Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Über die Integration der Differentialgleichungen der Keplerschen Planetenbewegung.

Von C. Carathéodory.

Vorgelegt am 9. Februar 1945.

1. Einleitung. Vor einigen Jahren habe ich die Bemerkung gemacht, daß die Differentialgleichungen des Zweikörperproblems am leichtesten behandelt werden können, wenn man alle in Betracht kommenden Hilfsgrößen systematisch einführt, welche bei einer orthogonalen Transformation der Koordinaten des Raumes invariant bleiben. Ein nicht zu unterschätzender Vorzug dieser Methode besteht darin, daß man sämtliche Formeln von Anfang an für das räumliche Problem ansetzen und alle Daten der Bahn aus den allgemeinsten Anfangsbedingungen errechnen kann, ohne die Ergebnisse der Theorie des ebenen Zweikörperproblems voraussetzen zu müssen.

Es hat sich nun gezeigt, daß die Darstellung, die ich damals in der „Revue Mathématique de l'Union interbalkanique", T. III Fasc. 3/4 (1940) von diesen Dingen gegeben habe, an verschiedenen Stellen vereinfacht, an anderen vervollständigt werden kann, und ich erlaube mir deshalb, auf diesen Gegenstand zurückzukommen.

In einem n-dimensionalen Raume sei ein rechtwinkliges Cartesisches Koordinatensystem gegeben; die Bewegung eines materiellen Punktes werde in diesem Raum durch mindestens zweimal stetig differentiierbare Funktionen

$$(1.1)\qquad x_i = x_i(t), \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad \ddot{x}_i = \frac{d^2x_i}{dt^2} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dargestellt. Wir führen folgende Hilfsfunktionen ein, welche aus den Funktionen (1. 1) berechnet werden, und bei orthogonalen Transformationen des Koordinatensystems, die den Anfangspunkt fest lassen, invariant bleiben:

$$(1.2)\qquad r^2 = x_i x_i, \quad s^2 = \dot{x}_i \dot{x}_i, \quad w = x_i \dot{x}_i.$$

Wir nehmen an, daß im Anfangspunkt der Koordinaten eine Newtonsche Zentralkraft wirkt und daß infolgedessen die Bewegung unseres Punktes durch die Differentialgleichungen

$$\ddot{x}_i = -\frac{f x i}{r^3} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1. 3}$$

bestimmt wird.

Für die Anfangswerte der Bewegung im Zeitpunkt $t = 0$ setzen wir

$$x_i(0) = a_i, \quad \dot{x}_i(0) = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1. 4}$$

und nehmen an, daß mindestens eine unter den Konstanten a_i nicht verschwinden soll. Unser Ziel ist, zu zeigen, daß bei jeder beliebigen Wahl der Konstanten (1. 4) genau eine Bewegung des Planeten vorhanden ist, welche den Differentialgleichungen (1. 3) genügt. Dies soll – ohne Benützung der Existenztheoreme der allgemeinen Theorie der Differentialgleichungen – auf Grund von elementaren Rechnungen bewiesen werden.

2. Gewinnung neuer Differentialgleichungen durch Differentation. Da die rechten Seiten der Gleichungen (1. 2) differentiierbar sind, erhalten wir aus diesen Gleichungen mit Benutzung von (1. 3):

$$r\dot{r} = x_i \dot{x}_i = w, \tag{2. 1}$$

$$s\dot{s} = \dot{x}_i \ddot{x}_i = -\frac{f w}{r^3}, \tag{2. 2}$$

$$\dot{w} = \dot{x}_i \dot{x}_i + x_i \ddot{x}_i = s^2 - \frac{f}{r}, \tag{2. 3}$$

$$\ddot{w} = 2 s \dot{s} + \frac{f}{r^2}\dot{r} = -\frac{f w}{r^3}. \tag{2. 4}$$

Die Vergleichung von (2.2) mit (2. 4), von (2. 4) mit (1. 3) und von zwei der Gleichungen (1. 3) untereinander liefert schließlich die Relationen

$$s\dot{s} - \ddot{w} = 0, \tag{2. 5}$$

$$\ddot{w} x_i - w \ddot{x}_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \tag{2. 6}$$

$$x_i \ddot{x} - x_j \ddot{x}_i = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2. 7}$$

3. Integration. Die Gleichungen (2. 5) bis (2. 7) können unmittelbar integriert werden. Nach Einführung geeigneter Integrationskonstanten erhält man:

$$h = \frac{s^2}{2} - \dot{w}, \tag{3. 1}$$

$$F_i = \dot{w}\, x_i - w\, x_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{3. 2}$$

$$A_{ij} = x_i\, \dot{x}_j - x_j\, \dot{x}_i \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n) \tag{3. 3}$$

Für $t = 0$ können r, s und w als Funktionen der a_i und b_i ausgedrückt werden. Das nämliche gilt von $\dot{w}$, wenn man (2. 3) benutzt. Also sind die Integrationskonstanten h, F_i, A_{ij} bekannte Funktionen der Anfangswerte a_i und b_i.

4. Die Vergleichung von (2. 3) mit (3. 1) liefert die beiden Relationen

$$\dot{w} = \frac{f}{r} - 2\, h \tag{4. 1}$$

$$\frac{s^2}{2} - \frac{f}{r} = -h. \tag{4. 2}$$

Durch die Gleichung (4. 1) wird $\dot{w}$, durch (4. 2) wird s als Funktion von r ausgedrückt. Außerdem zeigt (4. 2), daß die Größe $-h$, als Summe der kinetischen Energie $\frac{s^2}{2}$, und der potentiellen Energie $-\frac{f}{r}$, gleich der Gesamtenergie des Planeten anzusetzen ist.

