

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1945/46

---

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178  
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen  
Printed in Germany. Auflage 1000

## Ein Analogon zu einem Satz von Minkowski.

Von Oskar Perron in München.

Vorgelegt am 8. November 1946.

Von Minkowski stammt der folgende Satz, für den es heute zahlreiche Beweise gibt:<sup>1</sup>

Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma$  reelle Zahlen mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , so gibt es ganze, rationale Zahlen  $x, y$  derart, daß

$$|\alpha x + \beta y - \rho| \cdot |\gamma x + \delta y - \sigma| \leq \frac{1}{4}.$$

Daß dabei die Schranke  $\frac{1}{4}$  nicht verkleinert werden kann, lehrt

das Beispiel  $|x - \frac{1}{2}| \cdot |y - \frac{1}{2}|$ .

Es ist zu vermuten, daß für jeden imaginären quadratischen Zahlkörper  $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ , wo  $D > 0$  quadratfrei, das folgende Analogon zu dem Minkowskischen Satz gilt:

Sind  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma$  komplexe Zahlen mit  $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ , so gibt es ganze Zahlen  $x, y$  des Körpers  $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$  derart, daß

$$|\alpha x + \beta y - \rho| \cdot |\gamma x + \delta y - \sigma| \leq \begin{cases} \frac{1+D}{4} & \text{für } D \equiv 3 \pmod{4} \\ \frac{(1+D)^2}{16D} & \text{für } D \equiv 1 \pmod{4}. \end{cases}$$

Schon der Nachweis, daß es überhaupt eine von  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \rho, \sigma$  unabhängige Schranke gibt, dürfte nicht ganz leicht sein. Daß die Schranke nicht kleiner sein kann als angegeben, lehrt das Beispiel

<sup>1</sup> Math Annalen 54 S. 108. Auch Minkowski, Gesammelte Abhandlungen I S. 336. Die weitere Literatur findet man bei J. F. Koksma, Diophantische Approximationen = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete IV 4, Berlin 1936, Kap. II § 3. Inzwischen kam ein neuer Beweis des Verfassers hinzu: Math. Annalen 115 (1938) S. 656.

$$\left| x - \frac{1 + i\sqrt{D}}{2} \right| \cdot \left| y - \frac{1 + i\sqrt{D}}{2} \right| \quad \text{für } D \not\equiv 3 \pmod{4}$$

$$\left| x - \frac{1}{2} + i\frac{D-1}{4\sqrt{D}} \right| \cdot \left| y - \frac{1}{2} + i\frac{D-1}{4\sqrt{D}} \right| \quad \text{für } D \equiv 3 \pmod{4},$$

da keiner der beiden Faktoren kleiner als

$$\frac{\sqrt{1+D}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1+D}{4\sqrt{D}}$$

gemacht werden kann, wie sofort daraus zu ersehen ist, daß die Zahlen

$$1, i\sqrt{D} \quad \text{bzw.} \quad 1, \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$$

eine Basis des Körpers bilden.

Für  $D = 1, 2, 3$  ist es mir gelungen, die Vermutung zu beweisen. Der Beweis für  $D = 1$  soll hier mitgeteilt werden.

Setzt man

$$\rho = \alpha\mu + \beta\nu, \quad \sigma = \gamma\mu + \delta\nu,$$

und multipliziert man die Faktoren aus, wobei

$$\alpha\gamma = a, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = b, \quad \beta\delta = c$$

gesetzt werden mag, so nimmt der zu beweisende Satz die folgende Gestalt an:

Satz: Sind  $a, b, c, \mu, \nu$  komplexe Zahlen mit  $b^2 - 4ac = 1$ , so gibt es ganze Zahlen  $x, y$  des Körpers  $\mathfrak{K}(i)$  derart, daß

$$|a(x - \mu)^2 + b(x - \mu)(y - \nu) + c(y - \nu)^2| \leq \frac{1}{2}.$$

Zu seinem Beweis machen wir eine Transformation

$$\begin{aligned} x &\rightarrow px + qy, & y &\rightarrow rx + sy, \\ \mu &\rightarrow p\mu + q\nu, & \nu &\rightarrow r\mu + s\nu, \end{aligned}$$

wobei  $p, q, r, s$  ganze Zahlen aus  $\mathfrak{K}(i)$  mit  $ps - qr = 1$  sind. Die zu beweisende Ungleichung geht dann über in:

$$|A(x - \mu)^2 + B(x - \mu)(y - \nu) + C(y - \nu)^2| \leq \frac{1}{2},$$

wobei

$$\begin{aligned} A &= ap^2 + bpr + cr^2, \\ B &= 2apq + b(ps + qr) + 2crs, \\ C &= aq^2 + bqs + cs^2, \end{aligned}$$

