Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Über die Funktionalgleichungen der trigonometrischen und hyperbolischen Funktionen.

Von Eberhard Hopf in München.

Vorgelegt von Herrn H. Tietze am 6. Dezember 1946.

Herrn Georg Faber zum 70. Geburtstag am 5. April 1947 gewidmet.

Die Funktionalgleichungen werden ausschließlich für reelle Werte der unabhängigen Variablen betrachtet. Unter Lösung sei stets eine für sämtliche Werte der Argumente definierte Lösung verstanden. Herr Hamel hat von den reellwertigen Lösungen von

$$f(x+x') = f(x) + f(x') \tag{1}$$

in einer bekannten Arbeit[1] folgende Alternative bewiesen:

Satz 1. Entweder ist $f(x) = \text{const.}\, x$ für alle x, oder die Kurve $y = f(x)$ erfüllt die x-y-Ebene überall dicht. Anders ausgedrückt: Gibt es irgendein Gebiet der x-y-Ebene, welches keinen Punkt der Lösungskurve $y = f(x)$ enthält, so ist notwendig $f(x) = c\,x$ für alle x. Für diese Kennzeichnung der stetigen Lösungen der Funktionalgleichungen durch ein Minimum an Bedingungen gibt es Beweise, die in ihrer Kürze uns in der Literatur nicht begegnet sind.

Beweis von Satz 1. Bekanntlich gilt von jeder Lösung $f(nx) = n f(x)$, $f(x/m) = f(x)/m$ für ganze n, m, also

[1] G. Hamel, Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Annalen 60 (1905), pp. 459–462. Nach Drucklegung unserer Note erfuhr ich von Herrn Hamel, daß sein Beweis von 1905 die Basisexistenz nicht voraussetzt und mit unserem identisch ist. Infolge der Zerstörung unserer Zeitschriften in München konnte ich meinen Irrtum vorher nicht berichtigen. L. Vietoris, Zur Kennzeichnung des Sinus und verwandter Funktionen durch Funktionalgleichungen. Crelles Journal 186 (1944), pp. 1–15. Von dieser Arbeit ist mir nur die Besprechung in den Mathematical Reviews bekannt. Aus ihr ist aber nicht ersichtlich, wie weit unsere Sätze und Beweise in der Arbeit schon vorkommen.

$$f(rx) = rf(x), \quad r \text{ rational}. \tag{2}$$

Die Determinante

$$\begin{vmatrix} f(x) & x \\ f(x') & x' \end{vmatrix} \tag{3}$$

ist entweder identisch Null in x, x' oder nicht. Im ersten Falle findet man, indem man etwa $x' = 1$ setzt, $f(x) = cx$ für alle x. Im zweiten Falle wähle man zwei feste x, x' mit (3) $\neq 0$. Dann sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} s \cdot x + s' \cdot x' &= x_0 \\ s \cdot f(x) + s \cdot f(x') &= y_0 \end{aligned}$$

für beliebige x_0, y_0 nach s, s' auflösbar. Sie können daher angenähert durch rationale Werte $s = r$, $s' = r'$ mit beliebiger Genauigkeit erfüllt werden. Bezeichnet man für diese Werte die linken Seiten mit x^* bzw. y^*, so ist nach (1) und (2) $y^* = f(x^*)$. Die Kurvenpunkte kommen also jedem Punkte x_0, y_0 beliebig nahe.

Nächstes Thema ist die Funktionalgleichung

$$g(x + x') \equiv g(x) + g(x') \pmod 1, \tag{4}$$

wo die Funktionswerte nur mod 1 bestimmt sind.

Satz 2. Von den Lösungen von (4) gilt: Entweder ist $g(x) \equiv \text{const}\, x \pmod 1$ für alle x, oder die Kurve $y = g(x)$ liegt auf dem x-y-Zylinder (y mod 1 genommen) überall dicht.

Beweis. Die bei (1) angewandte Schlußweise muß modifiziert werden, hauptsächlich deshalb, weil (2) zwar für ganze r, aber nicht mehr für beliebige rationale r richtig ist.

