Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen.

Von Heinrich Tietze, München.

Vorgelegt am 9. Februar 1945.

§ 1. Determinanten, deren Elemente Matrizen sind.

1. Die auftretenden Matrizen, die wir mit großen lateinischen Buchstaben A, B, ... bezeichnen, mögen quadratisch und alle von derselben Ordnung (Reihenzahl) n sein. Sind $a_{ik}(i, k = 1, \ldots, n)$ die (als beliebige komplexe Zahlen – oder auch speziell als reelle Zahlen – vorausgesetzten) Elemente der Matrix[1]

$$A = (a_{ik}) = (a_{ik})_{i,k}, \tag{1}$$

dann bedeute[2]

---

[1] In der ausführlichen Schreibweise $(a_{ik})_{i,k}$ bedeute der außerhalb der Klammer angeschriebene erste Buchstabe i den Zeilenindex, der zweite Buchstabe k den Kolonnenindex. Falls die Matrix nicht symmetrisch ist und die Elemente a_{ik} spezialisiert und durch die Indizes i, k ausgedrückt sind, dann ist eine derartige Unterscheidung zwischen Zeilen- und Kolonnen-Index nötig. Es bedeutet dann

$$A' = (a_{ik})_{k,i} = (a_{ki})_{i,k} \tag{2}$$

die von (1) zu unterscheidende „gestürzte" oder „transponierte" Matrix. Beispielsweise ist für $a_{ik} = i + 2k$, $n = 2$

$$A = (i + 2k)_{i,k} = \begin{pmatrix} 3, & 5 \\ 4, & 6 \end{pmatrix}, \quad A' = (i + 2k)_{k,i} = \begin{pmatrix} 3, & 4 \\ 5, & 6 \end{pmatrix}.$$

Die Kennzeichnung des Zeilen- bzw. Kolonnen-Index gewinnt später erhöhte Bedeutung, wo wir Matrizen (und Determinanten) betrachten, deren Elemente selbst Matrizen sind.

[2] Bekanntlich schreibt man häufig einfach $|a_{ik}|$ für die Determinante (3), wenn eine Verwechslung mit dem absoluten Betrag der Zahl a_{ik} nicht zu befürchten ist. Es gibt natürlich Fälle (man denke an den bekannten Hadamard'schen Determinantensatz), wo zwischen der Determinante aus den absoluten Beträgen, also $||a_{ik}||_{i,k}$, und dem absoluten Betrag der Determinante, also $||a_{ik}|_{i,k}|$ zu unterscheiden ist. Für uns wird es späterhin, wo wir Determinanten betrachten, deren Elemente Matrizen sind, nötig sein, entsprechende Unterschiede in der Bezeichnung zu machen.

$$|A| = |a_{ik}|_{i,k=1,\ldots,n} = |a_{ik}|_{i,k} \tag{3}$$

die Determinante der a_{ik}. Sind

$$A = (a_{ik})_{i,k}, \qquad B = (b_{ik})_{i,k}$$

zwei Matrizen, λ eine Zahl, dann sei, wie üblich[3]

$$A + B = (a_{ik} + b_{ik})_{i,k}, \qquad \lambda A = (\lambda a_{ik})_{i,k} \tag{4}$$

$$AB \equiv \left(\sum_{h=1}^{n} (a_{ih} b_{hk})_{i,k}\right), \tag{5}$$

wobei im allgemeinen, wenn nicht „vertauschbare" Matrizen vorliegen, $BA \neq AB$ ist.

Ist $\delta_{ik} = 1$ oder 0, je nachdem $i = k$ oder $i \neq k$ ist, dann ist

$$I = (\delta_{ik})$$

die Einheitsmatrix; mit O bezeichnen wir die Null-Matrix, deren sämtliche n^2 Elemente null sind. Ist $n > 1$ und werden mit l_{ik} die zu den Elementen a_{ik} von (1) bzw. (3) gehörigen Minoren (Adjunkten), mit

$$L = (l_{ik})_{i,k}$$

die aus ihnen gebildete Matrix (L' die gestürzte Matrix) bezeichnet, dann gelten die aus der Determinantenlehre bekannten und in die Gleichungen

$$AL' = L'A = |A|\, I \tag{6}$$

zusammenfaßbaren Gleichungssysteme

$$\sum_{h=1}^{n} a_{ih} l_{kh} = \sum_{h=1}^{n} a_{hi} l_{hk} = \delta_{ik} |A|. \tag{7}$$

