nu + 6$ für ungerades bzw. gerades $\nu \geqq 2$. Zugleich mit jedem Fundamentalblock $F^{\nu} = F(P^{\nu})$ betrachten wir auch die zugehörige „Auslage"[7] $\mathfrak{L}^{\nu} = \mathfrak{L}(F^{\nu})$. Wie l. c.[4] angegeben, stellt sich bei keiner der ersten 144 Auslagen $\mathfrak{L}^{\nu}$ für $0 \leqq \nu \leqq 143$ ein „Zusammenschluß" ein, insbesondere also kein „auffälliger" (= Zusammenschluß erster Art; vgl. l. c.[2]),

---

[4] Vgl. l. c.[2], Nr. **41**, S. 182 nebst den zugehörigen Berichtigungen in Nr. **80**, Anm. 134.

[5] Statt von einer „Permutation" wird l. c.[4] (im Hinblick auf die Herkunft der Fragestellung) von einem (maximalen) „Block" gesprochen.

[6] Wie l. c.[2] Formel (14), Nr. **11**, S. 155 schreiben wir beispielsweise $b_{13,12}$ für die beiden aufeinanderfolgenden Elemente b_{13}, b_{12} und analog allgemein $a^{(i)}_{\beta,\beta-s+1}$ für die s Elemente $a^{(i)}_{\beta}$, $a^{(i)}_{\beta-1}$, ..., $a^{(i)}_{\beta-s+1}$, wenn sie in dieser Anordnung aufeinander folgen.

[7] Wenn $V^*_1, \ldots, V^*_l$ so, wie in Note II, § 3, Nr. **7**, die den einzelnen „Linien" eines Blocks A entsprechenden Verbände sind (angeordnet in der Reihenfolge, in der ihre Anfangselemente in A auftreten), dann werde

$$\mathfrak{L}(A) = \{V^*_1, \ldots, V^*_l\}$$

gesetzt. Es steht $\mathfrak{L}(A)$ in engem Zusammenhang mit dem l. c. definierten, zu A gehörigen „Linienblock"

$$L(A) = \sum_{\lambda=1}^{l} V^*_{\lambda} = [V^*_1, \ldots, V^*_l];$$

und der Unterschied zwischen beiden Begriffen besteht nur darin, daß es in der Auslage $\mathfrak{L}(A)$ genau auf die l Plätze ankommt, auf denen die einzelnen V^*_{λ} auftreten, während im Block $L(A)$ nur die Reihenfolge wesentlich ist, in

§ 4, Nr. **47** und Schluß von Nr. **49**). Wir wählen $b_{12} = y$ als Leitelement und wollen annehmen, daß bei Ausführung der successiven Umwandlungs-Manöver alsbald, — etwa bereits nach 12 Auslagen, — d.i. bei der ersten Wiederkehr des Elements b_{12} in der Auslage

$$\mathfrak{L}^{12} = \{d_{12} a_{13, 12} c_{12} b_{13, 12}\} \tag{2}$$

— die Feststellung vorgenommen werden soll, ob für die nunmehr gewonnene Permutation

$$\begin{aligned} A = P^{12} = R + \sum_{\alpha=0}^{11} K(F^{\alpha}) = \\ = [d_{12} a_{13, 12} c_{12} b_{13, 12} a_6 d_6] + \sum_{\alpha=1}^{11} K(F^{\alpha}) \end{aligned} \tag{3}$$

sich in der zugehörigen Folge $A, A^1, A^2, \ldots$ (und damit ebenso in der Folge (1)) schließlich eine stabile Permutation einstellt oder nicht. Wir beginnen bei (2) mit einer neuen Numerierung der Auslagen[8] und geben dementsprechend der Auslage (2) etwa die Bezeichnung $\mathfrak{L}_*^0 = \mathfrak{L}(A)$ und die Lage-Nummer $\nu_0 = 0$; die zugehörige Platz-Nummer t_0 von y in (2) ist dann offenbar

