Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Über real – statt formal – festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse.

Von Heinrich Tietze in München.

Vorgelegt am 26. Januar 1945.

1. Der klassische Algorithmus von Euklid ist – neben seiner Bedeutung für die Lehre vom größten gemeinsamen Teiler zweier positiver ganzer Zahlen a, b und damit für den Satz von der Eindeutigkeit der Primfaktorenzerlegung[1] – bekanntlich ausdehnbar auf die Ermittlung rationaler Annäherungswerte an eine Zahl γ; u. zw. nicht nur in dem Fall, daß $\gamma \left(= \frac{a}{b}\right)$ rational, sondern auch dann, wenn γ irrational ist, der entstehende Kettenbruch also ein unendlicher wird. Verallgemeinerungen dieses Algorithmus zur Ermittlung rationaler Approximationen an ein n-gliedriges Verhältnis positiver Zahlen

$$a_1 : a_2 : \ldots : a_n, \tag{1}$$

die für $n = 2$ in das Euklid'sche Verfahren übergehen, können nach verschiedenen Gesichtspunkten aufgebaut werden. Es kann nämlich bei den einzelnen Schritten, die von (1) ausgehend fort-

[1] Nicht alle Mathematik-historischen Darstellungen lassen bei Besprechung der Bücher VII–IX von Euklid's Elementen hervortreten, daß der Euklidische Algorithmus ein wesentliches Hilfsmittel schafft, um den Satz von der eindeutigen Primfaktorenzerlegung zu begründen, und damit geeignet ist, einen wichtigen Bestandteil der Teilbarkeitslehre zu bilden, keineswegs nur ein rechnerisches Hilfsmittel zur Ermittlung des größten gemeinsamen Teilers. Man vgl. hierzu insbesondere Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., 1894, Erster Abschnitt, § 4; analog L. E. Dickson, Einführung in die Zahlentheorie, deutsche Ausgabe von E. Bodewig, 1931, Nr. 1. – Etwas anders (unter Heranziehung einer Schlußweise von Zermelo) verfährt A. Scholz, Einführung in die Zahlentheorie, 1939, Sammlung Göschen, Bd. 1131; und Hecke, Vorlesungen über die Theorie der algebraischen Zahlen, 1923, Kap. I, Elemente der rationalen Zahlentheorie, § 1, geht unmittelbar von der Existenz eines größten unter den gemeinsamen Teilern zweier Zahlen aus.

gesetzt zu neuen Systemen von n (oder in besonderen Fällen von weniger als n) Zahlen

$$a_1^{(\lambda)},\ a_2^{(\lambda)},\ \ldots,\ a_n^{(\lambda)} \tag{2}$$

führen, entweder fortlaufend auf diejenige Anordnung dieser Zahlen (2) geachtet werden, in der sie durch den vorhergehenden Schritt geliefert werden (formale Anordnung), oder aber auf ihre Anordnung der Größe nach (reale Anordnung). Von der ersten Art ist der bekannte Jacobi-Algorithmus, von dem sich gezeigt hat, daß er die Erwartungen nicht voll erfüllt[2], die man im Hinblick auf die vielseitige Leistungsfähigkeit des Euklid'schen Algorithmus (Fall $n = 2$) bezüglich Approximation und Periodizität an die Erweiterung auf $n > 2$ geknüpft hat. Ein Verfahren der zweiten Art ist gelegentlich einmal von H. Poincaré in einer Comptes-rendus-Note[3] skizziert worden und es mochte – eben wegen der Anpassung an die Größenverhältnisse der auftretenden Zahlen $a_\nu^{(\lambda)}$ – nicht ausgeschlossen sein, daß das Verfahren in seinen Approximationseigenschaften den formal angeordneten Algorithmen überlegen ist. Es ist mir das schon immer als der Untersuchung wert erschienen. Meines Wissens ist Poincaré selbst auf den Gegenstand nicht wieder zurückgekommen, und er hebt am Schluß seiner Note hervor, daß der von ihm für $n = 3$ erläuterte Algorithmus ganz ebenso für $n > 3$ ausführbar ist. Auch erwähnt er, daß unter Umständen für besondere Zwecke Modifikationen des Verfahrens, die er aber nicht weiter kennzeichnet, günstig sein könnten. Im folgenden entwickeln wir in § 3 das Poincaré'sche Verfahren für

[2] Eingehende Untersuchungen, die auch zu ausgedehnten Anwendungen insbesondere auf das Gebiet der Differenzengleichungen führten, hat insbesondere Herr O. Perron vorgenommen. Vgl. hierüber: Grundlagen für eine Theorie des Jacobischen Kettenalgorithmus, Math. Annalen 64 (1907); Über die Konvergenz der Jacobischen Algorithmen mit komplexen Elementen, Sitz.ber. der Bayer. Akad. d. Wiss. 37 (1907); Über eine Verallgemeinerung des Stolzschen Irrationalitätssatzes, ebenda Jahrg. 1908 (Bd. 38) und 1920; Über lineare Differenzen- und Differentialgleichungen, Math. Ann. 66 (1909); Über lineare Differenzengleichungen, Acta Math. 34 (1910); Ein neues Konvergenzkriterium für Jacobi-Ketten zweiter Ordnung, Archiv d. Math. und Physik (3) 17 (1911); Über konvergente Matrixprodukte, Sitz.ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss., Jahrgang 1915, 4. Abhandlung.

[3] H. Poincaré, Sur une généralisation des fractions continues, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 99 (1884^2) p. 1014–1016.

den Fall eines beliebigen n (wegen $n = 3$ vgl. speziell Nr. **15**) und wir besprechen dabei auch das Auftreten gleicher Zahlen unter den $a_1^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)}$. Eine bestimmte Modifikation des Poincaré'schen Algorithmus wird in § 4 behandelt. Zwei andere Verfahren zur Gewinnung simultaner rationaler Approximationen (und speziell natürlich auch zur Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers von n ganzen positiven Zahlen), die wir als „Algorithmus lentus" und „Algorithmus rapidus" bezeichnen, besprechen wir in §§ 5, 6. In § 2 schicken wir zwei Gestalten voraus, die man im Fall $n = 2$ dem Euklidischen Algorithmus geben kann und die man wiederfindet, wenn man die Verfahren von § 3 bzw. § 4, desgleichen wenn man die beiden Algorithmen der §§ 5, 6 für $n = 2$ spezialisiert.

Aus Beispielen, von denen wir einige in § 7 bringen[4], geht hervor, daß auch die hier behandelten „real" orientierten Algorithmen keineswegs durchwegs alle vom Fall $n = 2$ des Euklidischen Algorithmus bekannten Eigenschaften, speziell was Approximation und Periodizität anlangt, aufweisen[5].

§ 1. Bezeichnungen.

2. Wenn γ eine reelle Zahl bedeutet, so werde außer der größten ganzen Zahl in γ, die üblicherweise mit

[4] In einer in Vorbereitung befindlichen Note „Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse" soll an Hand von weiteren Beispielen auf einige Fragen noch etwas mehr eingegangen werden.

[5] Sei noch auf eine mit diesen Fragen sich berührende, in jüngster Zeit erschienene Arbeit von Bullig in den Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Hamburgischen (Hansischen) Universität hingewiesen. Die gegenwärtigen Bibliotheks- und sonstigen Verhältnisse, die auch der Kälte wegen in vielen Räumen das Arbeiten ausschließen, verhindern mich an genauerem Zitieren. (Den „Mathematical Reviews" – wir verdanken sie Herrn I. A. Barnett, der unser mathematisches Leben weitgehend gefördert hat – entnehme ich bei der Korrektur, Juli 1947, folgende Angaben: Bullig G., Abh. Math. Sem. Hansische Univ. 12 (1938) 369–414, sowie 13 (1940) 321–343, Math. Zeits. 45 (1939) 511–532, Mitt. Math. Ges. Hamburg 8, Teil 2, 164–187 (1940); Rosser Barkley, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 27 (1941) 309–311, Duke Math. J. 9 (1942) 59–95; Yannopoulos Constantin, Math. Zeits. 47 (1940) 105–110; Ficken Frederick A., Duke Math. J. 10 (1943) 355–379; Rédei L., J. f. Math. 183 (1941) 183–192, Math. Zeits. 48 (1942) 500–502.)

$$g = [\gamma] \text{ oder } g = E(\gamma)$$

bezeichnet und durch

$$g \leqq \gamma < g + 1, \quad g \text{ ganz}$$

definiert wird, auch die durch

$$g^* < \gamma \leqq g^* + 1, \quad g^* \text{ ganz}$$

definierte „größte ganze Zahl unter γ" verwendet und mit

$$g^* = \{\gamma\} \text{ oder } g^* = E^*(\gamma)$$

bezeichnet. Dabei ist

$$\{\gamma\} = -[-\gamma] - 1 \tag{3}$$

und $\{\gamma\} = [\gamma] - 1$ oder $= [\gamma]$, je nachdem γ selbst ganz ist oder nicht.

Für Quotient und Rest bei der Division zweier Zahlen a und b (> 0) hat man demgemäß bei kleinstem nicht-negativem Rest:

$$a = bq + r, \quad q = \left[\frac{a}{b}\right], \quad 0 \leqq r < b, \tag{4}$$

bzw. bei kleinstem positivem Rest:

$$a = bq^* + r^*, \quad q^* = \left\{\frac{a}{b}\right\}, \quad 0 < r^* \leqq b. \tag{5}$$

§ 2. Der Algorithmus Euklid's in zwei Gestalten.

3. Das übliche Verfahren der Kettendivision (siehe Nr. **9**) kann man, indem man Subtraktionen statt Divisionen ausführt, noch etwas primitiver in seinen Einzelschritten gestalten. Wie in der Einleitung gesagt, sollen die beiden Formen des Algorithmus als Subtraktionsverfahren (in Nr. **4–8**) und als Divisionsverfahren (in Nr. **9–10**) besprochen werden, u. zw. jedesmal in einer den späteren Verallgemeinerungen und ihrer geometrischen Deutung angepaßten Art.

4. Gegeben seien zwei verschiedene positive Zahlen a_1, a_2 (wegen $a_1 = a_2 > 0$ vgl. Nr. **7**). Bei der ersten Form des Euklidischen Algorithmus (Subtraktionsverfahren) besteht der erste Schritt des Verfahrens darin, das Zahlenpaar a_1, a_2 zu ersetzen durch das Paar

$$a_1' = a_1 - a_2, \quad a_2' = a_2, \text{ wenn } a_1 > a_2 \tag{6}$$

ist, dagegen durch das Paar

$$a_1' = a_1,\ a_2 = a_2 - a_1, \quad \text{wenn } a_2 > a_1 \tag{7}$$

ist. Mit dem neuen Zahlenpaar a'_1, a'_2 kann, soferne $a'_1 \neq a'_2$ ist, auf dieselbe Weise verfahren und allgemein beim λ-ten Schritt das Paar $a_1^{(\lambda-1)}$, $a_2^{(\lambda-1)}$ durch

$$a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda-1)} - a_2^{(\lambda-1)},\ a_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda-1)}$$
$$\text{bzw. } a_1^{(\lambda)} = a_1^{(\lambda-1)},\ a_2^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda-1)} - a_1^{(\lambda-1)}$$

ersetzt werden, je nachdem $a_1^{(\lambda-1)} > a_2^{(\lambda-1)}$ oder $a_2^{(\lambda-1)} > a_1^{(\lambda-1)}$ ist.

Das Verfahren ist unbegrenzt fortsetzbar, wenn a_1, a_2 incommensurabel sind ($a_1 : a_2$ irrational ist); es bricht ab, indem sich einmal ein Paar gleicher Zahlen $a_1^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} = t$ einstellt, wenn a_1, a_2 commensurabel sind ($a_1 : a_2$ rational ist), wo dann t ihr größtes gemeinsames Maß darstellt und speziell bei ganzen rationalen Zahlen a_1, a_2 (d. i. in dem bei Euklid behandelten Fall) t der größte gemeinsame Teiler von a_1 und a_2 (sowie für jedes $\rho < \lambda$ der größte gemeinsame Teiler von $a_1^{(\rho)}$, $a_2^{(\rho)}$) ist[6].

5. Die „Näherungsbrüche" $\frac{p_1}{p_2}$ für $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$, die sich bei diesem Verfahren der „Kettensubtraktion" einstellen, besprechen wir sogleich in Verbindung mit der bekannten geometrischen Deutung des Euklidischen Algorithmus. In einem beliebigen System von affinen (Parallel-) Koordinaten x_1, x_2 seien $O = (0,0)$ der Ursprung, $E_1 = (1, 0)$ und $E_2 = (0, 1)$ die Grundpunkte auf den Achsen, $E_{1,2} = (1, 1)$ die vierte Ecke des Einheitsparallelogramms, $\mathfrak{e}_1 = OE_1$ und $\mathfrak{e}_2 = OE_2$ die Grundvektoren, also $OE_{1,2} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$ und

$$\mathfrak{a} = OA = a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2$$

der Vektor von O zum Punkt $A = (a_1, a_2)$.

Setzen wir nun beispielsweise $a_1 > a_2 > 0$ voraus, so wird in diesem Falle die durch

$$x_1 : x_2 = a_1 : a_2 \tag{8}$$

[6] Etwas anders ausgedrückt: jeder von den zweigliedrigen Moduln $[a_1, a_2]$, $[a'_1, a'_2]$, ... stimmt überein mit dem eingliedrigen Modul $[t]$.

gegebene Gerade OA das Innere der Seite $E_1 E_{1,2}$ des Einheitsparallelogramms treffen; und wenn wir dementsprechend

$$OE_1 = \mathfrak{e}_1', \quad OE_{1,2} = \mathfrak{e}_2'$$

als Einheitsvektoren eines neuen affinen (x_1', x_2')-Koordinatensystems wählen und für einen beliebigen Punkt $X = (x_1, x_2)$ demgemäß

$$\mathfrak{x} = OX = x_1 \mathfrak{e}_1 + x_2 \mathfrak{e}_2 = x_1' \mathfrak{e}_1' + x_2' \mathfrak{e}_2 \tag{9}$$

setzen, so ergibt sich aus

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{e}_2' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 \tag{10}$$

nebst

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1' \quad \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{e}_1' - \mathfrak{e}_2', \tag{11}$$

daß

$$x_1 = x_1' + x_2', \quad x_2 = x_2' \tag{12}$$

und

$$x_1' = x_1 - x_2, \quad x_2' = x_2 \tag{13}$$

ist. Bei unserer Koordinatentransformation hat also gemäß (13) der Punkt A zu neuen Koordinaten gerade die durch (6) gegebenen Zahlen a_1', a_2'.