Der Funktionswert g werde stets so bestimmt, daß

$$-\frac{1}{2} \leqq g < \frac{1}{2} \tag{5}$$

erfüllt ist. Wir benötigen folgenden Hilfssatz: Zu beliebigem x und beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es beliebig große natürliche N mit

$$\left| g\left(\frac{x}{N}\right) \right| < \varepsilon. \tag{6}$$

Zum Beweise wähle man ein festes natürliches $k > \frac{1}{\varepsilon}$. Unter den $k+1$ in das Intervall (5) fallenden Zahlen

$$g\left(\frac{\nu}{k!\,n}x\right);\quad \nu = 0, 1, \ldots, k,$$

gibt es nach dem Schubfächerprinzip zwei, die sich absolut um weniger als $\frac{1}{k} < \varepsilon$ unterscheiden, etwa für $\nu = a, b$ $(a < b)$. Wegen (4) ist

$$g\left(\frac{b-a}{k!\,n}x\right) \equiv g\left(\frac{b}{k!\,n}x\right) - g\left(\frac{a}{k!\,n}x\right) \pmod 1,$$

wegen (5) gilt also (6), wenn $N = \frac{n \cdot k!}{(b-a)}$ gesetzt wird; N ist ganz und, da n beliebig ist, beliebig großer Werte fähig. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Nun betrachte man wieder die Determinante

$$\begin{vmatrix} g(u) & u \\ g(u') & u' \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Erster Fall: Es gibt ein festes $\varepsilon > 0$, derart, daß (7) immer dann Null ist, wenn

$$|u| < \varepsilon,\ |g(u)| < \varepsilon,\ |u'| < \varepsilon,\ |g(u')| < \varepsilon \tag{8}$$

erfüllt ist; nach dem Hilfssatz kann (8) durch von Null verschiedene u' befriedigt werden. Dann gilt $g(u) = cu$ für alle (8) erfüllenden Werte von u. Dies gilt sodann für beliebige Argumente x als Kongruenz (mod 1), denn nach dem Hilfssatz kann man ein natürliches N wählen, so daß $u = \frac{x}{N}$ (8) erfüllt, und es folgt

$$g(x) \equiv Ng(x/N) = Ncx/N = x \pmod 1.$$

Zweiter Fall: Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es Werte u, u', für welche (8) erfüllt und (7) $\neq 0$ ist. Für solche Zahlen ε, u, u' sind die Gleichungen

$$\begin{aligned} s \cdot u + s' \cdot u' &= x_0 \\ s \cdot g(u) + s' \cdot g(u') &= y_0 \end{aligned} \tag{9}$$

bei beliebigen x_0, y_0 nach s, s' auflösbar. Wegen (8) sind sie also angenähert durch ganzzahlige Werte n, n',

$$|n - s| \leqq \frac{1}{2}, \quad |n' - s'| \leqq \frac{1}{2},$$

mit einem Fehler $< 2\varepsilon$ lösbar. Bezeichnet man für diese Werte die linken Seiten von (9) mit x^* bzw. y^*, so gilt nach der Funktionalgleichung $y^* \equiv g(x^*) \pmod 1$. Da ε beliebig war, trifft also der zweite Teil der behaupteten Alternative zu.

Drittens wird die Funktionalgleichung

$$F(x+x') = F(x)\,F(x') \tag{10}$$

für komplexwertiges F betrachtet. Sie ist, $F = C + iS$ gesetzt, mit den reellen Gleichungen

$$C(x+x') = C(x)\,C(x') - S(x)\,S(x'),$$
$$S(x+x') = S(x)\,C(x') + C(x)\,S(x')$$

gleichbedeutend. Eine Lösung von (10) ist entweder identisch Null oder nirgends Null. Eine reellwertige Lösung, die $\not\equiv 0$ ist, ist überall positiv. Dies folgt in bekannter Weise aus $F(x) = F(0)\,F(x)$, $F(0) = F(x)\,F(-x)$, $F(x) = F^2(x/2)$. Die Nulllösung wird im folgenden ausgeschlossen.

