Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Ein Analogon zu einem Satz von Minkowski.

Von Oskar Perron in München.

Vorgelegt am 8. November 1946.

Von Minkowski stammt der folgende Satz, für den es heute zahlreiche Beweise gibt:[1]

Sind α, β, γ, δ, ρ, σ reelle Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so gibt es ganze, rationale Zahlen x, y derart, daß

$$|\alpha x + \beta y - \rho| \cdot |\gamma x + \delta y - \sigma| \leqq \frac{1}{4}.$$

Daß dabei die Schranke $\frac{1}{4}$ nicht verkleinert werden kann, lehrt das Beispiel $\left|x - \frac{1}{2}\right| \cdot \left|y - \frac{1}{2}\right|$.

Es ist zu vermuten, daß für jeden imaginären quadratischen Zahlkörper $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$, wo $D > 0$ quadratfrei, das folgende Analogon zu dem Minkowskischen Satz gilt:

Sind α, β, γ, δ, ρ, σ komplexe Zahlen mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$, so gibt es ganze Zahlen x, y des Körpers $\mathfrak{K}(i\sqrt{D})$ derart, daß

$$|\alpha x + \beta y - \rho| \cdot |\gamma x + \delta y - \sigma| \leqq \begin{cases} \dfrac{1+D}{4} & \text{für } D \not\equiv 3 \pmod 4 \\[2ex] \dfrac{(1+D)^2}{16D} & \text{für } D \equiv 3 \pmod 4. \end{cases}$$

Schon der Nachweis, daß es überhaupt eine von α, β, γ, δ, ρ, σ unabhängige Schranke gibt, dürfte nicht ganz leicht sein. Daß die Schranke nicht kleiner sein kann als angegeben, lehrt das Beispiel

---

[1] Math Annalen 54 S. 108. Auch Minkowski, Gesammelte Abhandlungen I S. 336. Die weitere Literatur findet man bei J. F. Koksma, Diophantische Approximationen = Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete IV 4, Berlin 1936, Kap. II § 3. Inzwischen kam ein neuer Beweis des Verfassers hinzu: Math. Annalen 115 (1938) S. 656.

$$\left| x - \frac{1 + i\sqrt{D}}{2} \right| \cdot \left| y - \frac{1 + i\sqrt{D}}{2} \right| \quad \text{für } D \not\equiv 3 \pmod 4$$

$$\left| x - \frac{1}{2} + i\,\frac{D-1}{4\sqrt{D}} \right| \cdot \left| y - \frac{1}{2} + i\,\frac{D-1}{4\sqrt{D}} \right| \quad \text{für } D \equiv 3 \pmod 4,$$

da keiner der beiden Faktoren kleiner als

$$\frac{\sqrt{1+D}}{2} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1+D}{4\sqrt{D}}$$

gemacht werden kann, wie sofort daraus zu ersehen ist, daß die Zahlen

$$1,\ i\sqrt{D} \quad \text{bzw.} \quad 1,\ \frac{1+i\sqrt{D}}{2}$$

eine Basis des Körpers bilden.

Für $D = 1, 2, 3$ ist es mir gelungen, die Vermutung zu beweisen. Der Beweis für $D = 1$ soll hier mitgeteilt werden.

Setzt man

$$\rho = \alpha\mu + \beta\nu, \quad \sigma = \gamma\mu + \delta\nu,$$

und multipliziert man die Faktoren aus, wobei

$$\alpha\gamma = a, \quad \alpha\delta + \beta\gamma = b, \quad \beta\delta = c$$

gesetzt werden mag, so nimmt der zu beweisende Satz die folgende Gestalt an:

Satz: S i n d a, b, c, μ, ν k o m p l e x e Z a h l e n m i t $b^2 - 4ac = 1$, s o g i b t e s g a n z e Z a h l e n x, y d e s K ö r p e r s $\mathfrak{K}(i)$ d e r a r t, d a ß

$$| a(x-\mu)^2 + b(x-\mu)(y-\nu) + c(y-\nu)^2 | \leq \frac{1}{2}.$$

Zu seinem Beweis machen wir eine Transformation

$$x \to px + qy, \qquad y \to rx + sy,$$
$$\mu \to p\mu + q\nu, \qquad \nu \to r\mu + s\nu,$$

wobei p, q, r, s ganze Zahlen aus $\mathfrak{K}(i)$ mit $ps - qr = 1$ sind. Die zu beweisende Ungleichung geht dann über in:

$$|A(x-\mu)^2 + B(x-\mu)(y-\nu) + C(y-\nu)^2| \leqq \frac{1}{2},$$

wobei

$$A = ap^2 + bpr + cr^2,$$
$$B = 2apq + b(ps+qr) + 2crs,$$
$$C = aq^2 + bqs + cs^2,$$