$$t_0 = 4,$$

da der y enthaltende Verband $Y = b_{13, 12}$ in (2) an 4-ter Stelle steht. Wird nun das Umordnungs-Verfahren fortgesetzt, so zeigt sich: Nach weiteren 12 Umordnungen erscheint $y = b_{12}$ das nächstemal wieder in der zum Fundamentalblock $F^{12}(A)$ gehörenden Auslage $\mathfrak{L}_*^{12} = \{a_5 d_5 b_{13, 12} c_{12}\}$ und das übernächstemal in $F^{24}(A)$ und $\mathfrak{L}_*^{24} = \{d_{11} a_{11} c_{12} b_{13, 12}\}$. Das gibt die Lage-Nummern $\nu_1 = 12$, $\nu_2 = 24$, die Platz-Nummern $t_1 = 3$, $t_2 = 4$, die

---

der die einzelnen Elemente in $L(A)$ auftreten, sodaß etwa für $A = [b_1\, a_9\, a_7\, a_8\, b_7\, a_6\, a_5]$ ohneweiteres statt $L(A) = [b_1\, a_{9,\,8}\, a_{7,\,5}\, b_7]$ auch $L(A) = [b_1 a_{9,5} b_7]$ geschrieben werden kann, während die Auslage $\mathfrak{L}(A) = \{b_1\, a_{9,\,8}\, a_{7,\,5}\, b_7\}$ durchaus zu unterscheiden ist von der Auslage $\mathfrak{L}(B) = \{b_1\, a_{9,\,5}\, b_7\}$, die sich z. B. für $B = b_1\, a_{9,\,8}\, b_7\, a_{7,\,5}]$ ergäbe. Es kann also sehr wohl $\mathfrak{L}(A) \neq \mathfrak{L}(B)$ und doch $L(A) = L(B)$ sein; vgl. l. c.[2], § 2, Nr. **20**, **21** und die dortige Anm. 34. Wie dort ausgeführt (vgl. l. c. § 1, Nr. **7** und § 7, Nr. **76** ff.), hat gerade die Frage nach einem *nur aus den Auslagen* $\mathfrak{L}^{\nu} = \mathfrak{L}(F^{\nu})$ *entnehmbaren* Stabilitäts-Kriterium den Anstoß zu den ganzen Entwicklungen gegeben.

[8] Vgl. Note II, S. 145, Nr. **23**, Anm. 21.

Unterschiede $u_0 = \nu_1 - \nu_0 = 12$, $u_1 = \nu_2 - \nu_1 = 12$ und die gemäß Formel (30), Note II, Nr. **12**, S. 139 (oder l. c.[2]) Formel (181), Nr. **75**, bzw. (182), (183), Nr. **77**) gebildeten Zahlen

$$\tau_0(y) = 4(u_0 - 1) + (t_0 + t_1 - 1) = 50,$$
$$\tau_1(y) = 4(u_1 - 1) + (t_1 + t_2 - 1) = 50.$$

Ihr übereinstimmender[9] Wert liefert uns gemäß Formel (31), Note II (bzw. l. c.[2]) Nr. **77**, Formel (184)) die Anzahl m der vollständigen Verbände von $A^{\nu_1} = A^{12}$: es ist $m = v(A^{12}) = 50$, demnach gemäß (32), Note II (bzw. l. c.[2], (132), Nr. **63**)

$$q = 12, \; r = 2$$

und gemäß Note II, Nr. **14** (bzw. l. c.[2]), Nr. **66**)