Für die reellwertigen Lösungen bzw. die Lösungen vom Absolutbetrag Eins gilt die umkehrbar eindeutige Beziehung

$$F(x) = e^{f(x)} \text{ bzw. } F(x) = e^{2\pi i g(x)}$$

zu den Lösungen von (1) bzw. (4). Allgemein gilt

Satz 3. Für die Lösungen von (10) bestehen nur folgende drei Möglichkeiten. Entweder ist $F(x) = e^{Ax}$, A komplex, für alle x. Oder die Punkte der Kurve $w = F(x)$ liegen, wenn $w = re^{i\varphi}$ gesetzt wird, auf einer Fläche $a \ln r + b\varphi + cx = 0$ (a, b nicht beide Null) des x-w-Raumes und erfüllen diese überall dicht. Oder aber die Kurvenpunkte erfüllen den ganzen x-w-Raum überall dicht.

Beweis. Setzt man

$$F(x) = e^{f(x) + 2\pi i g(x)},$$

so erfüllen $\ln r = f(x)$ bzw. $\varphi/2\pi = g(x)$ die Gleichungen (1) bzw. (4). g wird wieder auf das Intervall (5) beschränkt. Erster Fall. Es gibt ein $\varepsilon > 0$ derart, daß für

$$\begin{matrix} |u|, |f(u)|, |g(u)| \\ |u'|, |f(u')|, |g(u')| \end{matrix} \quad \text{alle} < \varepsilon \tag{11}$$

beide Determinanten

$$\begin{vmatrix} f(u) & u \\ f(u') & u' \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} g(u) & u \\ g(u') & u' \end{vmatrix} \tag{12}$$

stets Null sind. Dann schließt man genau wie im ersten Fall des Beweises von Satz 2, daß für alle x

$$f(x) = ax,\ g(x) \equiv bx \pmod 1$$

sein muß, d. h. daß der erste der behaupteten Fälle eintritt. Zweiter Fall. Es gibt ein $\varepsilon = \varepsilon_0$ derart, daß

$$\begin{vmatrix} f(u) & g(u) & u \\ f(u') & g(u') & u' \\ f(u'') & g(u'') & u'' \end{vmatrix} \tag{13}$$

stets Null ist, sobald die Ungleichungen (11) mit $\varepsilon = \varepsilon_0$ für u, u' und für u'' erfüllt sind. Jedoch soll es zu beliebigem $\varepsilon > 0$ (und $\leqq \varepsilon_0$) Werte u, u' geben, die (11) erfüllen, und für die mindestens eine der beiden Determinanten (12) $\neq 0$ ist. Man kann in diesem Falle annehmen, daß es immer eine bestimmte von ihnen, etwa die zweite ist, die $\neq 0$ ist. Setzt man in (13) für u', u'' solche Werte ein, so ergibt sich eine Relation

$$a f(u) + 2\pi b g(u) + cu = 0 \quad (a \neq 0)$$

für alle u, welche (11), $\varepsilon = \varepsilon_0$, erfüllen. Von hier aus schließt man wieder ebenso wie bei Satz 2 unter Zuhilfenahme des Hilfssatzes (durch Zwischenschalten eines $u = \frac{x}{N}$): Die Kurve $w = F(x)$ liegt ganz (nicht nur für kleine $|x|$) in der Fläche $a \ln r + b\varphi + cx = 0$. Wegen $a \neq 0$ sind x, φ Parameter auf derselben. Daß die Kurve $w = F(x)$ auf ihr überall dicht liegt, bedeutet, daß die Kurve $\varphi = 2\pi g(x)$ jedem Punkte x_0, $\varphi_0 \pmod 1$ beliebig nahe kommt. Letzteres folgt ebenso wie im zweiten Fall des Beweises von Satz 2 durch Betrachtung der Gleichungen

$$s \cdot u + s' \cdot u' = x_0$$
$$s \cdot g(u) + s' \cdot g(u') = \varphi_0/2\pi,$$

wenn u, u' so gewählt werden, daß (11) erfüllt ist und die Determinante $\neq 0$ ist. Dritter Fall. Zu beliebigem $\varepsilon > 0$ gibt es Werte u, u', u'', welche (11) befriedigen und für welche (13) $\neq 0$ ist. In diesem Falle betrachtet man das entsprechende dreifache Gleichungssystem und schließt ähnlich wie vorher auf den dritten der drei behaupteten Fälle. Damit ist Satz 3 bewiesen.