Man nennt bekanntlich, mit λ eine Variable bezeichnend,

$$A - \lambda I = (a_{ik} - \delta_{ik}\lambda)_{i,k} \tag{8}$$

die „charakteristische Matrix" der Matrix A, ferner

$$\varphi(\lambda) = |A - \lambda I| \tag{9}$$

---

[3] Zur Algebra der Matrizes vgl. etwa M. Bôcher, Einführung in die höhere Algebra, deutsche Ausgabe von H. Beck, 1910, Kap. II, VI, XXI, XXII (S. 22, 79, 304, 319).

die „charakteristische Funktion" und $\varphi(\lambda) = 0$ die „charakteristische Gleichung" von A.

2. Unter m eine ganze positive Zahl verstehend, die vorerst nicht notwendig $= n$ sein muß, betrachten wir nun Matrizen (und nachher Determinanten) m-ter Ordnung, deren Elemente Matrizen n-ter Ordnung (vgl. Nr. **1**) sind. Solche „Matrizen-Matrizen" mögen mit großen griechischen Buchstaben bezeichnet werden. Nehmen wir etwa $m = 2$ und seien A, B, C, D Matrizen n-ter Ordnung gemäß Nr. **1**, so sei

$$\Delta = \begin{pmatrix} A, & B \\ C, & D \end{pmatrix} \tag{10}$$

eine solche Matrizen-Matrix. Ihre Determinante („Matrizen-Determinante") werde dann durch

$$|\Delta| = \begin{vmatrix} A, & B \\ C, & D \end{vmatrix} = AD - CB \tag{11}$$

erklärt, wobei wir bei Bildung der Glieder (die im übrigen nach den üblichen Determinantenregeln erfolgt) – im Hinblick auf die Nicht-Kommutativität der Matrizenprodukte – eine Festsetzung über die Reihenfolge der Faktoren treffen mußten und diese derart getroffen haben, daß die Faktoren jeweils in der Reihenfolge der Kolonnen genommen werden, denen sie angehören. Es sind also nicht nur die Matrizen (10) und

$$\Delta' = \begin{pmatrix} A, & C \\ B, & D \end{pmatrix},$$

sondern auch die Determinanten (11) und

$$|\Delta'| = AD - BC$$

zu unterscheiden.

Für beliebiges m hat man analog die „Matrizen-Matrix"

$$\Delta = \begin{pmatrix} A_{11}, \ldots, A_{1m} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_{m1}, \ldots, A_{mm} \end{pmatrix} = (A_{ik})_{i,k=1,\ldots,m} \tag{12}$$

und ihre Determinante

$$|\Delta| = \Sigma \pm A_{\alpha 1} A_{\beta 2} \ldots A_{\mu m}, \tag{13}$$

bzw.

$$\Delta' = (A_{ki})_{i, k=1, \ldots, m},$$
$$|\Delta'| = \Sigma \pm A_{1\alpha} A_{2\beta} \ldots A_{m\mu},$$

wobei jeweils α, β, ..., μ alle Permutationen der Zahlen 1, 2, ..., m durchläuft. Mit E werde die Einheits-Matrizen-Matrix

$$\mathrm{E} = (\delta_{ik} I)_{i, k=1, \ldots, m} = \begin{pmatrix} I, & O, & \ldots, & O \\ O, & I, & \ldots, & O \\ O, & O, & \ldots, & I \end{pmatrix}$$

bezeichnet und mit Ω die Null-Matrizen-Matrix, deren sämtliche Elemente gleich der Matrix O sind. Es ist dann

$$|\mathrm{E}| = I, \quad |\Omega| = O.$$

In Analogie zu (4) und (5) kann man, wenn Δ durch (12) und Γ durch

$$\Gamma = (B_{ik})_{i, k=1, \ldots, m}$$

definiert ist, wenn ferner L eine Matrix n-ter Ordnung und λ eine Zahl bedeutet, die Operationen

$$\Delta + \Gamma = (A_{ik} + B_{ik})_{i, k=1, \ldots, m}, \qquad L\Delta = (LA_{ik})_{i, k=1, \ldots, m} \tag{14}$$

und

$$\lambda\Delta = (\lambda A_{ik})_{i, k=1, \ldots, m} \tag{15}$$

sowie

$$\Delta\Gamma = \left(\sum_{h=1}^{m} A_{ih} B_{hk}\right)_{i, k} \tag{16}$$

einführen. Offenbar ist dabei für $\lambda = 1$ bzw. $\lambda = 0$ und $L = I$ bzw. $L = O$

$$1 \cdot \Delta = I \cdot \Delta = \Delta, \quad 0 \cdot \Delta = O \cdot \Delta = \Omega.$$