$$\pi(m) = \pi(50) = 2q(q+1) = 312$$

(d. i. der l. c.[2] im Zusatz zu Nr. **80** für $f = 4$, $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 13$ angegebene Maximalwert). Da $t_0 + t_1 = t_1 + t_2 = 7 > f\,(= 4)$ ist, so muß, falls A stabil sein sollte, gemäß Note II, Nr. **20**, Satz (E) bzw. l. c.[2], Nr. **75**) das Element y zu den „Blocks D_α" gehören. Die Stabilität von A angenommen, müßten also die weiteren Lage-Nummern gemäß Note II, Nr. **26** (bzw. l. c.[2], (148), Nr. **64**) die konstante Differenz $q = 12$ aufweisen, demnach die l. c. mit $\nu_{k^*} = \nu_k + \pi(m)$ bezeichnete Lage-Nummer sich für $k^* = k + \dfrac{\pi(m)}{q} = k + 26$ ergeben. Wenn wir also unser Kriterium nach dem in Note II, Nr. **26** besprochenen „zweiten Modus" weiterführen,[10] dann betrachten wir nur die Teilfolge derjenigen Fundamentalblocks $F^\nu(A)$ nebst den zugehörigen Auslagen $\mathfrak{L}^\nu(A) = \mathfrak{L}^\nu_*$, in denen $y = b_{12}$ auftritt; wir geben diesen Auslagen

$$\begin{gathered}\{d_{12}a_{13,12}c_{12}b_{13,12}\},\; \{a_5d_5b_{13,12}c_{12}\},\; \{d_{11}a_{11}c_{12}b_{13,12}\},\\ \{a_4d_4b_{13,12}c_{12}\},\; \ldots\end{gathered} \tag{4}$$

---

[9] Wäre $\tau_1(y) \neq \tau_0(y)$ ausgefallen, so wäre damit bereits die Frage, ob A stabil sei, in negativem Sinn beantwortet.

[10] Dieser zweite Modus entspricht der l. c.[2], Nr. **80** unter (ST) gegebenen Form des Kriteriums. Wegen des ersten Modus vgl. die folgende Nr. **3**.

die Nummern 0, 1, 2, 3, ... und setzen das Umordnungsverfahren fort, bis wir zu denjenigen Auslagen kommen, die in dieser Teilfolge die Nummern 26, 27, 28 haben. Dies natürlich nur, soferne nicht schon früher durch das Erscheinen eines Zusammenschlusses sich A als nicht-stabil erweist. Eben dieser letztere Fall tritt nun in unserem Beispiel ein. Denn bereits bei derjenigen Auslage, die in der Folge (4) die Nummer 12 hat und zum Fundamentalblock

$$[c_{13} d_{13} b_{13,12} c_{12} a_7] = \Phi \tag{5}$$

gehört, tritt ein Zusammenschluß erster Art ein, da c_{13}, c_{12} eine vollständige Linie bilden, so daß

$$\mathfrak{L}(\Phi) = \{c_{13,12} d_{13} b_{13,12} a_7\} \tag{6}$$

und $K(\Phi) = [a_7 b_{13,12} d_{13} c_{13,12}]$ wird[11].

3. Wie in Note II, Nr. **24–26**, ausgeführt, unterscheidet sich bei Anwendung des Stabilitäts-Kriteriums der „erste Modus" von dem eben angewendeten „zweiten Modus" nur dadurch, daß wir, beginnend mit der durch (2) gegebenen Auslage $\mathfrak{L}_*^0$, die die neue Nummer $\nu_0 = 0$ bekam, alle weiteren Auslagen (also nicht nur jene, in denen $y = b_{12}$ auftritt,) fortlaufend numerieren und daß wir (soferne nicht vorher ein Zusammenschluß in Erscheinung tritt) die successiven Umwandlungs-Manöver so lange fortsetzen, bis wir zu den Auslagen mit den Nummern $\nu_0 + \pi(m)$, $\nu_1 + \pi(m)$, $\nu_2 + \pi(m)$, d. i. 312, 324, 336 kommen. Tatsächlich tritt in unserem Beispiel ein Zusammenschluß (erster Art) schon früher auf (woraus die Instabilität von A erkennbar wird), nämlich bei dem Fundamentalblock (5) und der zugehörigen Auslage (6); nur daß diese Auslage jetzt — beim ersten Modus — die Nummer 144 erhält, während sie in der beim zweiten Modus betrachteten Teilfolge von Auslagen die Nummer 12 hatte.[12]

---

[11] Es ist als unwesentlich und zufällig zu bezeichnen, daß dieser Zusammenschluß gerade bei einem das Element y enthaltenden Fundamentalblock sich einstellt. Ganz ebensogut kann es vorkommen, daß ein Block A sich dadurch als instabil erweist, daß im Laufe der betrachteten Umordnungen bei einem y nicht enthaltenden Fundamentalblock ein Zusammenschluß eintritt.