Im Falle $a_2 > a_1 > 0$ ergeben sich analog die gemäß (7) bestimmten Zahlen a_1', a_2' als neue Koordinaten von A, wenn nunmehr, wo die Gerade OA das Einheitsparallelogramm im Innern der Seite $E_2 E_{1,2}$ trifft, $\mathfrak{e}_1' = OE_{1,2} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_2' = OE_2 = \mathfrak{e}_2$ genommen wird.

6. Bei Fortsetzung des Verfahrens führt jeder Schritt auf ein Paar von Grundvektoren $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}, \mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$, von denen der eine Vektor bereits dem vorhergehenden Paar $\mathfrak{e}_1^{(\lambda-1)}, \mathfrak{e}_2^{(\lambda-1)}$ angehört, der andere aber (der $= \mathfrak{e}_1^{(\lambda-1)} + \mathfrak{e}_2^{(\lambda-1)}$ ist) neu auftritt[7]. Auf diese

[7] Bei einigen der später betrachteten Verallgemeinerungen des Algorithmus auf n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ sind es bei jedem Schritt $n - 1$ Grundvektoren eines Koordinatensystems, die durch neue Grundvektoren ersetzt werden. Nur bei dem Algorithmus in § 5 wird wie beim Euklidischen Algorithmus mit jedem Schritt nur ein Grundvektor durch einen neuen ersetzt.

Weise ergibt sich für den Vektor $\mathfrak{a}$ die Folge von Näherungsvektoren[8]

$$\mathfrak{x}_{-1}, \mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots \tag{14}$$

derart, daß abgesehen von der Reihenfolge $\mathfrak{x}_{-1}, \mathfrak{x}_0$ mit $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ übereinstimmen, ferner[9] $\mathfrak{x}_0, \mathfrak{x}_1$ mit $\mathfrak{e}_1', \mathfrak{e}_2'$, allgemein $\mathfrak{x}_{\lambda-1}, \mathfrak{x}_\lambda$ mit $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}, \mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$. Ist einer dieser Vektoren $\mathfrak{x}_\lambda = OP_\lambda = p_1^{(\lambda)}\,\mathfrak{e}_1 + p_2^{(\lambda)}\,\mathfrak{e}_2$, sind also $p_1^{(\lambda)}, p_2^{(\lambda)}$ die – offenbar ganzzahligen – Koordinaten seines Endpunktes[10] P_λ, dann bilden die Zahlen $\frac{p_1^{(\lambda)}}{p_2^{(\lambda)}}$ die Folge der Näherungsbrüche[11] für die Zahl $\alpha = \frac{a_1}{a_2}$.

7. Wenn die Fortsetzung des Verfahrens auf ein Paar einander gleicher Zahlen $a_1^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)}\ (= t)$ führt, so daß

$$\mathfrak{a} = a_1^{(\lambda)}\,\mathfrak{e}_1^{(\lambda)} + a_2^{(\lambda)}\,\mathfrak{e}_2^{(\lambda)} = t\,(\mathfrak{e}_1^{(\lambda)} + \mathfrak{e}_2^{(\lambda)})$$

ist, dann werde als Abschluß des Algorithmus der Vektor $\mathfrak{f}^{(\lambda)} = \mathfrak{e}_1^{(\lambda)} + \mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ als Grundvektor eines eindimensionalen Koordinatensystems eingeführt, in welchem der Endpunkt A des Vektors $\mathfrak{a} = t\,\mathfrak{f}^{(\lambda)}$ die Koordinate t hat.

Eine analoge „Reduktion" des Koordinatensystems werde (durch Einführung des Vektors $\mathfrak{f} = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2$) vorgenommen, wenn bereits das Ausgangspaar a_1, a_2 aus zwei gleichen Zahlen besteht:

$$a_1 = a_2 = t, \quad \mathfrak{a} = a_1\,\mathfrak{e}_1 + a_2\,\mathfrak{e}_2 = t\,\mathfrak{f}.$$

---

[8] Vgl. zu den geometrischen Entwicklungen F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, Autographierte Vorlesung, I (Göttingen 1896), ausgearbeitet von A. Sommerfeld, S. 17 ff. Wie ich annehme, ist es aber dieselbe oder eine wenig verschiedene geometrische Deutung, die auch von Poincaré im Cahier XLVII des Journal de l'École Polytechnique gegeben wurde – eine mir unter den dermaligen Verhältnissen nicht zugängliche Stelle, auf die Poincaré l. c.[3] verweist.

[9] Im Falle $a_1 > a_2$ ist $\mathfrak{x}_{-1} = \mathfrak{e}_2, \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{e}_1$, im Falle $a_2 > a_1$ dagegen $\mathfrak{x}_{-1} = \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{x}_0 = \mathfrak{e}_2$.

[10] Dabei sind $p_1^{(\lambda)}, p_2^{(\lambda)}$ allemal teilerfremd, wie man in bekannter Weise daraus entnimmt, daß der absolute Betrag der Determinante $p_1^{(\lambda-1)} p_2^{(\lambda)} - p_2^{(\lambda-1)} p_1^{(\lambda)}$ (d. i. der Flächeninhalt des von den Vektoren $\mathfrak{x}_{\lambda-1}, \mathfrak{x}_\lambda$ aufgespannten Parallelogramms) unabhängig von λ den Wert 1 hat. Vgl. auch Anm. 13.

[11] An dieser Stelle unterscheiden wir noch nicht zwischen den Haupt- und den Nebennäherungsbrüchen von α.

8. Wir wollen noch bei unserer Kette von Koordinaten-Transformationen einige Bemerkungen über die zugehörigen Koeffizienten-Matrizen beifügen[12]. Zunächst ist, ob nun im Falle $a_1 > a_2$ gemäß (13) oder im Falle $a_2 > a_1$ gemäß

$$x_1' = x_1, \quad x_2' = -x_1 + x_2 \tag{15}$$

transformiert wird, jede dieser Transformationen (13), (15) unimodular, d. h. von der Gestalt $x_\mu' = \Sigma g_{\mu\nu} x_\nu$ mit ganzzahligen Koeffizienten $g_{\mu\nu}$, deren Determinante $= 1$ ist. Dasselbe gilt von der zugehörigen Transformation der Grundvektoren, ob sie nun im Falle $a_1 > a_2$ gemäß (10) oder im Falle $a_2 > a_1$ gemäß

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2' = \mathfrak{e}_2 \tag{16}$$

erfolgt. Da dasselbe aber auch bei jedem späteren Schritt des Algorithmus für die Transformation von $x_1^{(\lambda-1)}$, $x_2^{(\lambda-1)}$ zu $x_1^{(\lambda)}$, $x_2^{(\lambda)}$ bzw. von $\mathfrak{e}_1^{(\lambda-1)}$, $\mathfrak{e}_2^{(\lambda-1)}$ zu $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$, $\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ gilt, so liefert auch die Zusammensetzung dieser Einzel-Transformationen eine Transformation

$$x_1^{(\lambda)} = c_{11}^{(\lambda)} x_1 + c_{12}^{(\lambda)} x_2, \quad x_2^{(\lambda)} = c_{21}^{(\lambda)} x_1 + c_{22}^{(\lambda)} x_2$$

nebst

$$\mathfrak{e}_1^{(\lambda)} = k_{11}^{(\lambda)} \mathfrak{e}_1 + k_{12}^{(\lambda)} \mathfrak{e}_2, \quad \mathfrak{e}_2^{(\lambda)} = k_{21}^{(\lambda)} \mathfrak{e}_1 + k_{22}^{(\lambda)} \mathfrak{e}_2$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $c_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ bzw. $k_{\mu\nu}^{(\lambda)}$, deren Determinanten gleich 1 sind[13].

9. Wir kommen zur zweiten Form des Euklidischen Algorithmus (Divisionsverfahren), die sich als Kontraktion mehrerer Schritte des Subtraktionsverfahrens in einen einzigen Schritt darstellt. Sind a_1, a_2 die gegebenen positiven Zahlen und ist $a_1 > a_2$, so werde als erster Schritt der Kettendivision gemäß (5) in § 1, Nr. **2** die Division $a_1 : a_2$ mit kleinstem positiven Rest ausgeführt[14]:

---

[12] Ausführlicher gehen wir darauf später bei den Verallgemeinerungen des Euklidischen Algorithmus ein (vgl. Nr. **16–18**).

[13] Wie daraus folgt, sind also die Koordinaten $k_{\mu 1}^{(\lambda)}$, $k_{\mu 2}^{(\lambda)}$ jedes der beiden Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(\lambda)}$ teilerfremde ganze Zahlen. Einer dieser beiden Vektoren ist der in Nr. **6** mit $\mathfrak{x}_\lambda$ bezeichnete Näherungsvektor.

[14] Es empfiehlt sich, von der üblichen Division mit kleinstem nicht-negativen Rest (auch im Hinblick auf die Behandlung gewisser „Reduktionen" bei

$$a_1 = q\,a_2 + r \text{ mit } q = \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\},\ 0 < r \leqq a_2$$

und das Paar a_1, a_2 durch das neue Zahlenpaar

$$a_1' = a_1 - q a_2, \quad a_2' = a_2 \tag{17}$$

ersetzt. Es ist klar, daß damit q einzelne Schritte des Subtraktionsverfahrens in einen Schritt des Divisionsverfahrens zusammengezogen sind. Mit diesem Schritt verbinden wir die durch

$$x_1' = x_1 - q x_2, \quad x_2' = x_2, \tag{18}$$

$$x_1 = x_1' + q x_2', \quad x_2 = x_2', \tag{19}$$

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1', \quad \mathfrak{e}_2 = -q\,\mathfrak{e}_1' + \mathfrak{e}_2', \tag{20}$$

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1, \quad \mathfrak{e}_2' = q\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 \tag{21}$$

dargestellte Koordinatentransformation. Geometrisch kann $\mathfrak{e}_2'$ charakterisiert werden als der letzte Vektor in der Folge $\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2 + 2\,\mathfrak{e}_1$, ..., $\mathfrak{e}_2 + m\,\mathfrak{e}_1$, ..., der mit dem Vektor $\mathfrak{e}_2$ auf derselben Seite der Geraden (8) liegt.

Im Falle $a_2 > a_1$ ist analog, mit Vertauschung der Rollen von a_1 und a_2, vorzugehen[15].

Soferne $a_1' \neq a_2'$ ausfällt (wobei dann im Falle $a_1 > a_2$ bzw. $a_2 > a_1$ stets $a_1' < a_2'$ bzw. $a_2' < a_1'$ ist), führt ein zweiter Schritt von a_1', a_2' zu einem neuen Zahlenpaar a_1'', a_2'' und der Algorithmus bricht nur ab, wenn einmal ein Paar $a_1^{(\lambda)} = a_2^{(\lambda)} = t$ sich einstellt. In diesem Fall bildet die Reduktion gemäß Nr. **7** den Abschluß des Algorithmus.

10. Was in Nr. **6** für das dort besprochene Verfahren der „Ketten-Subtraktion" hervorgehoben wurde, daß nämlich mit jedem Schritt von den beiden Grundvektoren $\mathfrak{e}_1^{(\lambda-1)}$, $\mathfrak{e}_2^{(\lambda-1)}$

---

den später besprochenen allgemeineren Algorithmen, Nr. **14**; analog am Schluß von Nr. **20**, **22**, **23**) abzuweichen und in den Fällen, wo a_1/a_2 ganz ist, nicht zum Zahlenpaar $a_1' = 0$, $a_2' = a_2$, sondern zum Zahlenpaar $a_1' = a_2' = a_2$ überzugehen. In der Möglichkeit, die Division so oder so auszuführen, liegt die bekannte Gabelung des Verfahrens, die auf zwei einander gleiche endliche Kettenbrüche führt: der eine mit dem letzten Teilnenner = 1, der andere mit einem letzten Teilnenner > 1.

[15] Im Falle $a_1 = a_2$ beschränkt sich das Verfahren auf die am Schluß von Nr. **7** angegebene Reduktion.

der eine beibehalten, der andere durch einen neuen Grundvektor ersetzt wird, gilt ebenso auch hier gemäß (21) und den analogen Formeln für die späteren Schritte[16]. Wir kommen damit auch hier zu einer Folge von Näherungsvektoren des Vektors $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2$, bzw. von Näherungsbrüchen der Zahl $\alpha = a_1/a_2$. Sie bilden eine Teilfolge der beim Subtraktionsverfahren auftretenden Folge von Näherungsvektoren bzw. Näherungsbrüchen, u. zw. werden bekanntlich die nunmehr beim Divisionsverfahren auftretenden Näherungsbrüche als „Hauptnäherungsbrüche" unterschieden von den nur beim Subtraktionsverfahren auftretenden „Nebennäherungsbrüchen".

11. Es sei noch ein Beispiel für die beiden Gestalten des Algorithmus beigefügt, u. zw. in einer solchen tabellarischen Anordnung, wie sie analog bei den später behandelten allgemeineren Algorithmen verwendet wird. Wir setzen $a_1 = 1001$, $a_2 = 442$. Sowohl bei der Ketten-Subtraktion, als auch bei der Ketten-Division, wie sie im folgenden wiedergegeben sind, gewinnt man eine fortlaufende Kontrolle daraus, daß $a_1^{(\lambda)}\, \mathfrak{e}_1^{(\lambda)} + a_2^{(\lambda)}\, \mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ für alle λ stets denselben Vektor $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 = (a_1, a_2) = (1001, 442)$ ergeben muß; z. B. hat man beim unten angegebenen Subtraktionsverfahren für $\lambda = 4$ die Kontrolle:

$$117 \,.\, \mathfrak{e}_1^{(4)} + 208 \,.\, \mathfrak{e}_2^{(4)} = 117 \,.\, (5, 2) + 208 \,.\, (2, 1) =$$
$$= (117 \,.\, 5 + 208 \,.\, 2,\ 117 \,.\, 2 + 208 \,.\, 1) = (1001, 442).$$

Den Abschluß des Verfahrens bildet jedesmal eine Reduktion gemäß Nr. **7**, beispielsweise beim Subtraktionsverfahren nach dem 10-ten Schritt, bei dem $a_1^{(10)}$ und $a_2^{(10)}$ einander gleich $(= 13)$ sind und nun dem Reduktionsverfahren gemäß der Vektor $\mathfrak{f}^{(10)} = \mathfrak{e}_1^{(10)} + \mathfrak{e}_2^{(10)} = (34, 15) + (43, 19) = (77, 34)$ gebildet wird, woraus sich für den ursprünglich gegebenen Vektor $\mathfrak{a}$ die Darstellung $13 \,.\, \mathfrak{f}^{(10)} = 13 \,.\, (77, 34)$ ergibt. Damit erweist sich $t = 13$ als größter gemeinsamer Teiler von 1001 und 442, sowie $77 : 34$ als Darstellung des Verhältnisses $1001 : 442$ durch teilerfremde Zahlen. Zugleich mit der Reduktion müßte, genau genommen,

[16] U. zw. gilt jetzt speziell, daß von den beiden Grundvektoren stets abwechselnd der eine beibehalten, der andere ausgewechselt wird.

das bis dahin geltende Tabellen-Schema mit zwei Kolonnen für die $a_\nu^{(\lambda)}$ ($\nu = 1, 2$) und zwei Kolonnen für die $\mathfrak{e}_\nu^{(\lambda)}$ ($\nu = 1, 2$) verlassen und zu einem neuen Schema mit nur je einer Kolonne für $t = 13$ und $\mathfrak{f}^{(10)} = (77, 34)$ übergegangen werden. Statt dessen haben wir in der mit $10 \cdot r$ (= 10 reduziert) bezeichneten Zeile die Kolonne für $a_1^{(\lambda)}$ bzw. $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$ zur Eintragung von t und $\mathfrak{f}^{(10)}$ benützt, wobei natürlich ebensogut die Kolonne für $a_2^{(\lambda)}$ bzw. $\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ hätte genommen werden können[17].