also

$$B^2 - 4AC = (b^2 - 4ac)(ps - qr)^2 = b^2 - 4ac = 1.$$

Nun kann man die ganzen Zahlen  $p, r$  aus  $\mathfrak{R}(i)$  so wählen, daß  $|A| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$  ist.<sup>2</sup> Für die Zwecke unseres Beweises genügt schon, daß man  $|A| \leq \sqrt[3]{2}$  machen kann, was vielleicht einfacher beweisbar ist. Natürlich kann man  $p, r$  als teilerfremd wählen und dann  $q, s$  so bestimmen, daß  $ps - qr = 1$  ist.<sup>3</sup> Hiernach ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir beim Beweis des Satzes von vornherein  $|a| \leq \sqrt[3]{2}$  voraussetzen.

Ist nun  $a = 0$ , so ist  $b = \pm 1$ , und die zu beweisende Ungleichung lautet

$$|y - \nu| \cdot |x - \mu \pm c(y - \nu)| \leq \frac{1}{2}.$$

Sie läßt sich ohne weiteres durch ganze Zahlen  $x, y$  aus  $\mathfrak{R}(i)$  erfüllen, indem man der Reihe nach

$$|y - \nu| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |x - \mu \pm c(y - \nu)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

macht. Sei also jetzt  $a \neq 0$ . Die zu beweisende Ungleichung läßt sich dann so schreiben:

$$\left| \left[ x - \mu + \frac{b}{2a}(y - \nu) \right]^2 - \frac{(y - \nu)^2}{4a^2} \right| \leq \frac{1}{2|a|}.$$

<sup>2</sup> Das ist bewiesen in meiner Arbeit: Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen. Math. Ztschr. 35 (1932) S. 563-78.

<sup>3</sup> In  $\mathfrak{R}(i)$  gelten ja die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze, alle Ideale sind Hauptideale.

Nun wählen wir die ganze Zahl  $y$  so, daß  $|y - v| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist, und setzen

$$\frac{(y - v)^2}{4a^2} = \alpha, \quad \frac{1}{2|a|} = \beta, \quad \mu - \frac{b}{2a}(y - v) = -\gamma.$$

Wegen  $|y - v| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ,  $|a| \leq \sqrt[3]{\frac{2}{3}}$  ist dann

$$\beta^2 \geq 2|\alpha|, \quad \beta^2 \geq \frac{3}{8}, \quad (1)$$

und es muß noch gezeigt werden, daß sich die ganze Zahl  $x$  aus  $\Re(z)$  so wählen läßt, daß

$$|(x + \gamma)^2 - \alpha| \leq \beta$$

ist. Nun bedeutet die Ungleichung

$$|z^2 - \alpha| \leq \beta$$

in der komplexen  $z$ -Ebene eine Cassinische Kurve mit den Brennpunkten  $\pm \sqrt{\alpha}$  und ihr Inneres. Es ist also nur noch zu zeigen, daß auf oder innerhalb der Cassinischen Kurve zu jedem Punkt  $\gamma$  ein homologer Punkt liegt, d. h. einer der Gestalt  $\gamma + x = \gamma + \xi + i\eta$ , wo  $\xi, \eta$  ganze rationale Zahlen sind.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall:  $\beta \leq 2|\alpha|$ , also  $\beta^2 \leq 4\alpha\bar{\alpha}$ , wo  $\bar{\alpha}$  die zu  $\alpha$  konjugiert-komplexe Zahl bedeutet. In diesem Fall liegt die Kreisperipherie

$$\left| z - \frac{\sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}} \right| = \frac{\beta}{2\sqrt{|\alpha|}}$$

mit dem Radius  $\frac{\beta}{2\sqrt{|\alpha|}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  (wegen (1)), also auch ihr

Inneres, ganz in der Cassinischen Kurve. In der Tat, für die Punkte der Kreisperipherie ist

$$z = \frac{\sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}} + \frac{\beta}{2\sqrt{\bar{\alpha}}} e^{i\varphi},$$

woraus folgt

$$(z^2 - \alpha) e^{-i\varphi} = \frac{\beta}{2\bar{\alpha}} \sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2} + \frac{\beta^2}{2\bar{\alpha}} i \sin \varphi,$$

also

$$|z^2 - \alpha|^2 = \frac{\beta^2}{4|\alpha|^2} (4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2 + \beta^2 \sin^2 \varphi) \leq \frac{\beta^2}{4|\alpha|^2} \cdot 4\alpha\bar{\alpha} = \beta^2,$$

w. z. b. w.