Zum Schluß betrachten wir die Funktionalgleichung des trigonometrischen und hyperbolischen Cosinus,

$$C(x+x') + C(x-x') = 2\,C(x)\,C(x'),\ C \text{ reell.} \tag{14}$$

Aus $C(x) = C(0)\,C(x)$ folgt: Eine Lösung ist entweder $\equiv 0$, oder es ist

$$C(0) = 1.$$

Den ersten Fall schließen wir aus. Aus (14) folgt ferner

$$C(-u) = C(u). \tag{15}$$

Bekanntlich läßt sich (14) auf (10) zurückführen, wobei entweder F reell oder $|F| \equiv 1$ ist. Man definiere etwa

$$D(x, x') = C(x+x') - C(x-x'). \tag{16}$$

Dann ist

$$D(x, x') = D(x', x) \tag{17}$$

und

$$D(-x, x') = -D(x, x'). \tag{18}$$

Ersetzt man in (14) x durch $x+y$ bzw. $x-y$ und subtrahiert man die zweite von der ersten Gleichung, so folgt

$$D(x+x', y) + D(x-x', y) = 2\,D(x, y)\,C(x'). \tag{19}$$

Vertauscht man hier x, x', so folgt durch Addition

$$D(x+x', y) = D(x, y)\,C(x') + D(x', y)\,C(x). \tag{20}$$

Ersetzt man in (19) x' durch $x'+y'$ bzw. $x'-y'$, so ergibt sich durch Subtrahieren

$$D(x+x'+y',y)+D(x-x'-y',y)-D(x+x'-y',y)-$$
$$-D(x-x'+y',y)=2\,D(x,y)\,D(x',y').$$

Da wegen (18) die linke Seite in x, y' symmetrisch ist, muß es auch die rechte sein. Durch Vertauschung der beiden Faktoren folgt die Symmetrie in y, x'. Speziell ist

$$D(x,x')\,D(a,a)=D(x,a)\,D(x',a). \tag{21}$$

Ist nun $C(x)$ nicht konstant, so gibt es wegen $D(a,a)=C(2a)-C(0)$ ein a mit $D(a,a)\neq 0$. Setzt man $D(x,a)=D(x)$ und $2\,\sigma^2=\dfrac{1}{D(a)}$, so folgt aus (14) und (16) mit (21)

$$C(x+x')=C(x)\,C(x')+\sigma^2\,D(x)\,D(x'),$$

während (20) jetzt

$$D(x+x')=D(x)\,C(x')+C(x)\,D(x')$$

lautet. Setzt man schließlich $F(x)=C(x)+\sigma\,D(x)$, so geben beide Gleichungen

$$F(x+x')=F(x)\,F(x'). \tag{22}$$

Wegen (15) und (18) ist

$$C(x)=\frac{F(x)+F(-x)}{2};\quad F(-x)\,F(x)=F(0)=1. \tag{23}$$

Für reelles σ ist F reell. Für imaginäres σ ist $\overline{F(x)}=C(x)-\sigma\,D(x)=C(-x)+\sigma\,D(-x)=F(-x)$, also $F(x)\,\overline{F(x)}=F(0)=1$, und $C(x)=\Re\,(F(x))$. Hieraus und aus dem Vorangehenden ergibt sich

Satz 4. Ist die Lösung $C(x)$ von (14) nicht $\equiv 0$, so liegt die Kurve $y=C(x)$ entweder in der x-y-Halbebene $y\geqq 1$ oder im x-y-Streifen $|y|\leqq 1$. Dabei ist entweder $C(x)=\operatorname{Cos} cx$ oder $C(x)=\cos cx$, oder aber die Kurve erfüllt einen der beiden genannten Bereiche überall dicht.

Ebensogut läßt sich mit Hilfe von Satz 3 natürlich auch eine Aussage über die komplexwertigen Lösungen von (14) machen, denn (22) und (23) gelten auch für diese.