[12] Neben dem ersten Modus wurde der zweite gerade wegen dieser Ersparnis an Zählarbeit eingeführt, wobei aber zu sagen ist, daß diese Ersparnis nur im Falle $r > 0$ von Belang ist.

4. Nach der in Nr. **2** gemachten Feststellung, daß die Permutation (3) nicht stationär (also nicht stabil) ist, entsteht die Frage, wie es um die Folge (1) bei Weiterführung des Verfahrens bestellt ist. Da zeigt sich, daß auf den einen bei der Auslage (6) auftretenden Zusammenschluß vorerst wieder durch längere Zeit keine weiteren Zusammenschlüsse — zumindest keine erster Art — folgen, sodaß man etwa schon bei der nächsten Wiederkehr des Leitelements $y = b_{12}$, d. i. bei

$$F^{156}(P) = (a_6 a_7 b_{13,12} d_{13}] \tag{7}$$

mit der neuerlichen Anwendung unseres Kriteriums zwecks Prüfung, ob P^{156} oder eine geeignet gewählte unter den Permutationen P^{157}, P^{158}, . . . stabil sei,[13] beginnen könnte.[14] Doch würde sich in ähnlicher Weise, wie in Nr. **2** bzw. **3**, schließlich doch die Instabilität von $P^{156} = B$ ergeben, zumal bei $P^{288} = [d_{13,12} b_{13,12} a_{12} d_{11} b_1]$ mit $\mathfrak{L}^{288} = \{d_{13,11} b_{13,12} a_{12} b_1\}$ wieder ein Zusammenschluß 1. Art auftritt. Doch mögen diese, sowie weitere lange zusammenschlußlose Pausen übergangen werden (so von $\mathfrak{L}^{346}$ bis $\mathfrak{L}^{444}$, von $\mathfrak{L}^{488}$ bis $\mathfrak{L}^{555}$) und in Nr. **5** sogleich die Permutation $P^{699} = C$ untersucht werden, die sich nach einem bei $\mathfrak{L}^{698}$ eintretenden Zusammenschluß 1. Art ergibt.

5. Die eben erwähnte Permutation C ist gegeben durch $C = \sum_{\alpha=0}^{3}{}' F^\alpha$ mit[15]

$$F^0 = [b_{4,3} c_8 b_9 a_{3,1}], \qquad F^1 = b_{13,10} c_1 b_{2,1} a_5],$$
$$F^2 = [b_{7,5} c_{13,9} a_4 a_{13,12}], \qquad F^3 = [b_8 c_{7,2} a_{11,6} d_{13,1}].$$

---

[13] Wird $P^{156} = B$ gesetzt, so liefert das „schriftliche Verfahren" (vgl. Anm. 16) für B den Ausdruck $B = F^{156} + \sum_{\nu=1}^{12}{}' F^\nu(B) + [d_{12}]$, wobei F^{156} durch (7) und $F^\nu(B)$ durch $F^\nu(B) = [d_{\eta(\nu)} a_{\eta(\nu)+1} c_\nu b_\nu]$ $(1 \leqq \nu \leqq 11)$ gegeben wird (wegen $\eta(\nu)$ vgl. Nr. **2**), soferne man hierin $d_{\eta(1)}$ bzw. $a_{\eta(10)}$ bzw. $a_{\eta(11)}$ durch $c_{13,12}$ bzw. $a_{13,12}$ bzw. d_6 ersetzt.

[14] Allerdings tritt, wie aus (7) ersichtlich ist, im Anschluß an $\mathfrak{L}^{156}$ (übrigens analog anschließend an $\mathfrak{L}^{167}$ und $\mathfrak{L}^{168}$) ein Zusammenschluß zweiter Art von a_7 mit a_6 (bzw. d_6 mit d_5 und d_{13} mit d_{12}) ein, nachher aber lange überhaupt kein Zusammenschluß mehr.