also

$$B^2 - 4AC = (b^2-4ac)(ps-qr)^2 = b^2 - 4ac = 1.$$

Nun kann man die ganzen Zahlen p, r aus $\mathfrak{K}(i)$ so wählen, daß $|A| \leqq \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist.[2] Für die Zwecke unseres Beweises genügt schon, daß man $|A| \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$ machen kann, was vielleicht einfacher beweisbar ist. Natürlich kann man p, r als teilerfremd wählen und dann q, s so bestimmen, daß $ps - qr = 1$ ist.[3] Hiernach ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn wir beim Beweis des Satzes von vornherein $|a| \leqq \sqrt{\frac{2}{3}}$ voraussetzen.

Ist nun $a = 0$, so ist $b = \pm 1$, und die zu beweisende Ungleichung lautet

$$|y-\nu| \cdot |x - \mu \pm c(y-\nu)| \leqq \frac{1}{2}.$$

Sie läßt sich ohne weiteres durch ganze Zahlen x, y aus $\mathfrak{K}(i)$ erfüllen, indem man der Reihe nach

$$|y-\nu| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |x-\mu \pm c(y-\nu)| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

macht. Sei also jetzt $a \neq 0$. Die zu beweisende Ungleichung läßt sich dann so schreiben:

$$\left| \left[x - \mu + \frac{b}{2a}(y-\nu)\right]^2 - \frac{(y-\nu)^2}{4a^2} \right| \leqq \frac{1}{2|a|}.$$

[2] Das ist bewiesen in meiner Arbeit: Eine Abschätzung für die untere Grenze der absoluten Beträge der durch eine reelle oder imaginäre binäre quadratische Form darstellbaren Zahlen. Math. Ztschr. 35 (1932) S. 563–78.

[3] In $\mathfrak{K}(i)$ gelten ja die gewöhnlichen Teilbarkeitsgesetze, alle Ideale sind Hauptideale.

Nun wählen wir die ganze Zahl y so, daß $|y - \nu| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, und setzen

$$\frac{(y-\nu)^2}{4a^2} = \alpha, \quad \frac{1}{2|a|} = \beta, \quad \mu - \frac{b}{2a}(y-\nu) = -\gamma.$$

Wegen $|y - \nu| \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\quad |a| \leqq \sqrt{\tfrac{2}{3}}$ ist dann

$$\beta^2 \geqq 2|\alpha|, \quad \beta^2 \geqq \frac{3}{8}, \tag{1}$$

und es muß noch gezeigt werden, daß sich die ganze Zahl x aus $\mathfrak{K}(i)$ so wählen läßt, daß

$$|(x+\gamma)^2 - \alpha| \leqq \beta$$

ist. Nun bedeutet die Ungleichung

$$|z^2 - \alpha| \leqq \beta$$

in der komplexen z-Ebene eine Cassinische Kurve mit den Brennpunkten $\pm\sqrt{\alpha}$ und ihr Inneres. Es ist also nur noch zu zeigen, daß auf oder innerhalb der Cassinischen Kurve zu jedem Punkt γ ein homologer Punkt liegt, d. h. einer der Gestalt $\gamma + x = \gamma + \xi + i\eta$, wo ξ, η ganze rationale Zahlen sind.

Wir unterscheiden zwei Fälle.

Erster Fall: $\beta \leqq 2|\alpha|$, also $\beta^2 \leqq 4\alpha\bar{\alpha}$, wo $\bar{\alpha}$ die zu α konjugiert-komplexe Zahl bedeutet. In diesem Fall liegt die Kreisperipherie

$$\left| z - \frac{\sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}} \right| = \frac{\beta}{2\sqrt{|\alpha|}}$$

mit dem Radius $\frac{\beta}{2\sqrt{|\alpha|}} \geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ (wegen (1)), also auch ihr Inneres, ganz in der Cassinischen Kurve. In der Tat, für die Punkte der Kreisperipherie ist

$$z = \frac{\sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2}}{2\sqrt{\bar{\alpha}}} + \frac{\beta}{2\sqrt{\bar{\alpha}}}\, e^{i\varphi},$$

woraus folgt

$$(z^2 - \alpha)\, e^{-i\varphi} = \frac{\beta}{2\,\bar{\alpha}} \sqrt{4\alpha\bar{\alpha} - \beta^2} + \frac{\beta^2}{2\,\bar{\alpha}}\, i \sin\varphi,$$

also

$$|z^2 - \alpha|^2 = \frac{\beta^2}{4\,|\alpha|^2}\,(4\,\alpha\bar{\alpha} - \beta^2 + \beta^2 \sin^2\varphi) \leqq \frac{\beta^2}{4\,|\alpha|^2} \cdot 4\,\alpha\,\bar{\alpha} = \beta^2,$$

w. z. b. w.