Die zur Kettenbruchentwicklung von $\frac{1001}{442}$ gehörigen Quotienten (also das Anfangsglied und die Teilnenner)

$$2,\ 3,\ 1,\ 3,\ 1,\ 1,$$

sind sowohl aus dem Subtraktions- wie aus dem Divisions-Verfahren unmittelbar zu entnehmen. Bei ersterem erscheinen sie als die Anzahlen, in denen jeweils eine Zahl wiederkehrt; z. B. kehrt 442 zweimal wieder, 117 dreimal, 91 einmal usf. Beim Divisionsverfahren sind die fraglichen Quotienten bei jedem einzelnen Schritt in eckigen Klammern [ ] angegeben. Zu beachten ist, daß – beim einen wie beim anderen Verfahren – der am Schluß vorgenommenen Reduktion ein letzter Teilnehmer = 1 entspricht, so daß wir die Darstellung

$$\frac{1001}{442} = 2 + \frac{1}{\lfloor 3 \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 1 \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 3 \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 1 \rfloor} + \frac{1}{\lfloor 1 \rfloor}$$

gewinnen, während die üblichere Darstellung mit letztem Teilnehmer > 1 sich einstellen würde, wenn wir beim Kettendivisions-Verfahren die einzelnen Divisionen nach kleinstem nicht-negativem Rest vornehmen würden statt nach kleinstem positiven Rest. Der 5-te Schritt, der die Division $a_1^{(4)} : a_2^{(4)} = 26 : 13$ betrifft, würde dann mit dem Quotienten 2 (statt 1) vorzunehmen sein und auf

$$a_1^{(5)} = a_1^{(4)} - 2\, a_2^{(4)} = 0, \quad a_2^{(5)} = a_2^{(4)} = 13 \tag{22}$$

nebst

$$\mathfrak{e}_1^{(5)} = \mathfrak{e}_1^{(4)} = (34, 15), \quad \mathfrak{e}_2^{(5)} = \mathfrak{e}_2^{(4)} + 2\, \mathfrak{e}_1^{(4)} = (77, 34)$$

[17] Diese Bemerkung findet ihr Analogon in Bemerkungen zu den Reduktionen bei den Algorithmen mit mehr als zwei Zahlen, wo gegebenenfalls das Verfahren nach einer solchen Reduktion weiterläuft, vgl. Nr. **24**, Anm. 29.

führen. Den Grund dafür, daß wir (auch im Hinblick auf die späteren Verallgemeinerungen des Algorithmus auf mehr als zwei Zahlen) nicht so vorgehen, ersieht man schon aus der Betrachtung des Subtraktions-Verfahrens: Mit dem 10-ten Schritt der Ketten-Subtraktion erhalten wir zwei einander gleiche Zahlen $a_\nu^{(10)}$ ($\nu = 1, 2$) und es liegt kein innerer Grund dafür vor, als nächsten Schritt just

$$a_1^{(11)} = a_1^{(10)} - a_2^{(10)}, \quad a_2^{(11)} = a_2^{(10)}$$

vorzunehmen, wie es dem Schritt (22) bei der Ketten-Division entspräche, wo doch

$$a_1^{(11)} = a_1^{(10)}, \quad a_2^{(11)} = a_2^{(10)} - a_1^{(10)}$$

ganz die gleiche Berechtigung hätte.

Ketten-Subtraktion

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$
0	1001	442	1,0	0,1
1	559	,,	,,	1,1
2	117	,,	,,	2,1
3	,,	325	3,1	,,
4	,,	208	5,2	,,
5	,,	91	7,3	,,
6	26	,,	,,	9,4
7	,,	65	16,7	,,
8	,,	39	25,11	,,
9	,,	13	34,15	,,
10	13	,,	,,	43,19
10, r.	13	*	77,34	*

Ketten-Division

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$
0	1001 [2]	442	1,0	0,1
1	117	,, [3]	,,	2,1
2	,, [1]	91	7,3	,,
3	26	,, [3]	,,	9,4
4	,, [1]	13	34,15	,,
5	13	,,	,,	43,19
5, r.	13	*	77,34	*

§ 3. Der Poincarésche Algorithmus.

12. Seien n positive Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gegeben ($n \geqq 2$). Wir nehmen vorerst an, daß sie durchwegs verschieden seien (wegen Auftretens gleicher Zahlen vgl. Nr. **14**). Sei dabei beispielsweise

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0, \tag{23}$$

so werde ein neues Zahlensystem gebildet vermöge

$$a_1' = a_1 - a_2, \ldots, a_{n-1}' = a_{n-1} - a_n, \; a_n' = a_n. \tag{24}$$

Sind nun

$$\mathfrak{e}_1 = OE_1, \; \mathfrak{e}_2 = OE_2, \ldots, \; \mathfrak{e}_n = OE_n \tag{25}$$

die Grundvektoren eines Systems von Parallel-Koordinaten $x_1, \ldots, x_n$ mit O als Ursprung und $E_1, \ldots, E_n$ als Einheitspunkten auf den Koordinaten-Achsen und ist A der Punkt mit den Koordinaten $x_1 = a_1, \ldots, x_n = a_n$, dann erhält man ein neues Koordinatensystem, in welchem A die Koordinaten $a_1', \ldots, a_n'$ hat, indem man – unter $\mathfrak{e}_1', \ldots, \mathfrak{e}_n'$ die neuen Grundvektoren verstehend – für den Vektor $\mathfrak{a} = OA$ die doppelte Darstellung

$$\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + a_n\mathfrak{e}_n = a_1'\mathfrak{e}_1' + \ldots + a_n'\mathfrak{e}_n' \tag{26}$$

ansetzt, aus der man (wenn sie für beliebige Wertsysteme der a_ν gelten soll) gemäß (24)

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1', \; \mathfrak{e}_2 = -\mathfrak{e}_1' + \mathfrak{e}_2', \ldots, \; \mathfrak{e}_n = -\mathfrak{e}_{n-1}' + \mathfrak{e}_n' \tag{27}$$

und somit

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1, \; \mathfrak{e}_2' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2, \ldots, \; \mathfrak{e}_n' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_n \tag{28}$$

oder

$$\mathfrak{e}_1' = OE_1, \; \mathfrak{e}_2' = OE_{1,2}, \ldots, \; \mathfrak{e}_n' = OE_{1,2,\ldots,n} \tag{29}$$

erhält, wobei $E_{1,2,\ldots,\nu}$ (bzw. allgemein $E_{i_1 i_2 \ldots i_\nu}$) denjenigen Eckpunkt des Grundparallelotops bedeutet, dessen Koordinaten $x_1 = \ldots = x_\nu = 1, x_{\nu+1} = \ldots = x_n = 0$ (bzw. $x_{i_1} = \ldots = x_{i_\nu} = 1, x_i = 0$ für $i \neq i_1, \ldots, i_\nu$) sind.

Ist die Größenanordnung der n verschiedenen positiven Zahlen a_ν nicht speziell durch (23), sondern allgemein durch

$$a_{\sigma_1} > \ldots > a_{\sigma_n} > 0 \tag{30}$$

gegeben, so treten die Gleichungen

$$a'_{\sigma_1} = a_{\sigma_1} - a_{\sigma_2}, \ldots, a'_{\sigma_{n-1}} = a_{\sigma_{n-1}} - a_{\sigma_n}, \; a'_{\sigma_n} = a_{\sigma_n} \quad (31)$$

und

$$\mathfrak{e}_{\sigma_1} = \mathfrak{e}'_{\sigma_1}, \; \mathfrak{e}_{\sigma_2} = -\mathfrak{e}'_{\sigma_1} + \mathfrak{e}'_{\sigma_2}, \ldots, \; \mathfrak{e}_{\sigma_n} = -\mathfrak{e}'_{\sigma_{n-1}} + \mathfrak{e}'_{\sigma_n} \quad (32)$$

nebst

$$\mathfrak{e}'_{\sigma_1} = \mathfrak{e}_{\sigma_1}, \; \mathfrak{e}'_{\sigma_2} = \mathfrak{e}_{\sigma_1} + \mathfrak{e}_{\sigma_2}, \ldots, \; \mathfrak{e}'_{\sigma_n} = \mathfrak{e}_{\sigma_1} + \ldots + \mathfrak{e}_{\sigma_n} \quad (33)$$

und

$$\mathfrak{e}'_{\sigma_1} = OE_{\sigma_1}, \; \mathfrak{e}'_{\sigma_2} = OE_{\sigma_1 \sigma_2}, \ldots, \; \mathfrak{e}'_{\sigma_n} = OE_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_n} \quad (34)$$

an Stelle von (24), (27), (28) und (29).

13. Falls das neu erhaltene System (24) bzw. (31) der a'_ν wieder aus lauter verschiedenen Zahlen besteht, kann daraus auf dieselbe Weise in einem neuen Schritt des Algorithmus ein drittes System positiver Zahlen $a''_1, \ldots, a''_n$ und in Verbindung damit aus den $\mathfrak{e}'_\nu$ ein neues, der Beziehung $\mathfrak{a} = a''_1 \mathfrak{e}''_1 + \ldots + a''_n \mathfrak{e}''_n$ genügendes System von Grundvektoren $\mathfrak{e}''_1, \ldots, \mathfrak{e}''_n$ gewonnen werden.

Das Verfahren läßt sich zur Bildung weiterer neuer Zahlensysteme $a^{(\lambda)}_1, \ldots, a^{(\lambda)}_n$ und neuer Koordinatensysteme $x^{(\lambda)}_1 \ldots, x^{(\lambda)}_n$ mit Grundvektoren $\mathfrak{e}^{(\lambda)}_1, \ldots, \mathfrak{e}^{(\lambda)}_1$, für welche

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + \ldots + a_n \mathfrak{e}_n = a^{(\lambda)}_1 \mathfrak{e}^{(\lambda)}_1 + \ldots + a^{(\lambda)}_n \mathfrak{e}^{(\lambda)}_n \quad (35)$$

gilt, immer wieder fortsetzen, solange nicht durch das Auftreten gleicher Zahlen innerhalb eines der so gewonnenen Zahlensysteme $a^{(\lambda)}_1, \ldots, a^{(\lambda)}_n$ eine Unterbrechung eintritt. Bei einer solchen Unterbrechung ist zunächst eine aus Nr. **14** ersichtliche Reduktion vorzunehmen; und es wird weiterhin zu unterscheiden sein zwischen dem Fall, daß alle n Zahlen $a^{(\lambda)}_\nu$ einander gleich ausfallen[18], wo wir zum Abschluß des Algorithmus nach endlich vielen Schritten kommen, und dem anderen Fall, daß sich unter den Zahlen $a^{(\lambda)}_\nu, \ldots, a^{(\lambda)}_n$ wenigstens zwei verschiedene Werte vorfinden, wo sich der Algorithmus mit verminderter Gliederzahl fortsetzt.

---

[18] Dieser Fall tritt beispielsweise für $\lambda = 1$ (also schon beim ersten Schritt) ein, wenn wir vom System der Zahlen na, $(n-1)a, \ldots, 2a, a$ ausgehen; desgl. bei jedweder Unterbrechung im Falle $n = 2$.

14. Die erwähnte Reduktion wollen wir sogleich für den Fall besprechen, daß bereits im Ausgangssystem $a_1, \ldots, a_n$ nicht alle Zahlen verschieden sind. Zur Vereinfachung der Bezeichnungen werde dabei zunächst

$$a_1 \geqq a_2 \geqq \ldots \geqq a_n > 0 \tag{36}$$

angenommen und ferner vorausgesetzt, daß

$$b_1 > b_2 > \ldots > b_m > 0 \tag{37}$$

die m verschiedenen unter den Werten der a_ν seien, wobei n_μ unter den Zahlen a_ν den Wert b_μ haben mögen. Es sei also, wenn

$$n_1 + \ldots + n_\mu = N_\mu \; (1 \leqq \mu \leqq m), \; N_m = n, \; N_0 = 0 \tag{38}$$

gesetzt wird,

$$a_\nu = b_\mu \text{ für } \nu = N_{\mu-1} + 1, \ldots, N_\mu \; (1 \leqq \mu \leqq m). \tag{39}$$

Die Reduktion, die wir nun vornehmen, besteht darin, daß wir das System der n Zahlen a_ν ersetzen durch das System der m Zahlen b_μ, und gleichzeitig das System der Vektoren $\mathfrak{e}_\nu$ ersetzen durch das System der Vektoren $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$, wobei

$$\mathfrak{f}_\mu = \Sigma \mathfrak{e}_\nu \text{ mit } \nu = N_{\mu-1} + 1, \ldots, N_\mu \tag{40}$$

ist. Ersichtlich gilt dann

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + \ldots + a_n \mathfrak{e}_n = b_1 \mathfrak{f}_1 + \ldots + b_m \mathfrak{f}_m. \tag{41}$$

Wenn andererseits die a_ν zwar nicht gemäß (36) der Größe nach angeordnet sind, jedoch unter ihnen wieder die Werte (37) mit den Vielfachheiten n_μ auftreten, dann besteht die vorzunehmende Reduktion wieder im Übergang vom System der a_ν zum System der b_μ, nur daß jetzt die Grundvektoren $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ eines neuen m-dimensionalen Koordinatensystems nicht mehr speziell durch (40) gegeben sind, sondern durch

$$\mathfrak{f}_\mu = \Sigma \mathfrak{e}_{\sigma_\nu} \text{ mit } \nu = N_{\mu-1} + 1, \ldots, N_\mu, \tag{42}$$

wenn die Verteilung der Werte b_μ auf die einzelnen a_ν nunmehr – statt durch (39) – durch

$$a_{\sigma_\nu} = b_\mu \text{ für } \nu = N_{\mu-1} + 1, \ldots, N_\mu$$

gegeben ist.