[15] Daß dabei die $F^\alpha (0 \leqq \alpha \leqq 3)$ die ersten vier Fundamentalblocks $F^\alpha(C) = F(C^\alpha)$ von C sind, erkennt man für $0 \leqq \alpha \leqq 2$ unmittelbar. Für $\alpha = 3$, wo

Wir wählen $a_1 = z$ als Leitelement und erhalten:

$$\nu_0 = 0,\ t_0 = 4;$$

hierauf, da sich $z = a_1$ erstmals wieder in $F^4 = [a_{3,1} b_9 c_8 b_{4,3}]$ und dann in $F^8 (= F^0)$ einstellt,[16]

$$\nu_1 = 4,\ \nu_2 = 8, \qquad t_1 = 1,\ t_2 = 4,$$

nebst $u_0 = u_1 = 4$ und $\tau_0(z) = \tau_1(z) = 16$. Analog wie in Nr. **2** erhält man damit gemäß Note II, Formel (31) die Anzahl $m = v(C^{\nu_1}) = v(C^4) = 16$, somit $q = 4$, $r = 0$ und gemäß Note II, Nr. **14**

$$\pi(m) = \pi(16) = 2q = 8.$$

Wie bereits in Nr. **3**, Anm. 12 erwähnt, empfiehlt sich bei $r = 0$ (und kleineren Werten von q) der in Note II, Nr. **25** besprochene „erste Modus" des Stabilitäts-Kriteriums.[17] Demgemäß haben wir das Umwandlungs-Verfahren fortzusetzen, bis wir zu den Fundamentalblocks $F^\nu(C)$ mit den Nummern $\nu_{k^*-1} = \nu_0 + \pi(m) = 8$, $\nu_{k^*} = \nu_1 + \pi(m) = 12$, $\nu_{k^*+1} = \nu_2 + \pi(m) = 16$ ge-

---

bekanntlich eine gewisse Vorsicht geboten ist (vgl. l. c.[2]), Nr. **36**, S. 176, Anm. 56 und Nr. **38**, S. 178, Anm. 60), ergibt es sich aber aus der Betrachtung von $C^3 = F^3 + \sum_{\alpha=0}^{2} K(F^\alpha) = [b_8 c_{7,2} a_{11,6} d_{13,1} a_{3,1} \ldots]$.

[16] Man beachte, daß das „schriftliche Verfahren" (vgl. l. c.[2], § 3, insbesondere Nr. **35–38**, sowie Nr. **77**, Anm. 131) ohneweiteres zur Feststellung $F^{\nu+8}(C) = F^\nu(C)$ und damit zu $C^{\nu+8} = C^\nu$ für $\nu \geqq 0$ führt, daß aber im Hinblick auf die in Anm. 24 erwähnte Praxis allein aus Lage- und Platz-Nummern Stabilität oder Instabilität festgestellt werden soll.

[17] Wollte man wie in Nr. **2** den „zweiten Modus" anwenden, so ergäbe sich zunächst — wie auch aus $t_0 + t_1 = t_1 + t_2 = 5 > f$ gemäß Satz (E), Note II, Nr. **20** erhellt, — daß, falls C stabil sein sollte, das Element z zu den Blocks D_α gehört, da ja wegen $r = 0$ die Blocks C_α überhaupt entfallen. Man erhielte daraus, die Stabilität von C angenommen, die Zahl $q = 4$ als konstante Differenz der Lage-Nummern $\nu_k, \nu_{k+1}, \ldots$ des Elements z; für $\nu_{k^*} = \nu_k + \pi(m)$ ergibt sich daraus $k^* = k + \frac{\pi(m)}{q} = k + 2$, d. h. daß in der Folge $\mathfrak{T}(z)$ der das Element $z = a_1$ enthaltenden Auslagen $\mathfrak{L}^\nu(C)$ außer den drei zuerst betrachteten (mit $\nu = \nu_0, \nu_1, \nu_2$) noch jene drei heranzuziehen sind, die in der Folge $\mathfrak{T}(z)$ um $k^* - k = 2$ weiterliegen. Man kommt so, wie sich ergibt, genau zu denselben insgesamt fünf Auslagen, die im Text nach dem ersten Modus gewonnen sind.