Da der Kreisradius $\geqq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, so liegt in der Cassinischen Kurve auch ein achsenparalleles Quadrat mit der Seitenlänge 1, und ein solches enthält zu jedem Punkt einen homologen.

Zweiter Fall: $\beta > 2\,|\alpha|$. Wir setzen

$$\alpha = p + iq, \quad z = x + iy,$$

wo p, q, x, y reell. Dann wird die Sache bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß für

$$-\frac{1}{2} < y \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq x < 1$$

von den beiden Zahlen

$$P = |z^2 - \alpha|^2 = (x^2 - y^2 - p)^2 + (2\,xy - q)^2,$$
$$Q = |(z-1)^2 - \alpha|^2 = [(x-1)^2 - y^2 - p]^2 + [2\,(x-1)y - q]^2$$

wenigstens eine $\leqq \beta^2$ ist. Das wiederum wird bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß

$$(1 - x)\,P + xQ \leqq \beta^2$$

ist (man beachte $0 \leqq x < 1$). Nun ist

$$P = x^4 + 2x^2(y^2 - p) - 4qxy + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2,$$
$$Q = (1-x)^4 + 2\,(1-x)^2\,(y^2 - p) + 4\,q\,(1-x)\,y + y^4 + 2\,py^2 + p^2 + q^2,$$

also, wenn $x\,(1 - x) = v$ gesetzt wird,

$$(1 - x)\,P + xQ = v - 3v^2 + 2v\,(y^2 - p) + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2.$$

Das Maximum dieser Funktion von v liegt, da $v = x\,(1 - x)$ auf das Intervall $0 \leqq v \leqq \frac{1}{4}$ beschränkt ist, entweder bei $v = 0$ oder bei $v = \frac{1}{4}$ oder bei $v = \frac{1 + 2(y^2 - p)}{6}$.

Liegt es bei $v = 0$, so kommt

$$(1 - x) P + x Q \leqq y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2 \leqq \frac{1}{16} + \frac{|\alpha|}{2} + |\alpha|^2,$$

und das ist wegen (1) und wegen $\beta > 2|\alpha|$

$$\leqq \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4} < \beta^2.$$

Liegt das Maximum bei $v = \frac{1}{4}$, so kommt

$$(1 - x) P + x Q \leqq \frac{1}{16} + \frac{y^2 - p}{2} + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2$$

$$\leqq \frac{1}{16} + y^4 + \frac{y^2}{2} + \left(\frac{1}{2} - 2y^2\right) |\alpha| + |\alpha|^2.$$

Hier liegt das Maximum, da y^2 auf das Intervall $0 \leqq y^2 \leqq \frac{1}{4}$ beschränkt ist, bei $y^2 = 0$ oder bei $y^2 = \frac{1}{4}$ so daß sich ergibt:

$$(1 - x) P + x Q \leqq \mathrm{Max}\left[\frac{1}{16} + \frac{|\alpha|}{2} + |\alpha|^2,\ \frac{1}{4} + |\alpha|^2\right]$$

$$\leqq \mathrm{Max}\left[\frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{4} + \frac{\beta^2}{4},\ \frac{2}{3}\beta^2 + \frac{\beta^2}{4}\right] < \beta^2.$$

Wenn schließlich das Maximum der obigen Funktion von v bei $v = \frac{1 + 2(y^2 - p)}{6}$ liegt, ergibt sich:

$$(1 - x) P + x Q \leqq \frac{1}{12}(1 + 2y^2 - 2p)^2 + y^4 + 2py^2 + p^2 + q^2$$

$$= \frac{1}{12} + \frac{4}{3}y^4 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}p^2 + (4y^2 - 1)\frac{p}{3} + p^2 + q^2$$

$$\leqq \frac{1}{12} + \frac{4}{3}y^4 + \frac{1}{3}y^2 + \frac{1}{3}|\alpha|^2 + (1 - 4y^2)\frac{|\alpha|}{3} + |\alpha|^2.$$

Hier liegt das Maximum wieder bei $y^2 = 0$ oder $y^2 = \frac{1}{4}$, und man erhält:

$$(1-x)\,P + x\,Q \leqq \operatorname{Max}\left[\frac{1}{12} + \frac{|\alpha|}{3} + \frac{4\,|\alpha|^2}{3},\ \frac{1}{4} + \frac{4\,|\alpha|^2}{3}\right]$$

$$\leqq \operatorname{Max}\left[\frac{2\,\beta^2}{9} + \frac{\beta^2}{6} + \frac{\beta^2}{3},\ \frac{2\,\beta^2}{3} + \frac{\beta^2}{3}\right] = \beta^2.$$

Damit ist alles bewiesen.