In dem besonderen Falle $m = 1$, wo

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$$

ist, somit nur ein einziger Wert b_1 (= jedem der a_ν) auftritt und sich

$$\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \ldots + \mathfrak{e}_n$$

ergibt, bedeutet die vorgenommene Reduktion zugleich den Abschluß des ganzen Algorithmus. Andernfalls ($m > 1$) ist mit dem Zahlensystem $b_1, \ldots, b_m$ und dem zugehörigen Vektorensystem $\mathfrak{f}_1, \ldots, \mathfrak{f}_m$ analog zu verfahren, wie es in Nr. **12**, **13** für $a_1, \ldots, a_n$ und $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ auseinandergesetzt wurde.

Was wir über eine Reduktion des Ausgangssystems $a_1, \ldots, a_n$ gesagt haben, gilt nun ebenso für die Reduktion irgendeines aus ihm gemäß Nr. **12**, **13** hergeleiteten Systems $a_1^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)}$, wenn dieses nicht aus lauter verschiedenen Zahlen besteht.

Wie übrigens der Algorithmus bei rechnerischer Durchführung in seinen einzelnen Schritten und Reduktionen übersichtlich angeordnet werden kann, mag den Beispielen in § 7, Nr. **24** bis **27** entnommen werden.

15. Legt man in dem von Poincaré l. c. speziell zur Darstellung gebrachten Fall $n = 3$ ein cartesisches $x_1 x_2 x_3$-Koordinatensystem zugrunde, so daß O, E_1, E_2, E_3, $E_{1,2}$, $E_{1,3}$, $E_{2,3}$, $E_{1,2,3}$ den Einheitswürfel bilden, dann bedeutet die Annahme (36), daß der von O aus ins Innere dieses Würfels eindringende Halbstrahl OA, der die Richtung des Vektors (26) hat, die Würfeloberfläche in einem Punkt A^* des Dreiecks E_1, $E_{1,2}$, $E_{1,2,3}$ (dabei wegen $a_3 > 0$ jedoch nicht in einem Punkt der Seite $E_1 E_{1,2}$) trifft. Falls $a_1 > a_2 > a_3$, somit A^* ein innerer Punkt des Dreiecks ist, dann bilden dessen Eckpunkte die Grundpunkte E'_1, E'_2, E'_3 des neuen Koordinatensystems, von dem der nächste Schritt des Algorithmus ausgeht. Falls $a_1 = a_2 > a_3$, somit A^* ein innerer Punkt der Würfelkante $E_{1,2}$, $E_{1,2,3}$ ist, dann tritt gemäß Nr. **14** eine Reduktion auf die zwei neuen Grundvektoren $\mathfrak{f}_1 = OE_{1,2}$, $\mathfrak{f}_2 = OE_{1,2,3}$ nebst $b_1 = a_1 = a_2$, $b_2 = a_3$ ein, worauf sich das Verfahren in der Ebene $x_1 = x_2$ dieser beiden Vektoren fortsetzt. Falls $a_1 > a_2 = a_3$, somit A^* ein innerer Punkt der Quadratdiagonale $E_1 E_{1,2,3}$ ist,

erfolgt analog (mit $b_1 = a_1$, $b_2 = a_2 = a_3$) eine Reduktion auf die neuen Grundvektoren OE_1, $OE_{1,2,3}$, in deren Ebene $x_2 = x_3$ das Verfahren sich fortsetzt. Falls $a_1 = a_2 = a_3$, somit $A^* = E_{1,2,3}$ ist, findet das Verfahren gemäß Nr. **14** mit der Reduktion $\mathfrak{f}_1 = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3 = OE_{1,2,3}$ nebst $b_1 = a_1 = a_2 = a_3$ seinen Abschluß.

Allemal wird anschaulich die Tendenz ersichtlich, daß die neu eingeführten Grundvektoren $\mathfrak{e}'_\nu$ bzw. $\mathfrak{f}_\mu$ der Richtung nach näher an den Vektor $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{e}_1 + a_2\mathfrak{e}_2 + a_3\mathfrak{e}_3$ heranrücken als jene Vektoren $\mathfrak{e}_\nu$, an deren Stelle sie treten.

16. Entsprechend der Tendenz des Algorithmus, mit den jeweils neu eingeführten Grundvektoren immer näher an die Richtung des Vektors $\mathfrak{a} = a_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + a_n\mathfrak{e}_n$ heranzukommen, ist für die Aufgabe, simultane rationale Approximationen des Zahlenverhältnisses $a_1 : \ldots : a_n$ zu gewinnen, die Betrachtung der Folge der Vektorsysteme $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}, \ldots, \mathfrak{e}_n^{(\lambda)}$ von besonderer Bedeutung. Daher wollen wir uns noch mit der zugehörigen Folge von Koordinatentransformationen beschäftigen, – und zwar zunächst mit der Transformation in Nr. **12**, die vom System der $\mathfrak{e}_\nu$ zum System[19] der $\mathfrak{e}_\nu^{(1)}$ führt. Die zugehörige Koordinatentransformation wird dann (vgl. (24), (31) und (26)) durch

$$x_1^{(1)} = x_1 - x_2, \ldots, x_{n-1}^{(1)} = x_{n-1} - x_n, \quad x_n^{(1)} = x_n \tag{43}$$

bzw.

$$x_{\sigma_1}^{(1)} = x_{\sigma_1} - x_{\sigma_2}, \ldots, x_{\sigma_{n-1}}^{(1)} = x_{\sigma_{n-1}} - x_{\sigma_n}, \quad x_{\sigma_n}^{(1)} = x_{\sigma_n} \tag{44}$$

gegeben, je nachdem speziell die Anordnung (23) oder allgemein (30) besteht, wobei für einen beliebigen Punkt $X = (x_1, \ldots, x_n)$

$$\mathfrak{x} = OX = x_1\mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n\mathfrak{e}_n = x_1^{(1)}\mathfrak{e}_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)}\mathfrak{e}_n^{(1)} \tag{45}$$

gilt. Allemal ist die durch (43) bzw. (44) gegebene Koordinatentransformation unimodular, d. h. von der Gestalt

$$x_\mu^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\mu\nu} x_\nu \tag{46}$$

[19] Statt $\mathfrak{e}'_\nu$, x'_ν, a'_ν schreiben wir nunmehr $\mathfrak{e}_\nu^{(1)}$, $x_\nu^{(1)}$, $a_\nu^{(1)}$, um mit der Bezeichnung $G', X', \mathfrak{E}'$ usw. für die durch Stürzen aus $G, X, \mathfrak{E}$ entstehenden Matrizen nicht in Kollision zu geraten.

mit ganzzahligen $g_{\mu\nu}$, deren Determinante $|g_{\mu\nu}| = 1$ ist, wobei die Grundvektoren gemäß (45) kontragredient zu den Koordinaten transformiert werden[20]. Bezeichnet $h_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ in der Determinante $|g_{\mu\nu}|$ die Adjunkte des Elements $g_{\mu\nu}$, so liefert

$$x_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g^{\nu\mu} x_\nu^{(1)} \tag{47}$$

die Auflösung von (46) und gemäß (45) ist

$$\mathfrak{e}_\mu = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu\mu} \mathfrak{e}_\nu^{(1)}, \tag{48}$$

$$\mathfrak{e}_\mu^{(1)} = \sum_{\nu=1}^{n} g^{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu} \mathfrak{e}_\nu. \tag{49}$$

Bei Einführung der zu einander inversen (reziproken) Matrizen

$$G = \begin{pmatrix} g_{11}, \ldots, g_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_{n1}, \ldots, g_{nn} \end{pmatrix} \text{ und } \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} g^{11}, \ldots, g^{n1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ g^{1n}, \ldots, g^{nn} \end{pmatrix},$$

ferner der durch Vertauschen von Zeilen und Kolonnen aus ihnen entstehenden „gestürzten" („transponierten", – auch „konjugiert" genannten) Matrizen

$$G' \text{ und } (G^{-1})' = (G')^{-1} = H,$$

sowie der Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; X^{(1)} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)} \\ \vdots \\ x_n^{(1)} \end{pmatrix}, \; \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1 \\ \vdots \\ \mathfrak{e}_n \end{pmatrix}, \; \mathfrak{E}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1^{(1)} \\ \vdots \\ \mathfrak{e}_1^{(1)} \end{pmatrix}$$

nebst ihren gestürzten Matrizen

$$X' = (x_1, \ldots, x_n), \quad X^{(1)'} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)}),$$
$$\mathfrak{E}' = (\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n), \quad \mathfrak{E}^{(1)'} = (\mathfrak{e}_1^{(1)}, \ldots, \mathfrak{e}_n^{(1)})$$

kann man die Gleichungen (46), (47), (45), (48), (49) zusammenfassend schreiben:

---

[20] Um unimodulare Koordinatentransformationen handelt es sich auch bei den später in §§ 4 bis 6 besprochenen Algorithmen, so daß unsere diesbezüglichen Bemerkungen auch auf sie Anwendung finden werden.

$$X^{(1)} = GX, \quad X = G^{-1} X^{(1)},$$
$$X^{(1)'} \mathfrak{E}^{(1)} = X' \mathfrak{E},$$
$$\mathfrak{E} = G' \mathfrak{E}^{(1)}, \quad \mathfrak{E}^{(1)} = (G')^{-1} \mathfrak{E} = H \mathfrak{E}.$$

17. Dabei kann man für den Poincaréschen Algorithmus die speziellen Werte der $g_{\mu\nu}$ und $g^{\mu\nu}$ unmittelbar den Formeln von Nr. **12** entnehmen. Führt man nämlich die speziellen Matrizen

$$G_{P.\,o.} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & -1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & -1 \\ 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}, \quad H_{P.\,o.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 1, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1, & 1, & \ldots, & 1, & 0 \\ 1, & 1, & \ldots, & 1, & 1 \end{pmatrix} \quad (50)$$

ein[21], dann hat man im Falle (23), wie aus (43), aus der zugehörigen Auflösung

$$x_1 = x_1^{(1)} + \ldots + x_n^{(1)}, \ \ldots, \ x_{n-1} = x_{n-1}^{(1)} + x_n^{(1)}, \ x_n = x_n^{(1)},$$

sowie aus (27) und (28) hervorgeht:

$$G = G_{P.\,o.}, \quad H = H_{P.\,o.};$$

im allgemeinen Falle (30) aber hat man

$$G = S^{-1} G_{P.\,o.} S, \quad H = S^{-1} H_{P.\,o.} S, \qquad (51)$$

wenn $S = (s_{\mu\nu})$ die Koeffizienten-Matrix derjenigen Transformation $y_\mu = \sum_\nu s_{\mu\nu} x_\nu$ bezeichnet, die mit

$$y_\mu = x_{\sigma_\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n) \qquad (52)$$

gleichbedeutend ist und somit einer Darstellung der Permutation $\Pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \ldots, & n \\ \sigma_1, & \sigma_2, & \ldots, & \sigma_n \end{pmatrix}$ durch eine lineare Substitution entspricht. Dabei ist ersichtlich die (nur aus einem Glied bestehende) Determinante $s = |s_{\mu\nu}| = \pm 1$; es ist die Adjunkte $s^{\mu\nu}$ gleich $s s_{\mu\nu}$ und die inverse Matrix S^{-1} fällt mit der gestürzten S' zu-

[21] Mit dem angehängten „*P. o.*" soll zum Unterschied von analogen späteren Bezeichnungen (*P. m.*, *A. l.*, *A. r.* in §§ 4, 5 und 6) angedeutet werden, daß es sich um das originale Poincarésche Verfahren handelt.

sammen. Ist Π anders geschrieben $= \begin{pmatrix} \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \\ 1, 2, \ldots, n \end{pmatrix}$, also die zu Π inverse Permutation $\Pi^{-1} = \begin{pmatrix} 1, 2, \ldots, n \\ \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n \end{pmatrix}$, so liefert

$$x_\mu = y_{\tau_\mu} \quad (\mu = 1, \ldots, n) \tag{53}$$

die Auflösung von (52) nach den x_μ; und wenn dafür $x_\mu = \sum_\nu t_{\mu\nu} y_\nu$ geschrieben, also $S' = S^{-1} = T = (t_{\mu\nu})$ gesetzt wird, dann hat man

$$s_{\mu\nu} = \delta_{\sigma_\mu \nu}, \quad t_{\mu\nu} = \delta_{\tau_\mu \nu}$$

($\delta_{ij} = 1$ bzw. 0 für $i = j$ bzw. $i \neq j$).