5. Nach (3. 2) sind die Größen F_i die Komponenten eines Vektors; denn sie sind linear in den x_i und $\dot{x}_i$ mit rotationsinvarianten Koeffizienten. Die inneren Produkte des Vektors F_i mit den Vektoren x_i einerseits, mit den $\dot{x}_i$ andererseits, müssen daher skalare Größen sein; man findet mit Hilfe von (1. 2) und (2. 3)

$$F_i\, x_i = (\dot{w}\, x_i - w\, \dot{x}_i)\, x_i = r^2\, \dot{w} - w^2, \tag{5. 1}$$

$$F_i\, \dot{x}_i = (\dot{w}\, x_i - w\, \dot{x}_i)\, \dot{x}_i = w\, \dot{w} - w\, s^2 = -\frac{f\, w}{r}. \tag{5. 2}$$

Aus diesen Formeln berechnet man sehr leicht das Quadrat der Länge des Vektors F_i. Setzt man nämlich

$$F^2 = F_i F_i = (F_i x_i) \dot{w} - (F_i \dot{x}_i) w, \tag{5.3}$$

so erhält man

$$F^2 = (r^2 \dot{w} - w^2) \dot{w} + \frac{f w^2}{r}. \tag{5.4}$$

6. Der Fall F = 0. Kreisförmige Bahnen. Bei gewissen Anfangsbedingungen ist die Länge F des Vektors F_i gleich Null. Dieser Grenzfall muß gesondert behandelt werden.

Dafür, daß $F = 0$ sei, müssen alle F_i verschwinden und die rechte Seite von (5. 2) muß dann identisch Null sein. Daraus schließt man, daß die Relationen

$$w \equiv 0 \text{ und } \dot{w} \equiv 0 \tag{6.1}$$

gleichzeitig bestehen müssen. Sind umgekehrt die beiden Anfangswerte $w(0) = 0$ und $\dot{w}(0) = 0$, so folgt aus (5. 4), daß $F = 0$ ist. Nach (2. 3) verschwindet $\dot{w}(0)$ dann und nur dann, wenn

$$s^2(0) = \frac{f}{r(0)}$$

ist. Es folgt das Resultat: Die Invariante F ist dann und nur dann gleich Null, wenn zwischen den Anfangswerten a_i und b_i die Beziehungen

$$a_i b_i = 0, \quad (a_i a_i)(b_j b_j)^2 = f^2 \tag{6.2}$$

gleichzeitig bestehen.

Die Bedingung (6. 1) für das Verschwinden von F kann durch andere – auch allgemeinere – ersetzt werden. Weiß man z. B., daß in einem beliebig kleinen Zeitintervall

$$\dot{w}(t) = \text{const} \tag{6.3}$$

ist, so ist in diesem Intervall $\ddot{w}(t) = 0$; dann ist nach (2. 4) auch $w(t) = 0$ und die Bedingung (6. 1) ist also von selbst erfüllt.

Aus $\dot{w}(t) \equiv 0$ erhält man nach (2. 3) und (4. 1)

$$\frac{f}{r} = s^2 = 2h. \tag{6.4}$$

Somit hat man, falls $F = 0$ ist,

$$r = \text{const}, \quad s = \text{const}. \tag{6.5}$$

Umgekehrt folgt $F = 0$ nicht nur aus jeder der Gleichungen (6. 5), sondern sogar aus der Bedingung

$$\dot{r} = \text{const.} \tag{6. 6}$$

Differentiiert man nämlich die Gleichung (2. 1) und beachtet, daß hier $\ddot{r} \equiv 0$ sein muß, so findet man

$$\dot{w} = \dot{r}^2 + r\,\ddot{r} = \dot{r}^2 = \text{const}, \tag{6. 7}$$

d. h. eine Bedingung, von der wir gerade gezeigt haben, daß sie $F = 0$ nach sich zieht.

7. Wir wollen jetzt die Differentialgleichungen (1. 3) unter der zusätzlichen Bedingung $F = 0$ direkt integrieren. Bei dieser Annahme folgt aus (6. 4)

$$\frac{f}{r^3} = \frac{s^2}{r^2} \tag{7. 1}$$

und die Differentialgleichungen (1. 3) können also geschrieben werden

$$\ddot{x}_i + \frac{s^2}{r^2} x_i = 0. \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{7. 2}$$

Außerdem sind jetzt s und r Konstanten und die Lösungen der Gleichungen (7. 2) lauten.

$$x_i = \alpha_i \cos \frac{s}{r} t + \beta_i \sin \frac{s}{r} t, \tag{7. 3}$$

wobei die α_i und β_i Integrationskonstanten bedeuten. Aus (7. 3) folgt weiter

$$\dot{x}_i = -\frac{s}{r} \alpha_i \sin \frac{s}{r} t + \frac{s}{r} \beta_i \cos \frac{s}{r} t. \tag{7. 4}$$

Nach (1. 4) erhält man aus den letzten beiden Gleichungen

$$\alpha_i = a_i, \quad \beta_i = \frac{r}{s} b_i. \tag{7. 5}$$

Somit sind die α_i und β_i Komponenten von Vektoren, für welche wegen (6. 2) die Relationen

$$\alpha_i \beta_i = 0, \quad \alpha_i \alpha_i = \beta_i \beta_i = \mathrm{r}^2 \tag{7. 6}$$

stattfinden müssen.