langen. Da $\nu_{k^*-1} = 8 = \nu_2$ ist, haben wir es insgesamt nur mit den fünf[18] Fundamentalblocks $F^\nu(C)$ zu tun, die zu $\nu = 0, 4, 8, 12, 16$ gehören, wobei die Durchführung der Umordnungs-Manöver zeigt, daß die zugehörigen Auslagen abwechselnd $\{b_{4,3} c_8 b_9 a_{3,1}\}$ und $\{a_{3,1} b_9 c_8 b_{4,3}\}$ sind, also die Platz-Nummer t_k von $z = a_1$ abwechselnd 4 und 1. Aus

$$\nu_2 = 8,\ \nu_3 = 12,\ \nu_4 = 16,\ t_2 = 4,\ t_3 = 1,\ t_4 = 4,\ u_2 = u_3 = 4$$

erhält man $\tau_2(z) = \tau_3(z) = 16$, also $m^* = v(C^{\nu_{k^*}}) = v(C^{12}) = 16$. Man erhält somit $m^* = m$, d. h. $v(C^{12}) = v(C^4)$ oder $v(C^{4+\pi(m)}) = v(C^4)$. Damit aber ist (vgl. Note II, Nr. **25**) sichergestellt, daß C^4 stationär ist. Da aber C^4 wegen $v(C^4) > f$ nicht abgeschlossen ist, so ist C^4 stabil.

Die Folge $C, C^1, C^2, \ldots$ (und mit ihr die Folge (1) für die in Nr. **2** eingeführte Permutation P) führt also schließlich nicht auf abgeschlossene, sondern auf stabile Permutationen.[19]

6. Die Bildung der Permutation C von Nr. **5** geht letzten Endes auf jene der Permutation P von Nr. **2**, also auf ein in besonderer Weise konstruiertes Beispiel zurück.[20] Um auch ein durch freien Zufall (planloses Mischen) entstandenes Beispiel zu bringen,[21] sei die Permutation $Q = \sum_{\nu=0}^{11} F^\nu + R$ angeführt, wenn

$$\begin{array}{lll}
F^0 = [c_{13} d_{13} d_{11} c_8], & F^1 = [d_{10} c_4 a_4 a_5], & F^2 = [d_6 a_7 b_{12} c_{19}], \\
F^3 = [b_{13} a_{13} b_8 c_6], & F^4 = [b_6 c_2 c_7 a_6], & F^5 = [c_5 c_1 d_5 c_{12}], \\
F^6 = [b_4 b_2 a_{9,8} b_7], & F^7 = [d_1 d_9 d_2 d_{12}], & F^8 = [a_{10} b_{11} d_3 b_9], \\
F^9 = [a_{12} c_{11} a_{2,1} b_5 a_{11}], & F^{10} = [d_7 b_3 b_1 c_{13}], & F^{11} = [d_4 b_{10} d_8 c_{10}], \\
R = [a_3] & &
\end{array}$$

ist. Hier treten bei Ausführung der successiven Umwandlungs-Manöver 8 Zusammenschlüsse 1. Art (die letzten beiden bei $F^{60}(Q) = [c_2 b_6 c_6 d_5 c_1 c_5]$, $\mathfrak{L}^{60} = \{c_{2,1} b_6 c_{6,5} d_5\}$) auf, sowie 2 Zu-

---

[18] Vgl. den Schluß von Nr. **80**, l. c.[2].

[19] Man erhält dabei (über $\omega(P)$ vgl. Note I, § 2, Nr. **4**, S. 133, Formel (10), bzw. l. c.[2], § 6, Formel (122), Nr. **58**) $\omega(C) = \omega(P) = 16$. Das „schriftliche Verfahren" zeigt zugleich, daß bereits $C = P^{699}$ stabil ist, u. zw. als erste Permutation der Folge (1), wobei sich $P^{\nu+\rho} = P^\nu$ für $\nu \geqq 699$ und mit 8 als kleinstem Wert für ρ, also $\varepsilon(P) = 699$, $\pi(P) = 8$ ergibt.