18. Wenn sich an den durch (46), (49) dargestellten ersten Schritt des Algorithmus weitere Schritte

$$x_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}^{(\lambda-1)} x_\nu^{(\lambda-1)}, \quad \mathfrak{e}_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} h_{\mu\nu}^{(\lambda-1)} \mathfrak{e}_\nu^{(\lambda-1)} \tag{54}$$

anschließen, wobei, da es sich wieder um unimodulare Transformationen handelt, die Determinante $|g_{\mu\nu}^{(\lambda-1)}| = 1$ und $h_{\mu\nu}^{(\lambda-1)}$ gleich der Adjunkte $g^{(\lambda-1)\,\mu\nu}$ des Elements $g_{\mu\nu}^{(\lambda-1)}$ in dieser Determinante ist, dann führt die Zusammensetzung der einzelnen Koordinatentransformationen (54) auf

$$x_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} c_{\mu\nu}^{(\lambda)} x_\nu, \tag{55}$$

$$\mathfrak{e}_\mu^{(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{n} k_{\mu\nu}^{(\lambda)} \mathfrak{e}_\nu. \tag{56}$$

Natürlich ist auch diese Koordinatentransformation unimodular, somit $|c_{\mu\nu}^{(\lambda)}| = 1$, sowie $k_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ gleich der Adjunkte $c^{(\lambda)\,\mu\nu}$ von $c_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ in dieser Determinante. Die Matrizen

$$C^{(\lambda)} = (c_{\mu\nu}^{(\lambda)}), \quad K^{(\lambda)} = (C^{(\lambda)-1})' = (C^{(\lambda)'})^{-1} = (k_{\mu\nu}^{(\lambda)}) \tag{57}$$

stehen dabei mit den Koeffizientenmatrizen[22]

[22] Die Matrizen (58) stehen mit den für den Algorithmus charakteristischen Matrizen (50) in der Beziehung (51), wobei natürlich je nach der Größenanordnung der Zahlen $a_1^{(\varrho)}, \ldots, a_n^{(\varrho)}$ die Transformation $S = S^{(\varrho)}$ im allgemeinen mit ϱ wechselt.

$$G_{\mu\nu}^{(\varrho)} = (g_{\mu\nu}^{(\varrho)}), \quad H_{\mu\nu}^{(\varrho)} = (h_{\mu\nu}^{(\varrho)}) = (G_{\mu\nu}^{(\varrho)\prime})^{-1} = (G_{\mu\nu}^{(\varrho)-1})' \tag{58}$$

der einzelnen Schritte (54) gemäß

$$X^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} x_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ x_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} = G^{(\lambda-1)} \dots G^{(1)} G X, \quad \mathfrak{E}^{(\lambda)} = \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_1^{(\lambda)} \\ \vdots \\ \mathfrak{e}_n^{(\lambda)} \end{pmatrix} = H^{(\lambda-1)} \dots H^{(1)} H \mathfrak{E}$$

in der Beziehung

$$C^{(\lambda)} = G^{(\lambda-1)} \dots G^{(1)} G, \quad K^{(\lambda)} = H^{(\lambda-1)} \dots H^{(1)} H.$$

Allemal gilt dabei

$$\mathfrak{x} = \sum_{\nu} x_\nu^{(\lambda)} \mathfrak{e}_\nu^{(\lambda)} = \sum_{\nu} x_\nu \mathfrak{e}_\nu,$$

d. h.

$$X^{(\lambda)\prime} \mathfrak{E}^{(\lambda)} = X' \mathfrak{E}.$$

Die einzelnen Gleichungen (56), anders gesagt die Zeilen der Matrix $K^{(\lambda)}$ liefern nun die Koordinaten der Grundvektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(\lambda)}$ ($\mu = 1, \dots, n$), also diejenigen Systeme $k_{\mu 1}^{(\lambda)}, \dots, k_{\mu n}^{(\lambda)}$ ganzer rationaler Zahlen, durch die wir zu Approximationen an das Zahlenverhältnis $a_1 : a_2 : \dots : a_n$ zu gelangen wünschen.

Aus Beispielen, von denen einige l. c.[4] gebracht werden sollen, geht hervor, daß diese Erwartung in vielen Fällen – aber durchaus nicht ausnahmslos – sich erfüllt.

§ 4. Eine Modifikation des Poincaré'schen Algorithmus.

19. Der in § 3 für ein System von n Zahlen besprochene Poincarésche Algorithmus ist ebenso wie die in Nr. **4** ff. angegebene Gestalt des Euklidischen Algorithmus, in die jener für $n = 2$ übergeht, ein successives Subtraktionsverfahren. Es liegt nahe, den Poincaréschen Algorithmus, wie folgt (Nr. **20**, **21**) zu einem Divisionsverfahren umzugestalten, das dann für $n = 2$ mit dem Euklidischen Divisionsverfahren (Nr. **9**, **10**) zusammenfällt. Während aber im Euklidischen Falle $n = 2$ jeder Schritt des Divisionsverfahrens nur eine Zusammenziehung mehrerer Schritte des Subtraktionsverfahrens darstellt, gilt dies bei unserer Modifikation des Poincaréschen Verfahrens für $n \geqq 3$ nicht allemal und es kann vorkommen, daß das modifizierte Ver-

fahren approximierende n-tupel von ganzen rationalen Zahlen liefert, die sich beim ursprünglichen Subtraktionsverfahren überhaupt nicht einstellen (vgl. Nr. **27**).

20. Sei wie in § 3 von einem System positiver ganzer Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ ausgegangen, dem wir mittels der Grundvektoren $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ eines Systems affiner Koordinaten den Vektor $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + \ldots + a_n \mathfrak{e}_n$ zuordnen. Wir können die a_ν von vornherein als durchwegs verschieden annehmen, da für den Fall gleicher Werte unter den a_ν das in Nr. **14** über Reduktionen Gesagte unverändert übernommen werden soll. Außerdem wird es genügen, die Zahlen a_ν gemäß

$$a_1 > a_2 > \ldots > a_n > 0 \tag{59}$$

der Größe nach angeordnet vorauszusetzen, da von diesem Fall aus zu beliebigen Anordnungen völlig analog wie in § 3 übergegangen werden kann. Um nun vom System der Zahlen a_ν zu einem neuen System $a'_1, \ldots, a'_n$ zu gelangen, bilden wir die Quotienten $a_\nu : a_{\nu+1}$ und die unterhalb eines jeden von ihnen liegenden größten ganzen Zahlen (vgl. § 1, Nr. **2**):

$$q_1 = \left\{\frac{a_1}{a_2}\right\}, \ldots, q_{n-1} = \left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\}; \tag{60}$$

wir setzen dann die a'_ν gleich den zugehörigen kleinsten positiven Resten:

$$a'_1 = a_1 - q_1 a_2, \ldots, a'_{n-1} = a_{n-1} - q_{n-1} a_n, \quad a'_n = a_n. \tag{61}$$

Mit diesem ersten Schritt des „modifizierten Poincaréschen Algorithmus" verbindet sich die Koordinatentransformation

$$x'_1 = x_1 - q_1 x_2, \ldots, x'_{n-1} = x_{n-1} - q_{n-1} x_n, \quad x'_n = x_n \tag{62}$$

nebst der gemäß

$$\mathfrak{x} = x_1 \mathfrak{e}_1 + \ldots + x_n \mathfrak{e}_n = x'_1 \mathfrak{e}'_1 + \ldots + x'_n \mathfrak{e}'_n$$

kontravariant damit verknüpften Transformation der Grundvektoren[23]:

[23] An Stelle der Formeln (65) wird man sich in speziellen Beispielen bequemer einer rekursorischen Berechnung der $\mathfrak{e}'_\nu$ gemäß

$$\mathfrak{e}'_1 = \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}'_\nu = \mathfrak{e}_\nu + q_{\nu-1} \mathfrak{e}'_{\nu-1} \text{ für } 1 < \nu \leqq n \tag{63}$$

bedienen.

$$\mathfrak{e}_1 = \mathfrak{e}_1', \ \mathfrak{e}_2 = -q_1\,\mathfrak{e}_1' + \mathfrak{e}_2', \ \ldots, \ \mathfrak{e}_n = -q_{n-1}\,\mathfrak{e}_{n-1}' + \mathfrak{e}_n' \quad (64)$$

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1, \ \mathfrak{e}_2' = q_1\,\mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_2, \ \mathfrak{e}_3' = q_1 q_2\,\mathfrak{e}_1 + q_2\,\mathfrak{e}_2 + \mathfrak{e}_3, \ \ldots \quad (65)$$
$$\ldots, \ \mathfrak{e}_n' = q_1 q_2 \cdots q_{n-1}\,\mathfrak{e}_1 + q_2 \cdots q_{n-1}\,\mathfrak{e}_2 + \cdots + q_{n-1}\mathfrak{e}_{n-1} + \mathfrak{e}_n.$$

Es ist klar, wie das Verfahren fortzusetzen ist; wie schon bemerkt, gelten bei Auftreten von Systemen $a_1^{(\lambda)}, \ldots, a_n^{(\lambda)}$ mit nicht durchwegs verschiedenen Zahlen unverändert die in § 3, Nr. **14** über Reduktionen und über eventuellen Abschluß des Verfahrens gegebenen Entwicklungen.

21. Da (62), ebenso wie die Transformation (43) in § 3, unimodular ist, so gilt alles in Nr. **16–18** Gesagte, soferne man nur an Stelle der in Nr. **17** eingeführten Matrizen $G_{P.o.}$, $H_{P.o.}$ die Koeffizientensysteme von (62) und (65), also die Matrizen

$$G_{P.m.} = \begin{pmatrix} 1, & -q_1, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & 1, & -q_2, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, \ldots, & 0, & 1, -q_{n-1} \\ 0, \ldots, & 0, & 0, \quad 1 \end{pmatrix} \qquad (66)$$

$$H_{P.m.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, \ldots, 0 \\ q_1, & 1, & 0, \ldots, 0 \\ q_1 q_2, & q_2, & 1, \ldots, 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ q_1 q_2 \cdots q_{n-1}, & q_2 \cdots q_{n-1}, & \cdots, q_{n-1}, \quad 1 \end{pmatrix}$$

treten läßt. Natürlich sind bei jedem Schritt des Algorithmus die analog zu (60) gebildeten Zahlen $q_1^{(\varrho)}, \ldots, q_{n-1}^{(\varrho)}$ und demgemäß auch die Matrizen[24]

$$G_{P.m.} = G_{P.m)}^{(\varrho)}, \quad H_{P.m.} = H_{P.m.}^{(\varrho)}$$
$$(\varrho = 0, 1, 2, \ldots)$$

von ϱ abhängig[25].

---

[24] Mit der Bezeichnung „*P. m.*" wird angedeutet, daß es sich um das modifizierte Poincarésche Verfahren handelt (vgl. Anm. 21).

[25] Beim Übergang von den $x_\nu^{(\varrho)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho)}$ zu den $x_\nu^{(\varrho+1)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho+1)}$ treten somit analog zu (51) die Koeffizienten-Matrizen

$$G^{(\varrho)} = S^{(\varrho)-1}\, G_{P.m.}^{(\varrho)}\, S^{(\varrho)}, \quad H^{(\varrho)} = S^{(\varrho)-1}\, H_{P.m.}^{(\varrho)}\, S^{(\varrho)} \qquad (67)$$

auf, unter $S^{(\varrho)}$ wie in Anm. 22 die zur Größenanordnung der Zahlen $a_1^{(\varrho)}, \ldots, a_n^{(\varrho)}$ gehörige Transformation S verstanden.

§ 5. Der Algorithmus lentus.

22. Das Euklidische Subtraktionsverfahren von Nr. **4** ff. entspricht der Tendenz, mit möglichst kleinen Schritten von den ursprünglichen Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ ausgehend zu neuen Vektoren zu gelangen, die sich dem gegebenen Vektor $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2$ allmählich annähern. Die analoge Tendenz möglichst langsamer Abänderungen verfolgt für eine beliebige Dimensionszahl n ein im Folgenden dargestelltes Verfahren, das bei jedem Schritt alle Grundvektoren bis auf einen einzigen beibehält und das wir demgemäß (im Gegensatz zum „Algorithmus rapidus" des nächsten §) als „Algorithmus lentus" (abgekürzt: A. l.) bezeichnen wollen.

Betrachten wir zunächst den Fall von $n = 3$ Dimensionen. Legt man hier für die Ausgangs-Koordinaten ein cartesisches Koordinatensystem zugrunde mit den drei gleich langen und paarweise senkrechten Grundvektoren $\mathfrak{e}_1 = OE_1$, $\mathfrak{e}_2 = OE_2$, $\mathfrak{e}_3 = OE_3$, dann werden im Falle[26] $a_1 > a_2 > a_3 > 0$ die Grundvektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ beibehalten und nur der Vektor $\mathfrak{e}_3$ wird durch den Vektor $\mathfrak{e}_3' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_3 = OE_{1,3}$ ersetzt, so daß das neue Grund-Parallelepiped ein schiefes Prisma mit dem Quadrat $OE_1E_2E_{1,2}$ als Basis und $OE_{1,3}$ als einer seiner Seitenlinien ist. Im neuen Koordinatensystem hat der Vektor

$$\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3 = a_1' \mathfrak{e}_1' + a_2' \mathfrak{e}_2' + a_3' \mathfrak{e}_3'$$

ersichtlich die Koordinaten

$$a_1' = a_1 - a_3, \quad a_2' = a_2, \quad a_3' = a_3.$$

Analog wird für beliebiges n im Falle (59) der erste Schritt unseres Verfahrens durch

$$a_1' = a_1 - a_n,\ a_2' = a_2,\ \ldots,\ a_n' = a_n$$

nebst

$$\mathfrak{e}_1' = \mathfrak{e}_1,\ \ldots,\ \mathfrak{e}_{n-1}' = \mathfrak{e}_{n-1},\ \mathfrak{e}_n' = \mathfrak{e}_1 + \mathfrak{e}_n \tag{68}$$

dargestellt. Wieder ist die entsprechende Koordinatentransformation

$$x_1 = x_1 - x_n, \quad x_\nu' = x_\nu \text{ für } 2 \leqq \nu \leqq n \tag{69}$$

[26] In diesem Falle kommt von den drei Vektoren $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ der Vektor $\mathfrak{e}_1$ der Richtung nach dem Vektor $\mathfrak{a} = a_1 \mathfrak{e}_1 + a_2 \mathfrak{e}_2 + a_3 \mathfrak{e}_3$ am nächsten, während $\mathfrak{e}_3$ von $\mathfrak{a}$ am weitesten abliegt.

unimodular und es gelten für den Algorithmus alle Betrachtungen aus Nr. **16–18**, wobei nur die Matrizen $G_{P.o.}$ und $H_{P.o.}$ zu ersetzen sind durch die Koeffizienten-Matrizen von (69) und (68), also durch

$$G_{A.l.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -1 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ und } H_{A.l.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \quad (70)$$

Wie bei einer von (59) abweichenden Größenanordnung der a_ν zu verfahren ist, ist aus den analogen Betrachtungen in §§ 3 und 4 klar; desgleichen überträgt sich das dort über Fortsetzung des Verfahrens[27] sowie über Reduktionen und über eventuellen Abschluß Gesagte.

§ 6. Der Algorithmus rapidus.