Die Gleichungen (7. 3) stellen demnach eine kreisförmige Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit dar, deren Umlaufszeit T mit Hilfe von (6. 2) (in Übereinstimmung mit dem dritten Keplerschen Gesetz) aus der Gleichung

$$\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{f} \tag{7. 7}$$

berechnet wird.

8. Der allgemeine Fall F > 0. Wenn die Länge F des Vektors F_i nicht verschwindet, erhält man neue Integrationskonstanten G_i, die ebenso wie die F_i Komponenten eines Vektors sind, durch den Ansatz

$$F\,G_i = A_{ji}\,F_j = (F_j\,x_j)\,\dot{x}_i - (F_j\,\dot{x}_j)\,x_i. \tag{8. 1}$$

Falls nicht alle G_i verschwinden, stehen die beiden Vektoren F_i und G_i aufeinander senkrecht, denn es besteht die Gleichung

$$F\,(G_i\,F_i) = (F_j\,x_j)\,(F_i\,\dot{x}_i) - (F_j\,x_j)\,(F_i\,x_i) = 0, \tag{8. 2}$$

die, wegen $F > 0$, die Relation

$$F_i\,G_i = 0 \tag{8. 3}$$

nach sich zieht.

Mit Hilfe von (5. 1) und (5. 2) erhält man aus (8. 1)

$$F\,G_i = \frac{f\,w}{r}\,x_i + (r^2\,\dot{w} - w^2)\,\dot{x}_i. \tag{8. 4}$$

Nun beachte man, daß man die beiden Gleichungen (3. 2) und (8. 4) nach x_i und $\dot{x}_i$ auflösen kann, denn die Determinante dieses Systems von linearen Gleichungen ist nach (5. 4) gleich F^2 und von Null verschieden. Wir erhalten auf diese Weise die Relationen

$$F^2\,x_i = (r^2\,\dot{w} - w^2)\,F_i + w\,F\,G_i, \tag{8. 5}$$

$$F^2\,\dot{x}_i = -\frac{f\,w}{r}\,F_i + \dot{w}\,F\,G_i. \tag{8. 6}$$

Der Verlauf der Bewegung ist demnach völlig bestimmt, wenn man die beiden Vektoren F_i und G_i und die Funktionen $r\,(t)$ und $w\,(t)$ kennt. Es genügt sogar $r\,(t)$ zu kennen, da man dann $w\,(t)$ aus (2. 1) berechnen kann.

9. Wir führen noch die Invariante

$$G^2 = G_i\, G_i \tag{9. 1}$$

ein. Durch Faltung von (8. 5) mit sich selbst, erhalten wir dann mit Benutzung von (8. 3) die Gleichung

$$F^2\, r^2 = (r^2\, \dot{w} - w^2)^2 + G^2\, w^2. \tag{9. 2}$$

Andererseits folgt aber aus (5. 4)

$$\begin{aligned} F^2\, r^2 &= (r^2\, \dot{w} - w^2)\, r^2\, \dot{w} + f\, r\, w^2 \\ &= (r^2\, \dot{w} - w^2)^2 + w^2\, ((r^2\, \dot{w} - w^2) + f\, r), \end{aligned}$$

und diese Gleichung liefert in Verbindung mit (9. 2) – nach Streichung des Faktors w^2, der ja nur in isolierten Punkten von t verschwindet – die Relation

$$G^2 = (r^2\, \dot{w} - w^2) + f\, r. \tag{9. 3}$$

Die drei Gleichungen (4. 1), (5. 4) und (9. 3) stellen Relationen zwischen den Funktionen $r\,(t)$, $w\,(t)$ und $\dot{w}\,(t)$ dar. Man kann nun eine dieser Gleichungen durch eine Identität zwischen den Invarianten F_i, G_i uhd h ersetzen. Aus der Verbindung von (5. 4) und (9. 3) folgt nämlich

$$\begin{aligned} F^2 &= (G^2 - f\, r)\, \dot{w} + \frac{f\, w^2}{r} \\ &= G^2\, \dot{w} - \frac{f}{r}\, (r^2\, \dot{w} - w^2) \\ &= G^2\, \dot{w} - \frac{f}{r}\, (G^2 - f\, r) \\ &= f^2 + G^2 \left(\dot{w} - \frac{f}{r}\right). \end{aligned}$$

Indem wir noch (4. 1) heranziehen, finden wir schließlich

$$2\, h\, G^2 = f^2 - F^2. \tag{9. 4}$$

Ist also $G = 0$, so muß $F = f$ genommen werden und h kann beliebig gewählt werden. Ist aber $G > 0$, so muß

$$-\infty < 2\, h < \frac{f^2}{G^2} \tag{9. 5}$$

genommen werden, damit

$$F = \sqrt{f^2 - 2hG^2} \tag{9. 6}$$

reell und von Null verschieden sei.

10. Die Gestalt der möglichen Planetenbahnen und der Flächensatz. Die Gleichung (8. 5) lehrt uns, daß die Bahnkurven der Planeten entweder auf einer Halbgeraden oder auf einer Ebene befinden.