3. Bei Einführung der Minoren (Adjunkten) einer Matrizen-Matrix (12) beschränken wir uns zweckmäßiger Weise auf den Fall, daß von den Matrizen A_{ik} je zwei, die weder derselben Zeile noch derselben Kolonne angehören, vertauschbar sind, daß also stets

$$A_{ik} A_{jl} = A_{jl} A_{ik} \qquad \text{für } i \neq j, \ k \neq l \tag{17}$$

gilt. Wenn man dann, $m > 1$ vorausgesetzt, in Δ die i-te Zeile und k-te Kolonne streicht und die so entstehende $(m - 1)$-reihige Matrizen-Matrix mit Δ_{ik} bezeichnet, dann werde wie in der gewöhnlichen Determinantentheorie

$$(-1)^{i+k} \mid \Delta_{ik} \mid = L_{ik}$$

als der in der Matrix (12) sowie in der Determinante (13) zu A_{ik} gehörige Minor bezeichnet. Da mit Rücksicht auf (17) in jedem Summanden von (13) die Faktoren in beliebiger Reihenfolge genommen werden können, so gelten die zu (7) analogen Beziehungen[4]

$$\sum_{h=1}^{m} A_{ih} L_{kh} = \sum_{h=1}^{m} A_{hi} L_{hk} = \delta_{ik} \mid \Delta \mid,$$

die man unter Benützung der Produktbildung (16) analog zu (6) kurz durch

$$\Delta \Lambda' = \Lambda' \Delta = \mid \Delta \mid \mathrm{E} = \begin{pmatrix} \mid \Delta \mid, O, \ldots, O \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ O, O, \ldots, \mid \Delta \mid \end{pmatrix} \tag{18}$$

wiedergeben kann, wenn

$$\Lambda = (L_{ik})_{i,\, k=1, \ldots, m}$$

die aus den Minoren gebildete Matrix, demgemäß

$$\Lambda' = (L_{hi})_{i,\, k=1, \ldots, m}$$

ist.

4. Späterhin nützlich für das Rechnen mit Matrizen ist noch der folgende

Hilfssatz. Sei $g(\eta_1, \ldots, \eta_p)$ ein Polynom in $\eta_1, \ldots, \eta_p$ ohne konstantes Glied[5] mit irgend welchen Zahlen als Koeffizienten, seien ferner $f_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, f_p(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ ebensolche Polynome in den m Variabeln $\xi_1, \ldots, \xi_m$ derart, daß identisch in diesen Variabeln

[4] Eine wesentliche Rolle spielt dabei der wegen (17) gültige Satz, daß $\mid \Gamma \mid = - \mid \Delta \mid$ ist, wenn Γ aus Δ durch Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Kolonnen entsteht.

[5] Diese Voraussetzung über die Polynome g und f_ν kann man weglassen, wenn man vereinbart, daß bei Bildung der $f_\nu(X_1, \ldots, X_m)$ sowie auf der linken Seite von (20) jedes konstante Glied c durch cI ersetzt wird.

$$g\big(f_1(\xi_1, \ldots, \xi_m), \ldots, f_p(\xi_1, \ldots, \xi_m)\big) = 0 \tag{19}$$

ist. Sind dann $X_1, \ldots, X_m$ quadratische Matrizen, alle von derselben Ordnung n, die zu je zweien vertauschbar sind ($X_i X_j = X_j X_i$), sodaß auch $Y_1 = f_1(X_1, \ldots, X_m), \ldots, Y_p = f_p(X_1, \ldots, X_m)$ wohl definierte ebensolche Matrizen sind und dasselbe von $g(Y_1, \ldots, Y_p)$ gilt, dann besteht die letztere Matrix aus lauter Nullen:

$$g\big(f_1(X_1, \ldots, X_m), \ldots, f_p(X_1, \ldots, X_m)\big) = O \tag{20}$$

§ 2. Die verallgemeinerte Hamilton-Cayley'sche Gleichung.