23. Wenn bei dem in § 5 besprochenen Algorithmus lentus die Zahlen eines gegebenen Systems $a_1, \ldots, a_n$ bei jedem Schritt nur einer langsamen Abnahme unterworfen werden, ist bei dem nunmehr zu besprechenden „Algorithmus rapidus" (abgekürzt: A. r.) die entgegengesetzte Tendenz maßgeblich. Wieder genügt es, die Anordnung (59) vorauszusetzen. Es mögen dann die Quotienten $a_\nu : a_n$ und die unterhalb eines jeden von ihnen liegenden größten ganzen Zahlen (vgl. § 1, Nr. **2**)

$$q_1 = \left\{\frac{a_1}{a_n}\right\}, \ldots, q_{n-1} = \left\{\frac{a_{n-1}}{a_n}\right\} \quad (71)$$

gebildet, die Zahlen a'_ν eines neuen Zahlensystems aber gemäß

$$a'_\nu = a_1 - q_1 a_n, \ldots, a'_{n-1} = a_{n-1} - q_{n-1} a_n, \; a'_n = a_n \quad (72)$$

bestimmt werden. In Einklang mit der zugehörigen Koordinatentransformation

---

[27] Die zum Übergang von den $x_\nu^{(\varrho)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho)}$ zu den $x_\nu^{(\varrho+\nu)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho+\nu)}$ gehörigen Koeffizienten-Matrizen $G^{(\varrho)}$, $H^{(\varrho)}$ stehen dabei mit den von ϱ unabhängigen Matrizen (70) in der analogen Beziehung, wie beim Poincaréschen Algorithmus mit den Matrizen (50), u. zw. durch Vermittlung von Transformationen $S = S^{(\varrho)}$; vgl. Anm. 22.

$$x_\nu' = x_\nu - q_\nu\, x_n \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq n-1, \quad x_n' = x_n \tag{73}$$

ist dabei gemäß $\mathfrak{x} = \Sigma\, x_\nu'\, \mathfrak{e}_\nu' = \Sigma\, x_\nu\, \mathfrak{e}_\nu$ zu setzen:

$$\mathfrak{e}_\nu' = \mathfrak{e}_n \text{ für } 1 \leqq \nu \leqq n-1,\ \mathfrak{e}_n' = q_1\mathfrak{e}_1 + \cdots + q_{n-1}\,\mathfrak{e}_{n-1} + \mathfrak{e}_n. \tag{74}$$

Auch hier ist die Koordinatentransformation unimodular und die Entwicklungen aus Nr. **16–18** bleiben in Geltung, wenn man die Matrizen $G_{P.o.}$, $H_{P.o.}$ aus Nr. **17** ersetzt durch die Koeffizienten-Matrizen von (73) bzw. (74), d. h. durch

$$G_{A.r.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & -q_1 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0, & -q_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 1, & -q_{n-1} \\ 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$H_{A.r.} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & 1, & 0 \\ q_1, & q_2, & \ldots, & q_{n-1}, & 1 \end{pmatrix}. \tag{75}$$

Fortsetzung des Verfahrens über den durch (72), (74) gegebenen ersten Schritt hinaus[28], etwaige Reduktionen bzw. Abschluß des Verfahrens erfolgen analog wie in den §§ 3, 4, 5.

§ 7. Einige Beispiele.

24. In einem ersten Beispiel wählen wir $n = 3$ und $a_1 = 5733$, $a_2 = 2548$, $a_3 = 1820$ und fragen einerseits nach dem größten gemeinsamen Teiler dieser drei Zahlen, andererseits nach kleineren ganzen Zahlen $k_1 : k_2 : k_3$, die das Verhältnis $a_1 : a_2 : a_3$ approximieren. Die folgenden Tabellen geben für jeden der oben in §§ 3–6 betrachteten vier Algorithmen den Verlauf des Verfahrens wieder. Zur Erläuterung seien einige Bemerkungen vorausgeschickt.

[28] Natürlich sind die zum Übergang von den $x_\nu^{(\varrho)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho)}$ zu den $x_\nu^{(\varrho+1)}$, $\mathfrak{e}_\nu^{(\varrho+1)}$ gehörigen Quotienten $q_\nu = q_\nu^{(\varrho)}$ und dementsprechend auch die gemäß (75) gebildeten Matrizen $G_{A.r.}^{(\varrho)}$, $H_{A.r.}^{(\varrho)}$ von ϱ abhängig. Für die Koeffizienten-Matrizen $G^{(\varrho)}$, $H^{(\varrho)}$ gelten dann die zu (67) in Anm. 25 analogen Formeln.

Beim originalen und beim modifizierten Poincaréschen Algorithmus („P. o." und „P. m.") sind unter die drei Zahlen $a_1^{(\lambda)}$, $a_2^{(\lambda)}$, $a_3^{(\lambda)}$ des Systems mit der Nummer λ zur Kenntlichmachung der Größenanordnung kleine eingeklammerte Ziffern geschrieben: (1), (2), (3). Dadurch ist beim P.o.-Algorithmus der nächste Schritt bereits ersichtlich. Beispielsweise hat man beim Übergang von $\lambda = 4$ zu $\lambda = 5$ von der mit (1) versehenen Zahl 364 die mit (2) versehene Zahl 273 abzuziehen, von letzterer wiederum die mit (3) versehene Zahl 91, so daß in der Zeile $\lambda = 5$ die Zahlen $a_2^{(5)} = 364 - 273 = 91$, $a_1^{(5)} = 273 - 91 = 182$, $a_3^{(5)} = a_3^{(4)} = 91$ und die Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(5)} = \mathfrak{e}_2^{(4)} = (6, 3, 2)$, $\mathfrak{e}_1^{(5)} = \mathfrak{e}_1^{(4)} + \mathfrak{e}_2^{(4)} = (10, 4, 3) + (6, 3, 2) = (16, 7, 5)$, $\mathfrak{e}_3^{(5)} = \mathfrak{e}_3^{(4)} + \mathfrak{e}_1^{(4)} + \mathfrak{e}_2^{(4)} = \mathfrak{e}_3^{(4)} + \mathfrak{e}_1^{(5)} = (9, 4, 3) + (16, 7, 5) = (25, 11, 8)$ sich ergeben. Beim P.m.-Algorithmus sind außer den Ziffern (1), (2), (3) noch in eckigen Klammern die Quotienten angegeben, die den Übergang zur nächsten Zeile mitbestimmen; beispielsweise in der mit $\lambda = 0$ bezeichneten Zeile die Quotienten

$$q_1 = \left\lfloor \frac{a_1}{a_2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{5733}{2548} \right\rfloor = 2 \text{ und } q_2 = \left\lfloor \frac{a_2}{a_3} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2548}{1820} \right\rfloor = 1.$$

Durch die mit (1), (2), (3) markierte Anordnung und die genannten Quotienten ist dann nicht nur der Übergang zu den $a_\nu^{(\lambda+1)}$ in der nächsten Zeile festgelegt, sondern auch zu den $\mathfrak{e}_\nu^{(\lambda+1)}$; bezüglich der letzteren ist zur Erleichterung noch $q_1 \mathfrak{e}_1 = 2 \cdot (1, 0, 0) = (2, 0, 0)$ in kleineren Ziffern unter $\mathfrak{e}_2 = (0, 1, 0)$ geschrieben, woraus man $\mathfrak{e}_2^{(1)} = \mathfrak{e}_2 + q_1 \mathfrak{e}_1 = (0, 1, 0) + (2, 0, 0) = (2, 1, 0)$ gewinnt; ferner ist analog $q_2 \mathfrak{e}_2^{(1)} = 1 \cdot (2, 1, 0) = (2, 1, 0)$ in kleineren Ziffern unter $\mathfrak{e}_3 = (0, 0, 1)$ geschrieben, woraus man $\mathfrak{e}_3^{(1)} = \mathfrak{e}_3 + q_2 \mathfrak{e}_2^{(1)} = (0, 0, 1) + (2, 1, 0) = (2, 1, 1)$ erhält.

Beim Algorithmus lentus (A. l.) und Algorithmus rapidus (A. r.) ist von den drei Zahlen $a_1^{(\lambda)}$, $a_2^{(\lambda)}$, $a_3^{(\lambda)}$ jeweils die kleinste durch ein beigesetztes (ω), beim A. l.-Verfahren außerdem die größte durch ein beigesetztes (α) kenntlich gemacht. Für das A.l.-Verfahren ist damit der Übergang zur nächsten Zeile vollständig gegeben: Von der größten Zahl, z. B. für $\lambda = 6$ von $a_3^{(6)} = 1092$ wird die kleinste $a_1^{(6)} = 637$ subtrahiert: $a_3^{(7)} = a_3^{(6)} - a_1^{(6)} = 1092 - 637 = 455$, während die anderen Zah-

len $a_1^{(6)}$, $a_2^{(6)}$ unverändert in die nächste Zeile übernommen werden; im Einklang damit wird zu dem zur kleinsten Zahl $a_1^{(6)}$ gehörigen Vektor $\mathfrak{e}_1^{(6)} = (1, 0, 0)$ der zur größten Zahl $a_3^{(6)}$ gehörige Vektor $\mathfrak{e}_3^{(6)} = (2, 1, 1)$ addiert, wodurch $\mathfrak{e}_1^{(7)} = \mathfrak{e}_1^{(6)} + \mathfrak{e}_3^{(6)} = (3, 1, 1)$ erhalten wird, während $\mathfrak{e}_2^{(6)} = (4, 2, 1)$ und $\mathfrak{e}_3^{(6)} = (2, 1, 1)$ unverändert in die nächste Zeile genommen werden. Beim A.r.-Verfahren sind in eckigen Klammern die Quotienten angegeben, die für den Übergang zur nächsten Zeile maßgeblich sind, beispielsweise in der Zeile $\lambda = 0$ die Quotienten $q_1 = \left[\frac{a_1}{a_3}\right] = \left[\frac{5733}{1820}\right] = 3$, $q_2 = \left[\frac{a_2}{a_3}\right] = \left[\frac{2548}{1820}\right] = 1$. Zur größeren Bequemlichkeit der Rechnung sind (in kleineren Ziffern) noch unter a_1 die davon zu subtrahierende Zahl $q_1 a_3 = 3 \cdot 1820 = 5460$ und unter a_2 die davon zu subtrahierende Zahl $q_2 a_3 = 1 \cdot 1820 = 1820$ geschrieben; analog unter $\mathfrak{e}_3 = (0, 0, 1)$ die dazu zu addierenden Vektoren $q_1 \mathfrak{e}_1 = 3 \cdot (1, 0, 0) = (3, 0, 0)$ und $q_2 \mathfrak{e}_2 = 1 \cdot (0, 1, 0) = (0, 1, 0)$. Das Ergebnis dieser Zahlensubtraktionen bzw. Vektoradditionen gibt dann die nächste Zeile ($\lambda = 1$) mit den Zahlen 273, 728 und dem Vektor (3, 1, 1).

Zur Förderung der Kontrolle-Möglichkeiten, vor allem aber, um gewisse theoretische Bemerkungen von früher zu illustrieren, sind bei allen vier Algorithmen nicht nur für jedes λ die drei Zahlen $a_1^{(\lambda)}$, $a_2^{(\lambda)}$, $a_3^{(\lambda)}$ ihrem Werte nach angegeben, sondern auch als ganzzahlige Linearformen von a_1, a_2, a_3 in jener Gestalt, wie sich die $a_\nu^{(\lambda)}$ im Laufe des Verfahrens aus den a_ν ergeben. (Wegen der Schreibweise mit Sternchen * vgl. Anm. 29). Beispielsweise sind beim P.o.-Verfahren in der Zeile $\lambda = 1$ nicht nur die Werte $a_1^{(1)} = 3185$, $a_2^{(1)} = 728$ angegeben, sondern außerdem deren Darstellung durch $a_1 - a_2$ und $a_2 - a_3$; ebenso steht in der Zeile $\lambda = 2$ nicht nur der Wert $a_3^{(2)} = 1092$, sondern entsprechend seiner Entstehung aus $a_3^{(2)} = a_3^{(1)} - a_2^{(1)} = a_3 - (a_2 - a_3)$ auch der Ausdruck $-a_2 + 2a_3$. Die Koeffizienten dieser Linearformen sind natürlich nichts anderes als die $c_{\mu\nu}^{(\lambda)}$ in den Koordinaten-Transformationsformeln (55), so daß beispielsweise für den P.o.-Algorithmus und für $\lambda = 4$ die gemäß (57) mit $C^{(4)}$ bezeichnete Matrix durch

$$C^{(4)} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -3 \\ 0, & 3, & -4 \\ -1, & -2, & 6 \end{pmatrix} \tag{76}$$

gegeben ist. Andererseits liefern die in derselben Zeile $\lambda = 4$ angegebenen Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(4)}$, $\mathfrak{e}_2^{(4)}$, $\mathfrak{e}_3^{(4)}$ mit ihren Koordinaten unmittelbar die gemäß (57) mit $K^{(4)}$ bezeichnete Matrix, so daß wir in unserem Beispiel

$$K^{(4)} = \begin{pmatrix} 10, & 4, & 3 \\ 6, & 3, & 2 \\ 9, & 4, & 3 \end{pmatrix} \tag{77}$$

haben. Gemäß unseren Überlegungen in Nr. **18** muß nun die gestürzte Matrix (76) zur Matrix (77) invers, d. h. es muß das Matrizenprodukt

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & -1 \\ 0, & 3, & -2 \\ -3, & -4, & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10, & 4, & 3 \\ 6, & 3, & 2 \\ 9, & 4, & 3 \end{pmatrix}$$

gleich der identischen Matrix sein, wie man es auch unmittelbar bestätigt. Natürlich ist auch ohne die Darstellung der $a_\nu^{(\lambda)}$ durch die a_ν, allein mit den Werten der $a_\nu^{(\lambda)}$ eine Kontrolle möglich, indem man nachprüft, ob $a_1^{(\lambda)}\ \mathfrak{e}_1^{(\lambda)} + a_2^{(\lambda)}\ \mathfrak{e}_2^{(\lambda)} + a_3^{(\lambda)}\ \mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$ den ursprünglichen Vektor $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ergibt. Im eben betrachteten Fall erfolgt diese Kontrolle durch Bestätigung der Gleichung

$$\begin{aligned} &273 \cdot \mathfrak{e}_1^{(4)} + 364 \cdot \mathfrak{e}_2^{(4)} + 91 \cdot \mathfrak{e}_3^{(4)} = \\ &= 273 \cdot (10, 4, 3) + 364 \cdot (6, 3, 2) + 91 \cdot (9, 4, 3) = \\ &= (5733, 2548, 1820). \end{aligned}$$

Die eben besprochene Darstellung der Zahlen $a_\nu^{(\lambda)}$ ($\nu = 1, 2, 3$) durch die Zahlen a_1, a_2, a_3 ist nur bis zur ersten Reduktion durchgeführt. Die beiden Zahlen, mit denen das Verfahren fortgesetzt wird – wie z. B. beim A.r.-Verfahren bei dem mit „2 r" (2 reduziert) bezeichneten Schritt die beiden Zahlen 273 und

182 –, wurden mit b_1, b_2 bezeichnet[29] und bei jedem weiteren Schritt (bis zur nächsten Reduktion) die neugebildeten Zahlen als Linearformen von b_1, b_2 ausgedrückt. Es ist dann beispielsweise im angezogenen Beispiel $a_4^{(1)} = b_1 - b_2 = 91$, $a_4^{(2)} = -b_1 + 2\,b_2 = 91$, was die Koeffizienten-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1, & -1 \\ -1, & 2 \end{pmatrix} \tag{78}$$

liefert. Andererseits liefern $\mathfrak{e}_1^{(4)}$, $\mathfrak{e}_2^{(4)}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} 41, & 18, & 13 \\ 22, & 10, & 7 \end{pmatrix} \tag{79}$$

und das Produkt der gestürztenMatrix (78) mit der Matrix (79) liefert

$$\begin{pmatrix} 19, & 8, & 6 \\ 3, & 2, & 1 \end{pmatrix},$$

also genau die Matrix der beiden in Zeile 2 r. aufgeführten Vektoren, die mit b_1 bzw. b_2 multipliziert und addiert den Ausgangsvektor $\mathfrak{a}$ ergeben:

$$273 \cdot (19, 8, 6) + 182 \cdot (3, 2, 1) = (5733, 2548, 1820).$$

Jeder der vier unten durchgeführten Algorithmen liefert natürlich als Abschluß den größten gemeinsamen Teiler $t = 91$ der drei Zahlen 5733, 2548, 1820 sowie das Verhältnis dieser drei Zahlen in der teilerfremden Gestalt 63 : 28 : 20. Ferner ergibt sich bei jedem Verfahren eine gewisse Anzahl approximierender Verhältnisse, auf die wir noch in Nr. **27** zurückkommen.