Da der Kreisradius  $\geq \frac{1}{\sqrt{2}}$  ist, so liegt in der Cassinischen Kurve auch ein achsenparalleles Quadrat mit der Seitenlänge 1, und ein solches enthält zu jedem Punkt einen homologen.

Zweiter Fall:  $\beta > 2|\alpha|$ . Wir setzen

$$\alpha = p + iq, \quad z = x + iy,$$

wo  $p, q, x, y$  reell. Dann wird die Sache bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß für

$$-\frac{1}{2} < y \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq x < 1$$

von den beiden Zahlen

$$P = |z^2 - \alpha|^2 = (x^2 - y^2 - p)^2 + (2xy - q)^2,$$

$$Q = |(z-1)^2 - \alpha|^2 = [(x-1)^2 - y^2 - p]^2 + [2(x-1)y - q]^2$$

wenigstens eine  $\leq \beta^2$  ist. Das wiederum wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß

$$(1-x)P + xQ \leq \beta^2$$

ist (man beachte  $0 \leq x < 1$ ). Nun ist

$$P = x^4 + 2x^2(y^2 - p) - 4qxy + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2,$$

$$Q = (1-x)^4 + 2(1-x)^2(y^2 - p) + 4q(1-x)y + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2,$$

also, wenn  $x(1-x) = v$  gesetzt wird,

$$(1-x)P + xQ = v - 3v^2 + 2v(y^2 - p) + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2.$$

Das Maximum dieser Funktion von  $v$  liegt, da  $v = x(1-x)$  auf das Intervall  $0 \leq v \leq \frac{1}{4}$  beschränkt ist, entweder

bei  $v = 0$  oder bei  $v = \frac{1}{4}$  oder bei  $v = \frac{1 + 2(y^2 - p)}{6}$ .

Liegt es bei  $v = 0$ , so kommt

$$(1-x)P + xQ \leq y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2 \leq \frac{1}{16} + \frac{|\alpha|}{2} + |\alpha|^2,$$

und das ist wegen (1) und wegen  $\beta > 2|\alpha|$

$$\leq \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} < \beta^2.$$

Liegt das Maximum bei  $v = \frac{1}{4}$ , so kommt

$$\begin{aligned} (1-x)P + xQ &\leq \frac{1}{16} + \frac{y^2 - p}{2} + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2 \\ &\leq \frac{1}{16} + y^4 + \frac{y^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - 2y^2\right)|\alpha| + |\alpha|^2. \end{aligned}$$

Hier liegt das Maximum, da  $y^2$  auf das Intervall  $0 \leq y^2 \leq \frac{1}{4}$  beschränkt ist, bei  $y^2 = 0$  oder bei  $y^2 = \frac{1}{4}$  so daß sich ergibt:

$$\begin{aligned} (1-x)P + xQ &\leq \text{Max} \left[ \frac{1}{16} + \frac{|\alpha|}{2} + |\alpha|^2, \frac{1}{4} + |\alpha|^2 \right] \\ &\leq \text{Max} \left[ \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4}, \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{\beta^2}{4} \right] < \beta^2. \end{aligned}$$

Wenn schließlich das Maximum der obigen Funktion von  $v$  bei  $v = \frac{1 + 2(y^2 - p)}{6}$  liegt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} (1-x)P + xQ &\leq \frac{1}{12} (1 + 2y^2 - 2p)^2 + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2 \\ &= \frac{1}{12} + \frac{4}{3}y^4 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}p^2 + (4y^2 - 1)\frac{p}{3} + p^2 + q^2 \\ &\leq \frac{1}{12} + \frac{4}{3}y^4 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}|\alpha|^2 + (1 - 4y^2)\frac{|\alpha|}{3} + |\alpha|^2. \end{aligned}$$



Hier liegt das Maximum wieder bei  $y^2 = 0$  oder  $y^2 = \frac{1}{4}$ , und man erhält:

$$\begin{aligned}(1-x)P+xQ &\leq \text{Max} \left[ \frac{1}{12} + \frac{|\alpha|}{3} + \frac{4|\alpha|^2}{3}, \frac{1}{4} + \frac{4|\alpha|^2}{3} \right] \\ &\leq \text{Max} \left[ \frac{2\beta^2}{9} + \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{3}, \frac{2\beta^2}{3} + \frac{\beta^2}{3} \right] = \beta^2.\end{aligned}$$

Damit ist alles bewiesen.

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1947

Band/Volume: [1945](#)

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: [Ein Analogon zu einem Satz von Minkowski 159-165](#)