5. Wie wir beweisen wollen, gilt folgender Satz 1. Es seien

$$A = (a_{ik})_{i,\,k=1,\ldots,n} \text{ und } B = (b_{ik})_{i,\,k=1,\ldots,n}$$

zwei vertauschbare Matrizen n-ter Ordnung ($n \geqq 1$), es sei also

$$AB = BA;$$

dann besteht für die mit den Elementen

$$a_{ik}B - b_{ik}A \tag{21}$$

gebildete Matrizen-Determinante die Gleichung

$$|a_{ik}B - b_{ik}A|_{i,\,k=1,\ldots,n} = O, \tag{22}$$

also ausführlich geschrieben

$$\begin{vmatrix} a_{11}B - b_{11}A, & a_{12}B - b_{12}A, & \ldots, & a_{1n}B - b_{1n}A \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}B - b_{n1}A, & a_{n2}B - b_{n,2}A, & \ldots, & a_{nn}B - b_{nn}A \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}_{(n \text{ mal } n \text{ Nullen})}. \tag{23}$$

Man kann dieser Beziehung eine etwas andere Gestalt geben, wenn man die aus den Zahlen

$$f_{ik}(\lambda, \mu) = a_{ik}\mu - b_{ik}\lambda \tag{24}$$

gebildete Matrix

$$F(\lambda, \mu) = (a_{ik}\mu - b_{ik}\lambda)_{i,\,k=1,\,\ldots,\,n} \tag{25}$$

und deren Determinante

$$\varphi(\lambda, \mu) = |F(\lambda, \mu)| = |a_{ik}\mu - b_{ik}\lambda|_{i,\,k=1,\,\ldots,\,n} \tag{26}$$

einführt und dann die Bezeichnungen f_{ik}, F, φ auf den Fall überträgt, daß Matrizen A, B anstelle der Zahlen λ, μ treten. Die linke Seite von (22) läßt sich dann

$$|f_{ik}(A, B)|_{i,\,k=1,\,\ldots,\,n} = |F(A, B)| = \varphi(A, B) \tag{27}$$

schreiben, sodaß (22) die Gestalt

$$\varphi(A, B) = O \tag{28}$$

erhält. Nimmt man speziell $b_{ik} = \delta_{ik}$, $B = I$ und setzt $\mu = 1$, so wird

$$F(\lambda, 1) = (a_{ik} - \delta_{ik}\lambda)_{i,\,k}$$

die charakteristische Matrix (8) der Matrix A, ferner $\varphi(\lambda, 1)$ die in Nr. **1** mit $\varphi(\lambda)$ bezeichnete charakteristische Funktion (9) und $\varphi(\lambda, 1) = 0$ die charakteristische Gleichung $\varphi(\lambda) = 0$ von A. Aus (28) aber wird dabei

$$\varphi(A, I) = \begin{vmatrix} a_{11}I - A, & a_{12}I, & \ldots, & a_{1n}I \\ a_{21}I, & a_{22}I - A, & \ldots, & a_{2n}I \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}I, & a_{n2}I, & \ldots, & a_{nn}I - A \end{vmatrix} = O,$$

d. h. die Hamilton-Cayley'sche Gleichung[6]

$$\varphi(A) = O. \tag{28a}$$

6. Der Beweis von Satz 1 läßt sich analog führen wie im zuletzt genannten Sonderfall (vgl. l. c.[3], Kap. XXII), wobei wir $n \geqq 2$ annehmen wollen, da die Gültigkeit des Satzes für $n = 1$ trivial ist.

Der gemäß (24), (25), (26) zum Element $f_{ik}(\lambda, \mu)$ in der Matrix $F(\lambda, \mu)$ bzw. in der Determinante $\varphi(\lambda, \mu)$ gehörige Minor $g_{ik}(\lambda, \mu)$ ist in λ, μ homogen vom Grad $n - 1$, also von der Gestalt

[6] Man findet diese Gleichung (28, a) als „Hamilton-Cayley'sche Gleichung" (vgl. l. c.[3], S. 319) und als Satz von Frobenius bezeichnet.