[29] Daß zur Weiterführung des reduzierten Verfahrens für die Eintragung von $b_2 = 182$ von den beiden mit $a_2^{(\lambda)}$ und $a_3^{(\lambda)}$ überschriebenen Kolonnen (und analog von den beiden mit $\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$ überschriebenen Kolonnen) die mit $a_2^{(\lambda)}$ (bzw. $\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$) überschriebene gewählt wurde, ist völlig willkürlich und ohne Belang; vgl. die analoge Bemerkung in Nr. **11**, Anm. 17. In die weiterhin entbehrlich gewordenen Rubriken sind Sternchen (*) eingesetzt. Außerdem zeigen es übrigens solche Sternchen bei den obgenannten Linearformen in a_1, a_2, a_3 an, wenn ein a_ν den Koeffizienten 0 hat, so daß beispielsweise $a_1 * - 3\,a_3$ für $a_1 + 0 \cdot a_2 - 3\,a_3$ steht.

Algorithmus P. o.: Poincaré's originales Verfahren

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$	$e_3^{(\lambda)}$
0	a_1 * * 5733 (1)	* a_2 * 2548 (2)	* * a_3 1820 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	a_1-a_2 * 3185 (1)	* a_2-a_3 728 (3)	,, (2)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$a_1-a_2-a_3$ 1365 (1)	,, (3)	* $-a_2+2a_3$ 1092 (2)	,,	3, 2, 1	2, 1, 1
3	a_1 * $-3a_3$ 273 (3)	,, (1)	* $-2a_2+3a_3$ 364 (2)	,,	6, 3, 2	3, 1, 1
4	,, (2)	* $3a_2-4a_3$ 364 (1)	$-a_1-2a_2+6a_3$ 91 (3)	10, 4, 3	,,	9, 4, 3
5	$2a_1+2a_2-9a_3$ 182	$-a_1+3a_2-a_3$ 91	,,	16, 7, 5	,,	25, 11, 8 zu $e_2^{(5)}$
5 r.	b_1 * 182 (1)	* b_2 91 (2)	*	,,	31, 14, 10	*
6	b_1-b_2 91	,,	*	,,	47, 21, 15 zu $e_1^{(6)}$	*
6 r.	91	*	*	63, 28, 20	*	*

Algorithmus P. m.: Poincaré's modifiziertes Verfahren

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$	e_3^{λ}
0	a_1 * * 5733 (1) [2]	* a_2 * 2548 (2) [1]	* * a_3 1820 (3) .	1, 0, 0 .	0, 1, 0 2, 0, 0	0, 0, 1 2, 1, 0
1	a_1-2a_2 * 637 (3)	* a_2-a_3 728 (2) [1]	,, (1) [2]	,, 6, 3, 2	2, 1, 0 4, 2, 2	2, 1, 1 .
2	,, (1) [1]	$-a_1+3a_2-a_3$ 91 (3)	$*-2a_2+3a_3$ 364 (2) [3]	7, 3, 2 .	6, 3, 2 27, 12, 9	,, 7, 3, 2
3	a_1 * $-3a_3$ 273	,,	$3a_1-11a_2+6a_3$ 91	,,	33, 15, 11	9, 4, 3 zu $e_2^{(3)}$
3 r.	b_1 * 273 (1) [2]	* b_2 91 (2)	*	,,	42, 19, 14 14, 6, 4	*
4	b_1-2b_2 91	,,	*	,,	56, 25, 18 zu $e_1^{(4)}$	*
4, r.	91	*	*	63, 28, 20	*	*

Algorithmus lentus (A. l.)

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$	$e_3^{(\lambda)}$
0	a_1 * * 5733 (α)	* a_2 * 2548	* * a_3 1820 (ω)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	a_1 * $-a_3$ 3913 (α)	,,	,, (ω)	,,	,,	1, 0, 1
2	a_1 * $-2a_3$ 2093	,, (α)	,, (ω)	,,	,,	2, 0, 1
3	,, (α)	* a_2-a_3 728 (ω)	,,	,,	,,	2, 1, 1
4	$a_1-a_2-a_3$ 1365	,, (ω)	,, (α)	,,	1, 1, 0	,,
5	,, (α)	,, (ω)	* $-a_2+2a_3$ 1092	,,	3, 2, 1	,,
6	a_1-2a_2 * 637 (ω)	,,	,, (α)	,,	4, 2, 1	,,
7	,,	,, (α)	$-a_1+a_2+2a_3$ 455 (ω)	3, 1, 1	,,	,,
8	,, (α)	a_1 * $-3a_3$ 273 (ω)	,,	,,	,,	6, 3, 2
9	* $-2a_2+3a_3$ 364	,, (ω)	,, (α)	,,	7, 3, 2	,,
10	,, (α)	,,	$-2a_1+a_2+5a_3$ 182 (ω)	,,	13, 6, 4	,,
11	$2a_1-3a_2-2a_3$ 182	,,	,,	,,	,,	9, 4, 3 zu $e_1^{(11)}$
11, r.	b_1 * 182 (ω)	* b_2 273 (α)	*	12, 5, 4	13, 6, 4	*
12	,, (α)	$-b_1+b_2$ 91 (ω)	*	25, 11, 8	,,	*
13	$2b_1-b_2$ 91	,,	*	,,	38, 17, 12 zu $e_1^{(13)}$	*
13, r.	91	*	*	63, 28, 20	*	*

Algorithmus rapidus (A. r.)

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{c}_1^{(\lambda)}$	$\mathfrak{c}_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{c}_3^{(\lambda)}$
0	a_1 * * 5733 [3] 5460	* a_2 * 2548 [1] 1820	* * a_3 1820 (ω)	1, 0, 0 [3]	0, 1, 0 [1]	0, 0, 1 3, 0, 0 0, 1, 0
1	a_1 * $-3a_3$ 273 (ω)	* $a_2 - a_3$ 728 [2] 546	,, [6] 1638	,, 0, 2, 0 18, 6, 6	,, [2]	3, 1, 1 [6]
2	,,	$-2a_1+a_2+5a_3$ 182	$-6a_1$ *$+19a_3$ 182	19, 8, 6	,,	,, zu $\mathfrak{c}_2^{(2)}$
2,r.	b_1 * 273 [1] 182	* b_2 182 (ω)	*	,,	3, 2, 1 19, 8, 6	*
3	$b_1 - b_2$ 91 (ω)	,, [1] 91	*	,, 22, 10, 7	22, 10, 7	*
4	,,	$-b_1+2b_2$ 91	*	41, 18, 13	,, zu $\mathfrak{c}_1^{(4)}$	*
4,r.	91	*	*	63, 28, 20	*	*

25. In einem zweiten Beispiel wählen wir $a_1 = -1 + 3\sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = 1$. Die folgende Tabelle gibt den originalen Poincaré-Algorithmus wieder, wobei die in Nr. **24** gegebenen Erläuterungen analog auch hier gelten. Dabei hat

$$a_1^{(6)} : a_2^{(6)} = (-7 + 5\sqrt{2}) : (17 - 12\sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2}$$

denselben Wert wie

$$a_2^{(4)} : a_1^{(4)} = (3 - 2\sqrt{2}) : (-7 + 5\sqrt{2}),$$

so daß der Algorithmus nach der Reduktion periodisch weiterläuft[30].

[30] Die Dezimalbrüche für die Werte der $a_\nu^{(\lambda)}$ sind in der üblichen Weise abgerundet.

Dabei haben wir hier jeden der auftretenden Werte auf 5 Dezimalen genau angegeben, so daß z. B. gemäß $3 - 2\sqrt{2} = 0{,}171572875 \ldots$ bei der Subtraktion $a_3^{(3)} = a_3^{(2)} - a_2^{(2)} = 0{,}58579 \ldots - 0{,}41421 \ldots$ der Wert 0,17157 (und nicht 0,17158) eingetragen ist. Wüßte man nur, daß für $a_3^{(2)}$ und $a_2^{(2)}$ die Ungleichungen

(Fortsetzung nächste Seite)

P. o.-Algorithmus

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$
0	a_1 * * $-1+3\sqrt{2}$ 3,24264 (1)	* a_2 * $\sqrt{2}$ 1,41421 (2)	* * a_3 1 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	a_1-a_2 * $-1+2\sqrt{2}$ 1,82843 (1)	* a_2-a_3 $-1+\sqrt{2}$ 0,41421 (3)	* * a_3 ,, (2)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$a_1-a_2-a_3$ $-2+2\sqrt{2}$ 0,82843 (1)	,, (3)	* $-a_2+2a_3$ $2-\sqrt{2}$ 0,58579 (2)	,,	3, 2, 1	2, 1, 1
3	a_1 * $-3a_3$ $-4+3\sqrt{2}$ 0,24264 (2)	,, (1)	* $-2a_2+3a_3$ $3-2\sqrt{2}$ 0,17157 (3)	,,	6, 3, 2	3, 1, 1
4	$a_1+2a_2-6a_3$ $-7+5\sqrt{2}$ 0,07107	$-a_1+a_2+2a_3$ $3-2\sqrt{2}$ 0,17157	,, .	7, 3, 2	,,	10, 4, 3 zu $\mathfrak{e}_2^{(4)}$
4,r.	b_1 * $-7+5\sqrt{2}$ 0,07107 (2)	* b_2 $3-2\sqrt{2}$ 0,17157 (1)	*	,,	16, 7, 5	*
5	,, (2)	$-b_1+b_2$ $10-7\sqrt{2}$ 0,10051 (1)	*	23, 10, 7	,,	*
6	,, (1)	$-2b_1+b_2$ $17-12\sqrt{2}$ 0,02944 (2)	*	39, 17, 12	,,	*

$$0{,}585785 < a_3^{(2)} < 0{,}585795, \quad 0{,}414205 < a_2^{(2)} < 0{,}414215$$

bestehen, dann könnte man bei Fortsetzung des Verfahrens immer nur Grenzen angeben, zwischen denen das fragliche $a_\nu^{(\lambda)}$ liegt, und würde etwa für $a_3^{(3)}$ als Wert $0{,}1715_9^7$ eintragen.

Wir verzichten – abgesehen vom A.r.-Algorithmus – auf die Wiedergabe der anderen Algorithmen für dieselben Zahlen $a_1 = -1 + 3\sqrt{2}$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 - 1$, wobei übrigens auch beim modifizierten Poincaréschen Verfahren (P.m.-Algorithmus) und beim Algorithmus lentus (A.l.) nach wenigen Schritten eine Reduktion und von da an ein periodischer zweigliedriger (Euklidischer) Algorithmus eintritt. In anderer Art scheint dagegen der Algorithmus rapidus (A.r.) zu verlaufen. Man beobachtet im Bereich der folgenden Tabelle, daß die Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$ und $\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$, also (13, 5, 4), (107, 46, 33), (441, 192, 136), (3635, 1585, 1121) usw. bezüglich ihrer Richtung dem Vektor $\mathfrak{a} = (a_1, a_2, a_3)$ merklich naherücken, während $\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$ für $\lambda \leqq 5$ unverändert $= (0, 1, 0)$ bleibt. Nun zeigen wir an anderer Stelle, daß man in Fällen, wo zwischen den Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ eine rationalzahlige linear-homogene Relation besteht, bei den hier studierten Algorithmen für $n > 2$ durchaus nicht immer auf das Eintreten einer Reduktion rechnen kann[31]. Auch in unserem Beispiel, wo zwischen a_1, a_2, a_3 eine solche Relation, nämlich

$$a_1 - 3\,a_2 + a_3 = 0$$

besteht, scheint damit zu rechnen, daß das A.r.-Verfahren ohne Reduktion dreigliedrig weiterläuft.

Die zuletzt ausgesprochene, aus dem Verhalten der Vektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(\lambda)}$ hergeleitete Vermutung bestätigt sich sofort durch die Feststellung, daß der Algorithmus periodisch ist; man erkennt dies daraus, daß

$$a_1^{(5)} : a_2^{(5)} : a_3^{(5)} =$$

$$= (-4756 + 3363\sqrt{2}) : (-1393 + 985\sqrt{2}) : (577 - 408\sqrt{2}) =$$

$$= (-4 + 3\sqrt{2}) : (-1 + \sqrt{2}) : 1 = a_1^{(1)} : a_2^{(1)} : a_3^{(1)}$$ ist. (Zusatz vom 7. Juli 1947 bei der Korrektur.)

[31] Vgl. l. c. [4], Nr. 2, Satz 2a.

