Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

I. Das Vektorpolynom $\lambda^2 \mathfrak{j}_1 - \lambda \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2$.

Von **Frank Löbell in München.**

Vorgelegt von Herrn G. Faber am 6. Dezember 1946.

Jede reelle, reguläre Abbildung einer reellen Fläche $\mathfrak{x}$ auf eine andere $\mathfrak{y}$ im euklidischen Raum bestimmt, wie man weiß, in den Berührebenen ε, ε' jedes Paares entsprechender Punkte $P \to P'$ eindeutig eine Affinität, von der man sagen kann, daß sie die Flächenabbildung an dieser Stelle „berührt".

1. Zu den Fragen, die sich in diesem Zusammenhang aufdrängen, gehört die nach der Natur der Mannigfaltigkeit der Verbindungsvektoren je zweier zusammengehöriger Punkte eines Paares entsprechender Berührebenen ε und ε', zunächst unter der Voraussetzung, daß diese Ebenen so weit parallel verschoben sind, daß die Berührpunkte P und P' in den Bezugspunkt O fallen.

Die Flächen seien auf gemeinsame Parameter u, v bezogen: $\mathfrak{x}(u, v) \to \mathfrak{y}(u, v)$; dann wird dem Vektor $d\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_u du + \mathfrak{x}_v dv$ in ε der Vektor $d\mathfrak{y} = \mathfrak{y}_u du + \mathfrak{y}_v dv$ in ε' zugewiesen sein. Die Aufgabe, die wir uns gestellt haben, läuft also auf die Untersuchung der Vektoren

$$d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x} = (\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u)\, du + (\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v)\, dv \tag{1}$$

hinaus. Wir sehen, daß sie im allgemeinen alle einer Ebene σ parallel sind, im besonderen einer Geraden parallel sein können; sie können auch alle verschwinden, und zwar tun sie das dann und nur dann, wenn die Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ die Identität ist. Die Stellung der Ebene σ ist, sofern sie überhaupt eindeutig definiert ist, durch den zu ihr senkrechten Vektor

$$\mathfrak{l} = (\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u) \times (\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v)$$

gegeben. Dieser läßt sich mit Hilfe der schon bei früherer Gelegenheit[1] eingeführten vektoriellen Differentialinvarianten ge-

[1] Sitz.Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., Jahrg. 1943 S. 218.

genüber der Gruppe der gemeinsamen Parametertransformationen des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v$$

ausdrücken; es wird nämlich

$$\mathfrak{l} = \mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2. \tag{2}$$

Nur wenn alle Vektoren $dy - dx$ einer und derselben Geraden parallel sind, kann die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ eine Parallelprojektion sein; und zwar ist sie es dann auch immer, wenn die Vektoren $d\mathfrak{y} - d\mathfrak{x}$ nicht sämtlich verschwinden. Die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist also, daß $\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u$ parallel zu $\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v$ oder $\mathfrak{l} = 0$ ist, ohne daß ε und ε' parallel sind, oder:

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2 \text{ und } \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0; \tag{3}$$

notwendig ist in diesem Fall $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} = 0$.

Will man die Identität zu den Parallelprojektionen rechnen, was erlaubt ist, so erhält man als eine notwendige Bedingung für ihr Vorliegen: $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$. Die charakteristischen Bedingungen für die Identität sind aber – sofern man sie bloß durch Invarianten ausdrücken will – nur unter Zuhilfenahme der ebenfalls früher[2] schon eingeführten skalaren Differentialinvariante

$$j = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}^u$$

zu formulieren; sie sind:[3]

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2, \quad \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_2, \quad j = 0. \tag{4}$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen sind nämlich schon bei den flächentreuen Scherungen erfüllt.

2. Diese Betrachtung wollen wir nun dadurch verallgemeinern, daß wir die einer reinen Streckung von O aus mit dem reellen Dehnungsfaktor $\lambda \neq 0$ unterworfene Ebene ε in Beziehung zur Ebene ε' setzen; wir wollen also die Abbildung $\lambda\varepsilon \to \varepsilon'$ untersuchen, durch die dem Vektor λdx der Vektor dy zugeord-

[2] A. a. O. S. 219.

[3] Dies folgt unmittelbar aus den Formeln (15a, b, c) a. a. O. S. 226 f.

net wird. Wir betrachten demgemäß jetzt die Mannigfaltigkeit der Vektoren

$$d\mathfrak{y} - \lambda d\mathfrak{x} = (\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u)\, du + (\mathfrak{y}_v - \lambda \mathfrak{x}_v)\, dv \tag{5}$$

für alle möglichen konstanten Werte des Skalars λ an einer Stelle (u, v).