Die Bahn liegt auf einer Halbgeraden, die dem Vektor F_i entgegengesetzt ist, wenn alle $G_i = 0$ sind. Dann hat man $G = 0$ und gemäß (9. 3)

$$(r^2 \dot{w} - w^2) = -f r; \tag{10. 1}$$

ferner ist $F = f$, so daß (8. 5) die Gestalt annimmt

$$F x_i = -r F_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{10. 2}$$

In den Gleichungen (1. 4) müssen also

$$b_i = \lambda a_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{10. 3}$$

sein, wobei der Proportionalitätsfaktor $\lambda = \frac{\dot{r}}{r}$ auch gleich Null sein darf. Umgekehrt zeigt sich, daß die Bedingungen (10. 3) die Gleichung (10. 1) nach sich ziehen, und dies genügt, um schließen zu können, daß $G = 0$ ist.

Ist zweitens $G > 0$, so liegt die Bahn in der Ebene durch den Ursprung der Koordinaten, welche die beiden Vektoren F_i und G_i enthält. Durch eine Drehung des Koordinatensystems kann man erreichen, daß

$$\begin{cases} F_1 = F, \; F_2 = 0, \; F_3 = \ldots = F_n = 0 \\ G_1 = 0, \; G_2 = G, \; G_3 = \ldots = G_n = 0 \end{cases} \tag{10. 4}$$

sei. Setzt man dann

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \tag{10. 5}$$

so liegt die Planetenbahn in der $x\,y$-Ebene und wird durch die Gleichungen

$$F x = r^2 \dot{w} - w^2 = G^2 - f r, \; F y = G w \tag{10. 6}$$

dargestellt.

11. Der Winkel v, welchen der Radiusvektor x_i mit dem Vektor F_i einschließt, wird die wahre Anomalie genannt. Für das innere Produkt $F_i x_i$ kann man dann schreiben

$$F_i x_i = F r \cos v, \tag{11. 1}$$

und nach (5. 1) und (9. 2) hat man

$$r^2 \dot{w} - w^2 = F r \cos v, \quad G w = F r \sin v \tag{11. 2}$$

zwei Gleichungen, die man übrigens auch aus (10. 6) hätte ableiten können. Die Vergleichung von (11. 2) mit (9. 3) gibt uns weiter

$$r = \frac{G^2}{f + F \cos v}. \tag{11. 3}$$

Diese letzte Gleichung kann man auch schreiben:

$$f^2 r^2 = (G^2 - F r \cos v)^2 \tag{11. 4}$$

oder, indem man zu rechtwinkligen Koordinaten übergeht,

$$f^2 (x^2 + y^2) = (G^2 - F x)^2. \tag{11. 5}$$

Dies besagt, daß die Bahn des Himmelskörpers auf einem Kegelschnitt liegt, von dem ein Brennpunkt mit dem Anfangspunkt der Koordinaten zusammenfällt.

Wir differentiieren ferner die Gleichung

$$f + F \cos v = \frac{G^2}{r},$$

die aus (11. 3) folgt, und erhalten

$$F \sin v \cdot \dot{v} = \frac{G^2}{r^2} \dot{r} = \frac{G^2}{r^3} w = \frac{G}{r^2} F \sin v.$$

Daraus folgt, weil $\sin v$, ebenso wie w, nur in bestimmten Zeitpunkten verschwinden kann,

$$r^2 \dot{v} = G, \tag{11. 6}$$

d. h. eine Gleichung, die den Flächensatz ausdrückt. Dabei zeigt sich, daß die Länge des Vektors G_i gleich der Flächenkonstante ist.

Den Abstand des Perihels vom Anziehungszentrum erhält man, indem man in (11. 3) die wahre Anomalie $v = 0$ setzt; dieser Abstand ist also gleich

$$\frac{G^2}{f+F}. \tag{11. 7}$$

Unsere Überlegungen zeigen außerdem, daß die Richtung des Vektors F_i mit derjenigen zusammenfällt, die vom Anziehungszentrum nach dem Perihel der Bahn zeigt. Für $n = 3$ kann man also die Länge des Knotens, die Länge des Perihels und die Neigung der Bahn als Funktionen der G_i, F_i ausdrücken, wenn man die Ekliptik mit der x_1x_2-Ebene zusammenfallen läßt.

12. Der Hodograph von Hamilton. Unter Hodographen versteht man die Kurve, die von dem Endpunkte des Vektors $\dot{x}$, $\dot{y}$ im Laufe der Zeit beschrieben wird, welche Hamilton zuerst betrachtet hat. Unsere Formeln erlauben fast ohne neue Rechnungen die Gesetzmäßigkeiten, die Hamilton bei dieser Gelegenheit aufgestellt hat, zu erkennen.

Gemäß (8. 6) und (4. 1) hat man nämlich, wenn man die Koordinaten des § 10 benutzt,

$$\dot{x} = -\frac{fw}{Fr}, \quad \dot{y} = \frac{G\dot{w}}{F} = \frac{G}{F}\left(\frac{f}{r} - 2h\right). \tag{12. 1}$$

Nach (11. 2), (11. 3) und (9. 4) hat man aber

$$\frac{w}{r} = \frac{F}{G}\sin v, \quad \frac{1}{r} = \frac{f + F\cos v}{G^2}, \quad 2h = \frac{f^2 - F^2}{G^2},$$

so daß schließlich kommt

$$\dot{x} = -\frac{f}{G}\sin v \tag{12. 2}$$

$$\dot{y} = \frac{f}{G}\cos v - \frac{F}{G}. \tag{12. 3}$$

Der Hodograph liegt also auf einem Kreis vom Radius $\frac{f}{G}$, deren Mittelpunkt die Koordinaten $\left(0, -\frac{F}{G}\right)$ besitzt.