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\varepsilon_1^{(\lambda)}$	$\varepsilon_2^{(\lambda)}$	$\varepsilon_3^{(\lambda)}$
0	$a_1 * *$ $-1+3\sqrt{2}$ 3,24264 [3] 3	$* a_2 *$ $\sqrt{2}$ 1,41421 [1] 1	$* * a_3$ 1 1 (ω)	1, 0, 0 [3]	0, 1, 0 [1]	0, 0, 1 3, 0, 0 0, 1, 0
1	$a_1 * -3a_3$ $-4+3\sqrt{2}$ 0,24264 (ω)	$* a_2 - a_3$ $-1+\sqrt{2}$ 0,41421 [1] 0,24264	,, [4] 0,97056	,, 0, 1, 0 12, 4, 4	,, [1]	3, 1, 1 [4]
2	,, [8] 0,23550	$-a_1+a_2+2a_3$ $3-2\sqrt{2}$ 0,17157 [5] 0,14719	$-4a_1 * +13a_3$ $17-12\sqrt{2}$ 0,02944 (ω)	13, 5, 4 [8]	,, [5]	,, 104, 40, 32 0, 5, 0
3	$33a_1 * -107a_3$ $-140+99\sqrt{2}$ 0,00714 (ω)	$19a_1+a_2-63a_3$ $-82+58\sqrt{2}$ 0,02439 [3] 0,02143	,, [4] 0,02857	,, 0, 3, 0 428, 184, 132	,, [3]	107, 46, 33 [4]
4	,, [8] 0,00693	$-80a_1+a_2+258a_3$ $338-239\sqrt{2}$ 0,00296 [3] 0,00260	$-136a_1 * +441a_3$ $577-408\sqrt{2}$ 0,00087 (ω)	441, 192, 136 [8]	,, [3]	,, 3528, 1536, 1088 0, 3, 0
5	$1121a_1 * -3635a_3$ $-4756+3363\sqrt{2}$ 0,00021 (ω)	$328a_1+a_2-1065a_3$ $-1393+985\sqrt{2}$ 0,00036 [1]	,, [4]	,,	,, [1]	3635, 1585, 1121 [4]
..	.....	.....	.....	.....	.....	.....

26. Als letztes Beispiel wählen wir $a_1 = \pi$, $a_2 = \sqrt{2}$, $a_3 = 1$ und geben in den folgenden Tabellen für jeden der vier hier besprochenen Algorithmen einige der ersten Schritte, u. zw. ungefähr gerade so weit, um einige Bemerkungen illustrieren zu können, die die verschiedenen bei den einzelnen Verfahren auftretenden Vektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(\lambda)}$ betreffen[32].

Algorithmus P. o.

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$
0	π * * 3,1415927 (1)	* $\sqrt{2}$ * 1,4142136 (2)	* * 1 1 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	$\pi-\sqrt{2}$ * 1,7273791 (1)	* $\sqrt{2}-1$ 0,4142136 (3)	,, (2)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$\pi-\sqrt{2}-1$ 0,7273791 (1)	,, (3)	* $-\sqrt{2}+2$ 0,5857864 (2)	,,	3, 2, 1	2, 1, 1
3	π * -3 0,1415927 (3)	,, (1)	* $-2\sqrt{2}+3$ 0,1715729 (2)	,,	6, 3, 2	3, 1, 1
4	,, (2)	* $3\sqrt{2}-4$ 0,2426407 (1)	$-\pi-2\sqrt{2}+6$ 0,0299802 (3)	10, 4, 3	,,	9, 4, 3
5	$2\pi+2\sqrt{2}-9$ 0,1116124 (1)	$-\pi+3\sqrt{2}-1$ 0,1010480 (2)	,, (3)	16, 7, 5	,,	25, 11, 8
6	$3\pi-\sqrt{2}-8$ 0,0105644 (3)	* $5\sqrt{2}-7$ 0,0710678 (1)	,, (2)	,,	22, 10, 7	47, 21, 15
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....

[32] Bezüglich Abrundung der Dezimalbrüche gilt das Analoge zu dem in Anm. 30 Gesagten.

Algorithmus P. m.

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$	$e_3^{(\lambda)}$
0	$\pi * *$ 3,1415927 (1) [2]	$* \sqrt{2} *$ 1,4142136 (2) [1]	$* * 1$ 1 (3) .	1, 0, 0	0, 1, 0 2, 0, 0	0, 0, 1 2, 1, 0
1	$\pi-2\sqrt{2} *$ 0,3131655 (3) .	$* \sqrt{2}-1$ 0,4142136 (2) [1]	,, (1) [2]	,, 6, 3, 2	2, 1, 0 4, 2, 2	2, 1, 1
2	,, (1) [1]	$-\pi+3\sqrt{2}-1$ 0,101048 (3) .	$*-2\sqrt{2}+3$ 0,1715729 (2) [1]	7, 3, 2	6, 3, 2 9, 4, 3	,, 7, 3, 2
3	$\pi * -3$ 0,1415927 (1) [1]	,, ,, (2) [1]	$\pi-5\sqrt{2}+4$ 0,0705248 (3)	,,	15, 7, 5 7, 3, 2	9, 4, 3 22, 10, 7
4	$2\pi-3\sqrt{2}-2$ 0,0405446 (2)	$-2\pi+8\sqrt{2}-5$ 0,030523 (3) [1]	,, (1) [1]	,,	22, 10, 7	31, 14. 10
..	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Algorithmus lentus

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$e_1^{(\lambda)}$	$e_2^{(\lambda)}$	$e_3^{(\lambda)}$
0	$\pi * *$ 3,1415927 (α)	$* \sqrt{2} *$ 1,4142136	$* * 1$ 1 (ω)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	$\pi * -1$ 2,1415927 (α)	,,	,, (ω)	,,	,,	1, 0, 1
2	$\pi * -2$ 1,1415927	,, (α)	,, (ω)	,,	,,	2, 0, 1
3	,, (α)	$* \sqrt{2}-1$ 0,4142136 (ω)	,,	,,	,,	2, 1, 1

Algorithmus lentus (Fortsetzung)

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$
4	$\pi - \sqrt{2} - 1$ 0,7273791	$* \sqrt{2} - 1$ 0,4142136 (ω)	$* * 1$ 1 (α)	1, 0, 0	1, 1, 0	2, 1, 1
5	,, (α)	,, (ω)	$* - \sqrt{2} + 2$ 0,5857864	,,	3, 2, 1	,,
6	$\pi - 2\sqrt{2} *$ 0,3131655 (ω)	,,	,, (α)	,,	4, 2, 1	,,
7	,,	,, (α)	$-\pi + \sqrt{2} + 2$ 0,2726209 (ω)	3, 1, 1	,,	,,
8	,, (α)	$\pi * - 3$ 0,1415927 (ω)	,,	,,	,,	6, 3, 2
9	$* - 2\sqrt{2} + 3$ 0,1715729	,, (ω)	,, (α)	,,	7, 3, 2	,,
10	,, (α)	,,	$-2\pi + \sqrt{2} + 5$ 0,1310283 (ω)	,,	13, 6, 4	,,
11	$2\pi - 3\sqrt{2} - 2$ 0,0405446 (ω)	,, (α)	,,	,,	,,	9, 4, 3
12	,, (ω)	$-\pi + 3\sqrt{2} - 1$ 0,1010480	,, (α)	16, 7, 5	,,	,,
13	,, (ω)	,, (α)	$-4\pi + 4\sqrt{2} + 7$ 0,0904836	25, 11, 8	,,	,,
14	,, (ω)	$-3\pi + 6\sqrt{2} + 1$ 0,0605034	,, (α)	38, 17, 12	,,	,,
...	.....	.....	.....	.....	.....	.....

Algorithmus rapidus

λ	$a_1^{(\lambda)}$	$a_2^{(\lambda)}$	$a_3^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_1^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_2^{(\lambda)}$	$\mathfrak{e}_3^{(\lambda)}$
0	$\pi * *$ 3,1415927 [3] 3	$* \sqrt{2} *$ 1,4142136 [1] 1	$* * 1$ 1 (ω)	1, 0, 0 [3]	0, 1, 0 [1]	0, 0, 1 3, 0, 0 0, 1, 0
1	$\pi * -3$ 0,1415927 (ω)	$* \sqrt{2} -1$ 0,4142136 [2] 0,2831853	,, [7] 0,9911486	,, 0, 2, 0 21, 7, 7	,, [2]	3, 1, 1 [7]
2	,, [15] 0,1327714	$-2\pi+\sqrt{2}+5$ 0,1310283[14] 0,1239199	$-7\pi * +22$ 0,008 8514 (ω)	22, 9, 7 [15]	,, [14]	,, 330, 135, 105 0, 14, 0
3	$106\pi * -333$ 0,0088213 [1] 0,0071083	$96\pi+\sqrt{2}-303$ 0,0071083 (ω)	,, [1] 0,0071083	,, [1]	,, 22, 9, 7 333, 150, 106	333, 150, 106 [1]
4	$10\pi-\sqrt{2}-30$ 0,0017130 (ω)	,, [4]	$-103\pi-\sqrt{2}+325$ 0,0017431 [1]	,, 1420, 640, 452 333, 150, 106	355, 160, 113 [4]	,, [1]
...	... ...	.....	.....	....	.....	.....

27. Die angeführten Beispiele gestatten einige Unterschiede festzustellen, die sich zwischen den betrachteten Algorithmen für $n > 2$ gegenüber dem Euklidischen Fall $n = 2$ ergeben. Was zunächst die bei den einzelnen Algorithmen auftretenden Näherungsvektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(\lambda)}$ betrifft, so lieferte im Falle $n = 2$ das Euklidische Subtraktionsverfahren unter anderen auch alle jene Näherungsvektoren, die beim Divisionsverfahren auftreten. Für $n > 2$ aber hat keiner der Algorithmen (auch nicht der Algorithmus lentus) die Eigenschaft, eine Gesamtheit von Näherungsvektoren zu liefern, die auch alle Näherungsvektoren der übrigen Algorithmen umfassen würde. Vielmehr kann es vorkommen, daß bei jedem der vier Algorithmen der eine oder andere Näherungsvektor auftritt, der bei keinem der anderen Verfahren sich einstellt.

So sehen wir im letzten Beispiel (Nr. **26**), daß die Näherungsvektoren (2, 1, 0), (15, 7, 5), (31, 14, 10) nur beim P.m.-Algo-

rithmus und bei keinem der anderen drei Algorithmen auftreten; dagegen der Vektor (10, 4, 3) nur beim P.o.-Algorithmus (und dasselbe gilt, wie man bei Weiterführung der Algorithmen über die hier mitgeteilten ersten Schritte erkennt, für die Vektoren (85, 38, 27), (176, 79, 56), (198, 89, 63) u. a.); die Vektoren (1, 0, 1), (2, 0, 1), (4, 2, 1), (13, 6, 4) – ebenso späterhin (82, 37, 26), (151, 68, 48) u. a. – nur beim Algorithmus lentus. Und sogar der Algorithmus rapidus, der seiner Natur nach viele Näherungsvektoren der anderen Algorithmen überspringt, liefert seinerseits Vektoren, die bei den anderen Verfahren nicht auftreten, wie den Vektor (22, 9, 7) oder späterhin den Vektor (355, 160, 113).

28. Ein weiterer Unterschied unserer Algorithmen für $n > 2$ gegenüber dem Euklidischen Fall $n = 2$ betrifft das Auftreten von Reduktionen einerseits, von periodischem Verlauf andererseits. Unter n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ kann man die größtmögliche Anzahl r bestimmen, so daß zwischen ihnen keine linear-homogene Relation mit rationalen, nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten besteht. Wird mit den n Zahlen einer der von uns betrachteten Algorithmen ausgeführt, so kann im Falle $r = n$ überhaupt keine Reduktion eintreten, im Falle $r < n$ jedenfalls nicht mehr als $n - r$ Reduktionen. Im Falle $n = 2$, d. h. beim Euklidischen Algorithmus, tritt nun, wenn $r = 1$, d. h. wenn $a_1 : a_2$ rational ist, tatsächlich notwendig nach endlich vielen Schritten eine Reduktion ein, womit das Verfahren abbricht (vgl. Nr. **4**, **7**, **11**). Im Falle $n > 2$ kann es aber sehr wohl vorkommen, daß zwar $r < n$ ist, trotzdem aber keine Reduktion eintritt, wofür l. c.[31], Nr. **5**, **6**, **7**, **10**, **11** Beispiele gegeben werden sollen. Auch auf unser obiges Beispiel von Nr. **25** mit dem Verfahren des Algorithmus rapidus kann dabei verwiesen werden. – Was ferner periodischen Ablauf eines Algorithmus betrifft, so soll darunter verstanden werden, daß es ein solches $\lambda > \mu \geqq 0$ und eine solche Anordnung der Zahlen $a_\nu^{(\lambda)}$ gibt, daß

$$a_{\nu_1}^{(\lambda)} : a_{\nu_2}^{(\lambda)} : \ldots : a_{\nu_n}^{(\lambda)} = a_1^{(\mu)} : a_2^{(\mu)} : \ldots : a_n^{(\mu)}$$

ist[33]. Für $n = 2$ ist ein solches Vorkommnis charakteristisch da-

[33] Natürlich gibt es dann stets auch ein solches Vielfaches $k(\lambda - \mu)$ (mit $k > 0$) von $\lambda - \mu$, daß für $\tau = \mu + k(\lambda - \mu)$

$$a_1^{(\tau)} : a_2^{(\tau)} : \ldots : a_n^{\tau} = a_1^{(\mu)} : a_2^{(\mu)} : \ldots : a_n^{(\mu)} \quad \text{ist.}$$

für, daß a_1, a_2 unabhängige Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers sind. Für $n > 2$ liegen für die betrachteten Algorithmen keine so einheitlichen Verhältnisse vor und Beispiele zeigen, daß Periodizität auch vorkommen kann, wenn $a_1, a_2, \ldots, a_n$ einem Zahlkörper von einem Grad $< n$ angehören[34].

Nachträglich sei (bei der Korrektur) beigefügt, daß von den hier besprochenen Verfahren, um zu einem mehrgliedrigen Zahlenverhältnis angenäherte Werte in kleinen ganzen Zahlen zu ermitteln, kürzlich in einer anderen Note[35] Gebrauch gemacht wurde.

---

[34] Vgl. 1. c. [31], Nr. **2**, Satz 2b und die oben angeführten dortigen Beispiele, sowie den Algorithmus rapidus im Beispiel der hiesigen Nr. **25**.

[35] Siehe „Würfelspiel und Integralgeometrie", Sitzungsber. der Bayer. Akad. d. Wiss., vorgelegt am 4. Oktober 1946, § 5, Nr. **24**, Anm. 25.