[20] Vgl. l. c.[2], Nr. **39**, S. 179, Anm. 62.

[21] Ein solches wäre auch das l. c.[20] in Nr. **39** behandelte Beispiel.

sammenschlüsse 2. Art, der letzte beim Übergang von $F^{57} = [c_{4,3} a_3 c_8 c_9]$ zu $K(F^{57}) = [c_{9,8} a_3 c_{4,3}]$, der dann bei $F^{67} = [d_{13} c_9 c_8 a_3 c_{4,3}]$ in der Auslage $\mathfrak{L}^{67} = \{d_{13} c_{9,8} a_3 c_{4,3}\}$ wirksam wird. Weiterhin treten keine Zusammenschlüsse in Erscheinung und die Anwendung unseres Stabilitäts-Kriteriums etwa auf die Permutation Q^{61} (wobei $F^{61} = [a_6 a_{9,8} b_2 b_4]$ ist), z. B. mit dem Leitelement $y = b_2$, führt auf $m = v(Q^{61}) = 40$, $q = 10$, $r = 0$, $\pi(m) = 2q = 20$. Wie in Nr. **5** gewinnt man aus 5 aufeinanderfolgenden y enthaltenden Auslagen den Nachweis der Stabilität von $(Q^{61})^{10} = Q^{71}$ (Diese Auslagen haben in der Folge a l l e r Auslagen Q^{ν} die konstanten Lagenummern-Unterschiede 10, wobei die Platznummern von $y = b_2$ abwechselnd 3 und 2 sind[22]).

§ 2. Statistisches.

7. An anderer Stelle[23] wurde hingewiesen auf gewisse Wahrscheinlichkeitsfragen, insbesondere bezüglich der Werte einiger mit einer Permutation P und der zugehörigen Folge (1) verknüpfter Funktionen. Aus einer — verglichen mit der Gesamtanzahl $(= N!)$ aller möglichen Fälle freilich sehr geringen — Anzahl von Beispielen mag immerhin ein wenigstens beiläufiges Bild über diese Werte gewonnen werden. Es sind dabei außer dem üblichen Fall

I) $f = 4$, alle $n_i = 13$, $N = 52$ (wie l. c. [2], Nr. **39–41**)

noch die Fälle

II) $f = 4$, alle $n_i = 4$, $N = 16$ (wie l. c.[2], Nr. **34–37**)

und

III) $f = 2$, $n_1 = n_2 = 13$, $N = 26$

gewählt und für jeden dieser Fälle zehn durch planloses Mischen erhaltene Beispiele vorgenommen worden.[24] In der folgenden Zu-

---

[22] Das „schriftliche Verfahren" liefert $F^{\nu+20} = F^{\nu}$ und daher $Q^{\nu+20} = Q^{\nu}$ für $\nu \geqq 61$, wobei sich $\pi(Q) = 20$, $\varepsilon(Q) = 61$, $\omega(Q) = 40$ ergibt.

[23] Siehe l. c.[2], Nr. **81**. Ein näheres Eingehen auf gewisse dieser Fragen, vorerst im Falle $f = 1$, sei einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

[24] Natürlich wurde für die Durchrechnung das „schriftliche Verfahren" (vgl. l. c.[2], Nr. **38**, sowie ebenda Nr. **36**, Anm. 56) angewendet, da ja die gemäß l. c.[2], § 1 ausgeführte Praxis manche Funktionen (z. B. die Anzahl ζ_3

sammenstellung bedeutet dann z. B. $\omega(4 \mid 29{,}6 \mid 48)$, daß 4 der kleinste, 48 der größte Wert $\omega(P)$ und 29,6 das arithmetische Mittel der Werte von $\omega(P)$ ist, die in den 10 gerechneten Beispielen der betrachteten Gruppe sich ergaben.