$$g_{ik}(\lambda,\mu)=\sum_{h=0}^{n-1}\mu^{n-1-h}\lambda^h g_{ik}^{(h)};$$

daher läßt sich jede der Matrizen

$$G(\lambda,\mu)=(g_{ik}(\lambda,\mu))_{i,k}, \qquad G'(\lambda,\mu)=(g_{ki}(\lambda,\mu))_{i,k}$$

als homogenes Polynom $(n-1)$-sten Grades in λ, μ darstellen mit Koeffizienten, die aus den Zahlen a_{ik}, b_{ik} gebildete Matrizen n-ter Ordnung sind. Speziell sei

$$G'(\lambda,\mu)=\sum_{h=0}^{n-1}\mu^{n-1-h}\lambda^h H_h. \tag{29}$$

Ferner ist $\varphi(\lambda,\mu)$ gemäß (26) ein in λ, μ homogenes Polynom n-ten Grades:

$$\varphi(\lambda,\mu)=|F(\lambda,\mu)|=\sum_{h=0}^{n} d_h\,\mu^{n-h}\lambda^h. \tag{30}$$

Aus der Bedeutung von $g_{ik}(\lambda,\mu)$ und $G(\lambda,\mu)$ aber folgt gemäß (6)

$$G'(\lambda,\mu)\,F(\lambda,\mu)=F(\lambda,\mu)\,G'(\lambda,\mu)=\varphi(\lambda,\mu)\,I,$$

somit wegen $F(\lambda,\mu)=\mu A-\lambda B$, (29) und (30)

$$\sum_{h=0}^{n-1}\mu^{n-1-h}\lambda^h H_h\cdot(\mu A-\lambda B)=\sum_{h=0}^{n}\mu^{n-h}\lambda^h d_h I \tag{31}$$

und daraus durch Vergleichung der Koeffizienten gleicher Potenzprodukte $\mu^{n-h}\lambda^h$ das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} H_0A \qquad\qquad &= d_0 I,\\ H_1A-H_0B \qquad &= d_1 I,\\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots\\ H_{n-1}A-H_{n-2}B &= d_{n-1}I,\\ -H_{n-1}B &= d_n I. \end{aligned} \tag{32}$$

Auf Grund des Hilfssatzes von Nr. 4 folgt nun aus (30) für

$$\varphi(A,B)=|a_{ik}B-b_{ik}A|_{i,k}$$

die Gleichung[7]

[7] Sowohl die rechte Seite in (30), als auch jedes der n^2 Elemente $a_{ik}\mu-b_{ik}\lambda$ in der Determinante $\varphi(\lambda,\mu)$ ist ein Polynom in λ, μ ohne konstantes Glied; sonach stellt (30), darin alles auf eine Seite gebracht, eine Relation nach Art

$$\varphi(A, B) = \sum_{h=0}^{n} d_h B^{n-h} A^h,$$

wofür wegen $B^{n-h}A^h = IB^{n-h}A^h$ auch

$$\varphi(A, B) = \sum_{h=0}^{n} (d_h I)(B^{n-h}A^h) \tag{33}$$

geschrieben werden kann. Setzt man hierin für die $d_h I$ aus (32) die Ausdrücke $H_h A - H_{h-1} B$ ein (dabei H_h für $h = n$ und $h = -1$ durch O ersetzt), so hebt sich – immer unter Benutzung von $AB = BA$ – auf der rechten Seite von (33) alles weg und man erhält die behauptete Gleichung (28). Satz 1 ist damit bewiesen.

§ 3. Die Vertauschbarkeits-Bedingung.

7. Die Voraussetzung $AB = BA$ kann in Satz 1 nicht weggelassen werden. Genauer gilt hierüber

Satz 2. Für beliebige nicht vertauschbare Matrizen ist die Gleichung (22) oder die ihr gleichwertige (28) nicht richtig. Andererseits ist für die Gültigkeit von (28) die Vertauschbarkeit von A und B nicht notwendig, da es auch nicht-vertauschbare Matrizen gibt, für welche (28) gilt.

Zwei Beispiele werden diese Aussagen erweisen. Beidemal wählen wir $n = 2$, spezialisieren B wie folgt und setzen

$$A = \begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Dann ergibt sich

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc, & b(a+d) \\ c(a+d), & bc + d^2 \end{pmatrix}, \qquad B^2 = \begin{pmatrix} 1, & 2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \tag{35}$$

$$AB = \begin{pmatrix} a, & a+b \\ c, & c+d \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} a+c, & b+d \\ c, & d \end{pmatrix} \tag{36}$$

$$\varphi(\lambda, \mu) = \begin{vmatrix} a\mu - \lambda, & b\mu - \lambda \\ c\mu, & d\mu - \lambda \end{vmatrix},$$

von (19) dar, darin $p = n^2 + 1$, $m = 2$, $\xi_1 = \lambda$, $\xi_2 = \mu$ gesetzt. Anstelle der in Nr. 4 mit X_1, X_2 bezeichneten Matrizen treten jetzt A und B.