13. Umkehrung der Fragestellung. Auf den vorangehenden Seiten sind wir von einer beliebigen Lösung der Differentialgleichungen (1. 3) ausgegangen, haben die Funktionen $r(t)$, $w(t)$ und die Integrationskonstanten F_i, G_i, h eingeführt und Beziehungen zwischen diesen Größen abgeleitet.

Jetzt wollen wir umgekehrt die $(2n+1)$- Konstanten

$$F_i,\ G_i,\ h \tag{13. 1}$$

willkürlich, doch mit der Einschränkung vorschreiben, daß mindestens ein $F_i \neq 0$ ist und daß die Relationen (8. 3) und (9. 4) bestehen sollen, daß also die Beziehungen

$$F_i\ G_i = 0, \quad 2\,h\,G^2 = f^2 - F^2 < f^2 \tag{13. 2}$$

gelten.

Dann wollen wir zwei nicht konstante Funktionen $r(t)$ und $w(t)$ so bestimmen, daß die Differentialgleichungen (4. 1) und (9. 3), d. h.

$$\dot{w} = \frac{f}{r} - 2\,h, \quad G^2 = (r^2\,\dot{w} - w^2) + f\,r \tag{13. 3}$$

bestehen, und verifizieren, daß die durch die Gleichungen

$$F^2\,x_i = (G^2 - f\,r)\ F_i + w\ F\,G_i \tag{13. 4}$$

definierten Funktionen $x_i(t)$ sämtlichen Bedingungen des § 1 genügen.

Das System der Differentialgleichungen (13. 3) ersetzen wir durch ein anderes, das bequemer ist. Erstens eliminieren wir $\dot{w}$ zwischen den Gleichungen (13. 3) und erhalten

$$w^2 = 2\ (f\,r - h\,r^2) - G^2. \tag{13. 5}$$

Daraus folgt weiter durch Differentiation

$$w\,\dot{w} = (f - 2\,h\,r)\ \dot{r}, \tag{13. 6}$$

und da nach der ersten Gleichung (13. 3)

$$f - 2\,h\,r = r\,\dot{w}$$

ist und nach Voraussetzung $\dot{w} \neq 0$ ist, erhält man schließlich

$$w = r\,\dot{r}. \tag{13. 7}$$

Umgekehrt bestätigt man aus (13. 5) und (13. 7) mit Hilfe von (13. 6) die Richtigkeit der beiden Gleichungen (13. 3).

14. Durch Faltung der Gleichung (13. 4) mit sich selbst erhalten wir

$$F^2\,(x_i\,x_i) = (G^2 - f\,r)^2 + w^2\,G^2,$$

oder, wenn wir (13. 5) und (13. 2) beachten,

$$\begin{aligned} F^2\,(x_i\,x_i) &= (G^2 - f\,r)^2 + 2\,(f\,r - h r^2)\,G^2 - G^4 \\ &= (f^2 - 2\,h\,G^2)\,r^2 \\ &= F^2\,r^2. \end{aligned}$$

Wegen $F > 0$ ist also

$$x_i\,x_i = r^2. \tag{14. 1}$$

Wir differentiieren nun die Gleichung (13. 4) zweimal und erhalten

$$F^2\,\ddot{x}_i = -f\,\ddot{r}\,F_i + \ddot{w}\,F\,G_i. \tag{14. 2}$$

Nun erhält man aus der Differentiation von (13. 7)

$$\dot{w} = \dot{r}^2 + r\ddot{r} = \frac{w^2}{r^2} + r\ddot{r},$$

und es ist also

$$\ddot{r} = \frac{r^2\,\dot{w} - w^2}{r^3} = \frac{G^2 - f\,r}{r^3}. \tag{14. 3}$$

Andererseits liefert die Differentiation der ersten Gleichung (13. 3)

$$\ddot{w} = -\frac{f}{r^2}\,\dot{r} = -\frac{f}{r^3}\,w. \tag{14. 4}$$

Setzt man $\ddot{r}$ und $\ddot{w}$ aus diesen Gleichungen in (14. 2) ein, so erhält man schließlich

$$\ddot{x}_i = -\frac{f}{r^3}\,x_i. \tag{14. 5}$$

Die Gleichungen (14. 1) und (14. 5) zeigen, daß die Funktionen $x_i\,(t)$ Lösungen der Differentialgleichungen (1. 3) sind.

Wenn man dagegen (13. 4) nur einmal differentiiert und hierin $\dot{w}$ und $\dot{r}$ aus (13. 3) und (13. 7) ersetzt, erhält man

$$F^3 \dot{x}_i = -\frac{f w}{r} F_i + \left(\frac{f}{r} - 2h\right) F G_i. \tag{14. 6}$$

Durch Faltung von (14. 6) mit sich selbst und durch Faltung von (14. 6) mit (13. 4) findet man auf ähnliche Weise nach einigen Rechnungen

$$\dot{x}_i \dot{x}_i = 2\left(\frac{f}{r} - h\right), \qquad x_i \dot{x}_i = w, \tag{14. 7}$$

und aus diesen Gleichungen schließt man, daß sämtliche Formeln des § 1 bei den gemachten Annahmen gelten müssen.