I) Für $f = 4$, alle $n = 13$ ergab sich: $v(50 \mid 51 \mid 52)$, $\omega(4 \mid 29{,}6 \mid 48)$, $\varepsilon(27 \mid 127{,}8 \mid 189)$, $\pi(2 \mid 14{,}8 \mid 24)$, $\zeta_1(3 \mid 13{,}7 \mid 28)$, $\zeta_2\ (0 \mid 4 \mid 9)$, $\zeta_3(0 \mid 3{,}7 \mid 10)$, $\zeta(3 \mid 21{,}4 \mid 47)$.

II) Für $f = 4$, alle $n = 4$ dagegen: $v(15 \mid 15{,}7 \mid 16)$, $\omega(4 \mid 4 \mid 4)$, $\varepsilon(8 \mid 11{,}4 \mid 16)$, $\pi(2 \mid 2 \mid 2)$, $\zeta_1(5 \mid 8{,}4 \mid 11)$, $\zeta_2(0 \mid 2{,}1 \mid 6)$, $\zeta_3(0 \mid 1{,}2 \mid 2)$, $\zeta(11 \mid 11{,}7 \mid 12)$.

III) Endlich für $f = 2$, $n_1 = n_2 = 13$ die Werte: $v(23 \mid 24{,}9 \mid 26)$, $\omega(12 \mid 19{,}8 \mid 26)$, $\varepsilon(0 \mid 47{,}4 \mid 189)$, $\pi(12 \mid 19{,}8 \mid 26)$, $\zeta_1(0 \mid 0{,}5 \mid 2)$, $\zeta_2(0 \mid 1{,}9 \mid 5)$, $\zeta_3(0 \mid 2{,}7 \mid 9)$, $\zeta(0 \mid 5{,}1 \mid 14)$.

Bemerkenswert ist die geringe Schwankung in den Werten von $v(P)$, dagegen die ziemlich großen von den übrigen Funktionen, ausgenommen von ω, π und ζ in der Gruppe II, wo in allen 10 Fällen sich $\omega(P) = f$ ergab, was in Gruppe III gar nicht, in Gruppe I nur einmal vorkam — als Zeichen der Seltenheit „gelingender Blocks" im üblichen Fall (vgl. l. c.[2], Nr. **58** und **7a**). Für das Zustandekommen dieses Ergebnisses erweist sich also, wie natürlich, die Abnahme der n_i bei gleichem f als günstig, die Abnahme von f bei gleichen n_i als ungünstig.[25]

Berichtigungen

zur Note „Über gewisse Umordnungen von Permutationen II" diese Sitz.-Ber., S. 135–148.

In Nr. **15**, S. 141, Zeile 9 ist nach „ferner die Vorzeichen $\gamma = \pm 1$, $\delta = \pm 1$ unabhängig gewählt werden" einzuschalten:

„jedoch so, daß γ bzw. δ gleich $(-1)^{\lambda - \mu}$ ist, je nachdem q gerade oder ungerade ist",

---

der „versteckten" Zusammenschlüsse) gar nicht zu bestimmen gestattet, wenn sie auch vorteilhaft angewendet wird zur nachträglichen Kontrolle des schriftlichen Verfahrens, bei dem Versehen erfahrungsgemäß (vgl. l. c.[2], Nr. **80**, Anm. 134) leicht vorkommen.

[25] Sei noch darauf hingewiesen, daß in allen Fällen aller drei Gruppen die schließlich in der Folge (1) sich einstellende stationäre Permutation eine durch f teilbare Anzahl $\omega(P)$ von vollständigen Verbänden aufweist — im Einklang mit einer l. c.[2] (im Zusatz zu Nr. **80**) gemachten Bemerkung über die Unwahrscheinlichkeit anderer Werte von $\omega(P)$.

In Nr. **16**, S. 142, Zeile 8 ist zwischen „2)" und „kein vollständiger Verband" einzuschalten:

„a) bei ungeradem q:"

In Nr. **16**, S. 142, Zeile 10 ist nach „benachbart;" einzuschalten:

„b) bei geradem q ist einem vollständigen Verband eines D_μ kein vollständiger Verband von unten benachbart, der in einem C_λ mit $\lambda \equiv \mu + 1$ (mod. 2) an erster Stelle oder in einem C_λ mit $\lambda \equiv \mu$ (mod. 2) an letzter Stelle steht;"