$$\varphi(A, B) = \begin{vmatrix} aB - A, & bB - A \\ cB, & dB - A \end{vmatrix} =$$
$$= (ad - bc)B^2 - dAB + (c - a)BA + A^2.$$

Hieraus findet man gemäß (35), (36):

$$\varphi(A, B) = \begin{pmatrix} c^2, & c(d - b) \\ c^2, & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

Wie (36) zeigt, gilt $AB = BA$ dann und nur dann, wenn $c = 0$ und $a = d$ ist; dagegen ist, wie (37) zeigt, dann und nur dann $\varphi(A, B) = O$, wenn $c = 0$ ist.

Wir brauchen also in einem ersten Beispiel nur $c \neq 0$, etwa $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ nebst $B = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zu nehmen, um $\varphi(A, B) \neq O$ zu erhalten.

Wir brauchen andererseits in einem zweiten Beispiel nur $c = 0$, $a \neq d$, etwa $A = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 2 \end{pmatrix}$ nebst $B = \begin{pmatrix} 1, & 1 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}$ zu nehmen, um $AB \neq BA$ und gleichwohl $\varphi(A, B) = O$ zu erhalten.

Satz 2 ist damit erwiesen.

§ 4. Zusätze[8].

8. Für die Zurückführung von Satz 1 (§ 2) auf den allgemein bekannten, durch $B = I$ gegebenen Sonderfall teilt mir Herr O. Perron folgenden einfachen Beweis mit, bei dem zunächst $|B| \neq 0$ vorausgesetzt wird, das Endresultat nach geläufiger Schlußweise auch ohne diese Voraussetzung gilt: Wird $B^{-1} = (b^*_{ik})_{ik}$ und $AB^{-1} = B^{-1}A = C = (c_{ik})_{ik}$ gesetzt, so ist

$$|a_{ik}B - b_{ik}A|_{ik} \cdot |b^*_{ik}|_{ik} = |\sum_h (a_{ih}B - b_{ih}A) \cdot b^*_{hk}| =$$
$$= |c_{ik}B - \delta_{ik}A| = B^n \cdot |c_{ik}I - \delta_{ik}C|,$$

also $= O$ gemäß dem Sonderfall (28a).

9. Für diesen Sonderfall wiederum erhielt ich durch Herrn C. Carathéo-

---

[8] Bei der Korrektur (15. April 1945) beigefügt.

dory die Kenntnis von folgendem eleganten Beweisverfahren[9]: Wir führen Matrizen

$$\mathfrak{x} = (x_i)_{i*} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}, \text{ speziell } \mathfrak{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$$

ein, hierbei – als Repräsentanten der n Einheitsvektoren – die n Matrizen $\mathfrak{e}_k = (\delta_{ik})_{i*}$ $(k = 1, \ldots, n)$, wobei (wenn I und O die frühere Bedeutung aus Nr. **1** haben) allemal

$$I\mathfrak{x} = \mathfrak{x}$$

ist. Dann läßt sich die Matrix $M_k = (a_{ik})_{i*}$ in doppelter Weise schreiben:

$$M_k = \left(\sum_{i=1}^{n} a_{hi}\,\delta_{ik}\right)_{h*} = A\,\mathfrak{e}_k = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} A\,\mathfrak{e}_i \tag{38}$$

und

$$M_k = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,\mathfrak{e}_i = \sum_{i=1}^{n} a_{ik}\,I\,\mathfrak{e}_i, \tag{39}$$

woraus sich

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{ik}\,I - \delta_{ik}\,A)\,\mathfrak{e}_i = \mathfrak{o} \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{40}$$

und (vgl. Nr. **11**)

$$|\, a_{ik}\,I - \delta_{ik}\,A \,| = O \tag{41}$$

ergibt.