15. Um unsere Aufgabe zu Ende zu führen, müssen wir noch die beiden Gleichungen (13. 5) und (13. 7) integrieren. Aus diesen folgt für die Funktion $r(t)$ die Differentialgleichung

$$r^2 \dot{r}^2 = 2\,(f r - h r^2) - G^2, \tag{15. 1}$$

die separierbar ist. Sie erlaubt die Variable t als Funktion von r mit Hilfe des Integrals

$$t = \int_{r(0)}^{r} \frac{r\,dr}{\sqrt{2\,(f r - h r^2) - G^2}} \tag{15. 2}$$

zu berechnen. Die Gleichung (15. 2) gilt in einer gewissen Umgebung von $r(0)$, wenn man dafür sorgt, daß die Quadratwurzel unter dem Integral mit dem Vorzeichen von $w(0)$ genommen wird.[1]

Denkt man sich nun $r(t)$ aus der Gleichung (15. 2) bestimmt, berechnet man hierauf $w(t)$ und $\dot{w}(t)$ mit Hilfe der Gleichungen (13. 5) und (13. 3), so hat man alle nötigen Daten, um die rechte Seite der Gleichung (13. 4) und folglich die Bahnkurven $x_i(t)$ auszuwerten. Man bewältigt die Schwierigkeiten, die mit diesen

[1] Hat $r(0)$ zufällig einen Wert, für welchen die Quadratwurzel verschwindet, so wechselt das Vorzeichen dieses Ausdrucks, je nachdem man $t > 0$ oder $t < 0$ nimmt. Das Vorzeichen der Wurzel in jedem dieser Fälle ist aber wiederum eindeutig bestimmt und hängt davon ab, ob die Quadratwurzel für $r > r(0)$ oder für $r < r(0)$ reell ist.

Rechnungen verbunden sind, durch die Einführung von uniformisierenden Variablen, durch welche das Integral (15. 2) in geschlossener Form dargestellt wird. Die Wahl dieser uniformisierenden Variablen hängt nur vom Vorzeichen von h ab; wir werden drei Fälle zu unterscheiden haben, je nachdem $h = 0$, $h > 0$ oder $h < 0$ ist.

16. Parabolische Bahnen. Ist erstens $h = o$, so findet man aus (13. 5) die Gleichungen

$$r = \frac{G^2 + w^2}{2f}, \quad \frac{dr}{dw} = \frac{w}{f}. \tag{16. 1}$$

In diesem Falle kann man w selbst als uniformisierende Variable nehmen, und an Stelle von (15. 2) schreiben

$$t = \int_{w(0)}^{w} \frac{r}{w} \frac{dr}{dw} dw = \int_{w(0)}^{w} \frac{G^2 + w^2}{2f^2} dw. \tag{16. 2}$$

Setzt man also

$$t_0 = \frac{3 G^2 w(0) + w^3(0)}{6f^2}, \tag{16. 3}$$

so findet man aus (16. 2)

$$t + t_0 = \frac{3 G^2 w + w^3}{6f^2}. \tag{16. 4}$$

Durch Einsetzen des Wortes (16. 1) von r in (13. 4) und (14. 6) erhält man, wenn man noch bedenkt, daß hier $F = f$ sein muß

$$x_i = \frac{G^2 - w^2}{2f^2} F_i + \frac{w}{f} G_i \tag{16. 5}$$

$$\dot{x}_i = -\frac{2w}{G^2 + w^2} F_i + \frac{2f}{G^2 + w^2} G_i. \tag{16. 6}$$

17. Mit den Koordinaten des § 10 hat man also

$$x = \frac{G^2 - w^2}{2f}, \quad y = \frac{Gw}{f}, \tag{17. 1}$$

$$\dot{x} = -\frac{2fw}{G^2 + w^2}, \quad \dot{y} = \frac{2fG}{G^2 + w^2}. \tag{17. 2}$$

Ist $G \neq 0$, so ist es angebracht, eine uniformisierende Variable u einzuführen, welche durch die Gleichung

$$w = G u \tag{17.3}$$

definiert ist. Dann nehmen die obigen Formeln die Gestalt an:

$$\begin{cases} t + t_0 = \dfrac{G^3}{6 f^2}(3 u + u^3) \\ x = \dfrac{G^2}{2 f}(1 - u^2), \quad y = \dfrac{G^2}{2 f} 2 u, \quad r = \dfrac{G^2}{2 f}(1 + u^2), \\ \dot{x} = \dfrac{2 f}{G} \dfrac{-u}{1 + u^2}, \quad \dot{y} = \dfrac{2 f}{G} \dfrac{1}{1 + u^2}. \end{cases} \tag{17.4}$$

Die Bahn ist parabolisch und die letzten Formeln zeigen, wie sich die Verhältnisse ändern, wenn man eine derartige Bahn durch eine ähnliche und ähnlich gelegene ersetzt. Ferner sind die Funktionen $t(w)$ und $t(u)$ nach (16. 4) und (17. 4) monoton wachsend, so daß auch die inversen Funktionen $w(t)$ oder $u(t)$ eindeutig bleiben, wenn t von $-\infty$ bis $+\infty$ variiert. Also wird im Laufe der Zeit die ganze Parabel einmal beschrieben.