10. Hierzu möchten wir noch beifügen, daß sich dieser Beweis ohne weiteres auf den allgemeinen Fall zweier vertauschbarer Matrizen A, B übertragen läßt, wenn man unter Benützung von $A\,B = B\,A$ oder

$$\sum_i a_{hi}\,b_{ik} = \sum_i b_{hi}\,a_{ik}$$

schreibt:

$$M_k = \left(\sum_i a_{hi}\,b_{ik}\right)_{h*} = \sum_i b_{ik}\,(a_{hi})_{h*} = \sum_i b_{ik}\,A\,\mathfrak{e}_i \tag{42}$$

$$M_k = \left(\sum_i b_{hi}\,a_{ik}\right)_{h*} = \sum_i a_{ik}\,(b_{hi})_{h*} = \sum_i a_{ik}\,B\,\mathfrak{e}_i, \tag{43}$$

---

[9] Dabei war es Herr Kollege Eberhard Hopf – der damals gerade innerhalb weniger Tage uns beide sprach –, der mir von dem Beweis auf Grund einer Unterhaltung mit Kollegen Carathéodory erzählte, während die obwaltenden Auswirkungen von Alarmen und Angriffen auf die Verkehrs-, Gesundheits- und Lebensverhältnisse die persönliche Aussprache oft auf Wochen unterbanden. Der Beweis, dessen letzter Urheber für uns dermalen schwer zu ermitteln ist, berührt sich, wie mir Carathéodory noch nachträglich mitteilt, mit einem von Frobenius gegebenen.

woraus

$$\sum_i (a_{ik} B - b_{ik} A)\, \mathfrak{e}_i = \mathfrak{o} \tag{44}$$

und (22) folgt[10].

11. Für den Übergang von (40) zu (41), bzw. von (44) zu (22) mag noch folgende Ergänzung dienlich sein: Sind n^2 quadratische Matrizen n-ter Ordnung C_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ gegeben, ferner n Matrizen X_i, desgleichen n Matrizen Y_i $(i = 1, \ldots, n)$, von denen jede n Zeilen und m Kolonnen hat, und bestehen die Gleichungen

$$\sum_i C_{ik} X_i = Y_k \quad (k = 1, \ldots, n), \tag{45}$$

dann gilt

$$\sum_k C^*_{ik} Y_k = |\Gamma|\, X_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{46}$$

wenn Γ, $|\Gamma|$, C^*_{ik} für die C_{ik} die analoge Bedeutung haben, wie Δ, $|\Delta|$, L_{ik} gemäß Nr. **2, 3** für die A_{ik} und wenn dabei die C_{ik} die zu (17) analoge Voraussetzung erfüllen. Dabei ist $|\Gamma|$ eine quadratische Matrix n-ter Ordnung, etwa $|\Gamma| = (\gamma_{kh})_{k,h}$.

Ist nun speziell $m = 1$, $X_i = \mathfrak{e}_i$ und sind alle $Y_k = \mathfrak{o}$, so wird aus (46)

$$\mathfrak{o} = |\Gamma|\, \mathfrak{e}_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

oder

$$0 = \sum_h \gamma_{kh}\, \delta_{hi} = \gamma_{ki}$$

für alle k und $i = 1, \ldots, n$. Es ist also

$$|\Gamma| = O \tag{47}$$

Man braucht nun nur $C_{ik} = a_{ik} I - \delta_{ik} A$ bzw. $= a_{ik} B - b_{ik} A$ zu setzen, so geht (45) in (40) bzw. (44) über und aus (47) wird (41) bzw. (22).

Übrigens läßt sich der Schluß vom Gleichungssystem (45) mit $Y_k = \mathfrak{o}$ auf die Gleichung (47) auch auf Fälle mit $m > 1$ ausdehnen, wenn dabei unter $\mathfrak{o}$ die aus lauter Nullen bestehende Matrix mit n Zeilen und m Kolonnen verstanden wird und die Matrizen $X_i = (x^{(i)}_{h\mu})$ (mit $h = 1, \ldots, n$; $\mu = 1, \ldots, m$) die Voraussetzung erfüllen, daß wenigstens ein Wert μ existiert, für den die Determinante $|x^{(i)}_{h\mu}|_{i,h} \neq 0$ ist. Im obigen Fall mit $m = 1$, $X_i = \mathfrak{e}_i$, $x^{(i)}_{h1} = \delta_{hi}$ war diese Voraussetzung natürlich erfüllt.

---

[10] Im Sonderfall $B = I$, $b_{ik} = \delta_{ik}$ geht offenbar (43) in (39) – und natürlich (42) in (38) – über.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1947

Band/Volume: 1945

Autor(en)/Author(s): Tietze Heinrich

Artikel/Article: Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen 45-56