18. Keplersche Ellipsen. Zweitens wollen wir annehmen, daß

$$0 < h < \frac{f^2}{2 G^2} \text{ und folglich } F < f \tag{18.1}$$

ist. Dann hat die Gleichung

$$2(f r - h r^2) - G^2 = 0 \tag{18.2}$$

zwei reelle voneinander verschiedene positive Wurzeln ρ_1, ρ_2, und man findet

$$\rho_i = \frac{f \pm \sqrt{f^2 - 2 h G^2}}{2 h} = \frac{f \pm F}{2 h}. \tag{18.3}$$

Die Quadratwurzel unter dem Integral (15. 2) ist nur dann reell, wenn r im Intervall

$$\frac{f - F}{2 h} \leqq r \leqq \frac{f + F}{2 h}$$

liegt. Es ist daher naheliegend r mit Hilfe eines Parameters u durch die Formel

$$(18.4) \qquad r = \frac{f - F\cos u}{2h}, \quad f - hr = \frac{f + F\cos u}{2}$$

darzustellen. In diesem Falle hat man nämlich

$$\begin{aligned} w^2 &= 2r(f - hr) - G^2 \\ &= \frac{f^2 - F^2\cos^2 u}{2h} - \frac{f^2 - F^2}{2h} \\ &= \frac{F^2 \sin^2 u}{2h}, \end{aligned}$$

und man kann immer u so wählen, daß

$$(18.5) \qquad w = \frac{F\sin u}{\sqrt{2h}}$$

ist. Drückt man das Integral (15.2) mit Hilfe von u aus, so findet man

$$t = \int_{u(0)}^{u} \frac{r}{w}\frac{dr}{du}\,du = \int_{u(0)}^{u} \frac{f - F\cos u}{\sqrt{2h}\,F\sin u}\,\frac{F\sin u}{2h}\,du.$$

Dieses Integral kann ausgewertet werden; man findet

$$(18.6.) \qquad t + t_0 = \frac{fu - F\sin u}{(2h)^{3/2}},$$

wenn man

$$(18.7) \qquad t_0 = \frac{fu(0) - F\sin u(0)}{(2h)^{3/2}}$$

setzt, und $u(0)$ aus den miteinander verträglichen Gleichungen

$$(18.8) \quad \cos u(0) = \frac{f - 2hr(0)}{F}, \quad \sin u(0) = \frac{\sqrt{2h}\,w(0)}{F}$$

bestimmt.

Wir setzen die obigen Werte von r und w in (13.4) und (14.6) ein, indem wir noch die Relationen

$$G^2 - fr = \frac{f^2 - F^2) - f(f - F\cos u)}{2h} = \frac{F(f\cos u - F)}{2h}$$

$$\frac{f}{r} - 2h = 2h\frac{F\cos u}{f - F\cos u}$$

berücksichtigen, und finden

$$x_i = \frac{f \cos u - F}{2h} \frac{F_i}{F} + \frac{\sin u}{\sqrt{2h}} G_i, \tag{18. 9}$$

$$\dot{x}_i = -\frac{f\sqrt{2h} \sin u}{f - F \cos u} \frac{Fi}{F} + \frac{2h \cos u}{f - F \cos u} G_i. \tag{18. 10}$$

Die Bewegung des Planeten wird durch die Gleichungen (18. 6) bis (18. 10) völlig beschrieben.

19. Die Astronomen sind gewöhnt, folgende Beziehungen zu benutzen:

$$a = \frac{f}{2h}, \quad e = \frac{F}{f} < 1. \tag{19. 1}$$

In unsere Formeln müssen wir also setzen

$$2h = \frac{f}{a}, \quad F = fe, \quad G = \frac{\sqrt{f^2 - F^2}}{2h} = \sqrt{fa(1 - e^2)}. \tag{19. 2}$$

Wenn wir außerdem noch die Koordinaten des § 10 unseren Formeln zugrunde legen, so erhalten wir

$$x = a(\cos u - e), \quad y = a\sqrt{1 - e^2} \sin u, \quad r = a(1 - e \cos u) \tag{19. 3}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{f}{a}} \frac{\sin u}{1 - e \cos u}, \quad \dot{y} = \sqrt{\frac{f}{a}(1 - e^2)} \frac{\cos u}{1 - e \cos u}. \tag{19. 4}$$

Die Gleichung (18. 6) geht dann in die sogenannte Keplersche Gleichung über, nämlich

$$n(t + t_0) = u - e \sin u, \tag{19. 5}$$

wenn man noch

$$n = \frac{(2h)^{3/2}}{f} = \sqrt{\frac{f}{a^3}} \tag{19. 6}$$

nimmt.

Die durch die Gleichung (19. 5) definierte Funktion $t(u)$ ist monoton wachsend, und die Gleichung (19. 3) definiert eine Keplersche Ellipse, die immer wieder periodisch beschrieben wird, wenn u um 2π wächst. Die Größe a stellt die halbe große

Achse der Ellipse dar, e ist ihre Exzentrizität und n wird die mittlere Bewegung genannt. Die Umlaufszeit oder Periode T wird durch die Gleichung

$$T = \frac{2\pi}{n} \tag{19. 7}$$

definiert, und es ist also auch

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{f}. \tag{19. 8}$$

Der Parameter u wird nach Kepler die exzentrische Anomalie genannt. Er stellt sich ganz von selbst ein, wenn man, wie Kepler es getan hat, die Ellipse als schiefe Projektion eines Kreises betrachtet. Auch der Übergang von der exzentrischen Anomalie u zur wahren Anomalie v, die wir im § 11 betrachtet haben, ist sehr einfach. Man braucht nur die Ausdrücke (11. 3) und (18. 4) für r und die entsprechenden Ausdrücke für w miteinander zu vergleichen. Auf diese Weise findet man

$$\cos v = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u}, \quad \sin v = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u}. \tag{19. 9}$$

Um diese Gleichungen nach u aufzulösen, genügt es, u mit v zu vertauschen und e durch $-e$ zu ersetzen, denn man kann schreiben

$$\begin{cases} (1 - e \cos u)\,(1 + e \cos v) = 1 - e^2, \\ \dfrac{\sin v}{\sqrt{1 + e \cos v}} = \dfrac{\sin u}{\sqrt{1 - e \cos u}}. \end{cases} \tag{19. 10}$$

Alle diese Formeln gelten auch für den Fall $h > 0$, $G = 0$. Man braucht nur in ihnen $e = 1$ zu setzen. Allerdings besitzt dann die Bewegung eine Singularität für $u = 0$ oder allgemeiner für $u = 2k\pi$.

20. Hyperbelbahnen. Der dritte Fall, bei welchem

$$h < 0, \; F > f \tag{20. 1}$$

ist, ist dem soeben behandelten durchaus ähnlich. Nur müssen die trigonometrischen Funktionen durch hyperbolische ersetzt werden. Wir begnügen uns, die Formeln zusammenzustellen:

$$r = \frac{F \cosh u - f}{-2h}, \quad f - hr = \frac{F \cosh u + f}{2}. \tag{20. 2}$$

$$w = \frac{F \sinh u}{\sqrt{-2h}}, \tag{20. 3}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(-2h)^{3/2} (t + t_0) = F \sinh u - fu \\ &(-2h)^{3/2} (t_0 = F \sinh u (0) - fu (0) \\ &\cosh u (0) = \frac{f - 2hr (0)}{F}, \quad \sinh u (0) = \frac{\sqrt{-2h}\, w (0)}{F} \end{aligned} \right. \tag{20. 4}$$

$$x_i = \frac{F - f \cosh u}{-2h} \frac{F_i}{F} + \frac{\sinh u}{\sqrt{-2h}} G_i. \tag{20. 5}$$

$$\dot{x}_i = -\frac{f \sqrt{-2h \sinh u}}{F \cosh u - f} \frac{F_i}{F} + \frac{(-2h) \cosh u}{F \cosh u - f} G_i. \tag{20. 6}$$

Ebenso wie im § 19 führen wir die Bezeichnungen ein

$$\left\{ \begin{aligned} &-2h = \frac{f}{a}, \quad F = fe, \quad G = \sqrt{af(e^2 - 1)} \\ &n = \frac{(-2h)^{3/2}}{f} = \sqrt{\frac{f}{a^3}} \end{aligned} \right. \tag{20. 7}$$

und erhalten

$$x = a (e - \cosh u), \quad y = a \sqrt{e^2 - 1} \sinh u, \tag{20. 8}$$

$$r = a (e \cosh u - 1), \tag{20. 9}$$

$$\dot{x} = -\sqrt{\frac{f}{a}} \frac{\sinh u}{e \cosh u - 1}, \quad \dot{y} = \sqrt{\frac{f}{a} (e^2 - 1)} \frac{\cosh u}{e \cosh u - 1}, \tag{20. 10}$$

$$n (t + t_0) = e \sin hu - u, \tag{20. 11}$$

$$\cos v = \frac{e - \cosh u}{e \cosh u - 1}, \quad \sin v = \frac{\sqrt{e^2 - 1} \sinh u}{e \cosh u - 1}, \tag{20. 12}$$

$$\left\{ \begin{aligned} &(e \cosh u - 1) (1 + e \cos v) = e^2 - 1, \\ &\frac{\sin v}{\sqrt{1 + e \cos v}} = \frac{\sinh u}{\sqrt{e \cosh u - 1}}. \end{aligned} \right. \tag{20. 13}$$

Die Bahn besteht aus einem Ast einer Hyperbel, deren Asymptoten den Winkel φ miteinander bilden mögen. Dann ist

$$tg\frac{\varphi}{2} = \sqrt{e^2 - 1}. \tag{20. 14}$$

21. Existenz und Eindeutigkeit der Lösungen. Um nach der obigen Methode diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen (1. 3) aufzustellen, welche die Anfangsbedingungen (1. 4) besitzt, muß man folgendermaßen vorgehen. Zuerst bestimmt man nach der Bemerkung am Ende des § 3 die Anfangswerte von r, s, w und $\dot{w}$ und mit deren Hilfe die Integrationskonstanten h, F_i und A_{ij}.

Falls alle $F_i = 0$ sind, ist die Bahn kreisförmig und wird nach dem § 7 berechnet.

Ist aber $F > 0$, so bestimme man die G_i nach (8. 1). Jetzt wende man, indem man von den gefundenen Größen ausgeht, die Methode der §§ 13 ff. an und verifiziere, daß die auf diese Weise berechnete Lösung den geforderten Anfangsbedingungen genügt. Dazu reicht die Bemerkung hin, daß (3. 2) und (8. 4) erfüllt sind, wenn man $x_i = a_i$, $\dot{x}_i = b_i$ nimmt und r, w, $\dot{w}$ durch $r(0)$, $w(0)$, $\dot{w}(0)$ ersetzt. Also werden diese selben Größen die Gleichungen (8. 5) und (8. 6) befriedigen.

Daß aber die so gefundene Lösung eindeutig bestimmt ist, folgt dann einfach aus der Zwangsläufigkeit der soeben geschilderten Operationen.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1947

Band/Volume: 1945

Autor(en)/Author(s): Caratheodory [Carathéodory] Constantin

Artikel/Article: Über die Integration der Differentialgleichungen der Keplerschen Planetenbewegung 57-76