Auch diese sind im allgemeinen einer Ebene parallel; sie bilden eine auf $(\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u) \times (\mathfrak{y}_v - \lambda \mathfrak{x}_v)$ oder

$$\mathfrak{l}(\lambda) = \lambda^2 \mathfrak{j}_1 - \lambda\, \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2 \tag{6}$$

senkrechte, ebene Vektorenschar, falls[4] sie nicht alle untereinander parallel sind, wofür notwendig und hinreichend ist, daß gilt

$$\lambda^2 \mathfrak{j}_1 - \lambda\, \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2 = 0.$$

Wegen $\mathfrak{j}_2 \neq 0$ ist dann $\lambda \neq 0$.

Diese Ergebnisse hätten wir auch aus den weiter oben gefundenen herleiten können; wir brauchen nur zu bedenken, daß zu der Abbildung $\lambda \mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ die Differentialinvarianten

$$\mathfrak{j}_1' = \lambda^2 \mathfrak{j}_1, \quad \mathfrak{j}' = \lambda\, \mathfrak{j}, \quad \mathfrak{j}_2' = \mathfrak{j}_2, \quad j' = \lambda\, j$$

gehören. Wir dürfen also wegen (3) und (4) genauer sagen:

Dafür, daß aus der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ durch eine auf die Ebene ε ausgeübte Streckung von O aus im Maßstab λ eine Parallelprojektion $\lambda \varepsilon \to \varepsilon'$ wird, ist notwendig und hinreichend, daß

$$\text{entweder } \mathfrak{l}(\lambda) = 0, \quad \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0 \tag{7a}$$

$$\text{oder } \mathfrak{l}(\lambda) = 0, \quad \lambda^2 \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_2, \quad j = 0 \tag{7b}$$

ist. Im zweiten Fall ist die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ eine reine Streckung; da dann die Vektoren $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j}$ alle untereinander parallel sind und $\lambda \mathfrak{j} = 2 \mathfrak{j}_2$ oder $\mathfrak{j} = 2\lambda \mathfrak{j}_1$ ist, kann man die charakteristischen Bedingungen dafür durch Elimination von $\lambda \neq 0$ auf die Form bringen:[5]

---

[4] Hier und im folgenden werde das Wörtchen „falls" in dem Sinne gebraucht: „dann und nur dann, wenn".

[5] A. a. O. S. 227, (15^c) und (17). Die Bedingung $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ ist hier sogar durch die weitere ersetzbar: $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} = 0$; weil dann $\mathfrak{j} = \lambda \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2 : \lambda$ ist, folgt nämlich aus $(\lambda \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2 : \lambda)^2 = 4\, \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \quad (\lambda \mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j}_2 : \lambda)^2 = 0$, also wegen der vorausgesetzten Realität von $\mathfrak{j}_1, \mathfrak{j}_2, \mathfrak{j} \quad \lambda \mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j}_2 : \lambda = 0$, mithin $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$.

$$\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0, \quad \mathfrak{j}^2 - 4\,\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2 = 0, \quad j = 0.$$

Rückwärts führen nämlich diese Gleichungen wieder zu (7b): Wegen des Verschwindens von $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$ sind $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ parallel und wegen $4\,\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2 = \mathfrak{j}^2$ gleichgerichtet, folglich ist $\mathfrak{j}_2 = \lambda^2 \mathfrak{j}_1$ mit $\lambda^2 > 0$; hieraus fließt $\mathfrak{j}^2 = 4\,\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2 + (\lambda \mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j}_2 : \lambda)^2 = (\lambda \mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2 : \lambda)^2$ oder $\mathfrak{l}(\lambda)\,\mathfrak{l}(-\lambda) = 0$, mithin bei passender Benennung von λ $\mathfrak{l}(\lambda) = 0$, da $\mathfrak{l}(\lambda)$ und $\mathfrak{l}(-\lambda)$ parallele Vektoren sind, weil aus $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$, wie leicht zu sehen,[6] auch $\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_2 = 0$ folgt.

3. Wenn die Abbildung $\lambda\varepsilon \to \varepsilon'$ eine Parallelprojektion ist, so ist die Projektionsrichtung, sofern $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$, eindeutig festgelegt; da aber die Abbildung in diesem Fall durch die Invarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ und j bestimmt ist,[7] so muß sich ein in die Projektionsrichtung weisender Vektor durch sie ausdrücken lassen. In einer früheren Arbeit wurde gezeigt,[7] daß unter der hier wegen (7a) gültigen Voraussetzung $\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} = 0$ dem Vektor $d\mathfrak{x} = -j \cdot \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 - \lambda\,\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1$ der Vektor $d\mathfrak{y} = \mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$ entspricht; die P r o j e k t i o n s r i c h t u n g wird aber gegeben durch $d\mathfrak{y} - \lambda d\mathfrak{x}$ oder auch $d\mathfrak{y} : \lambda - d\mathfrak{x}$, also durch

$$j \cdot \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 + \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1 \cdot \lambda + \mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 : \lambda. \tag{8}$$

Dieser Vektor kann nicht verschwinden, da $\lambda \neq 0$ ist und $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$ und $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ linear unabhängig sind.

Wendet man den Ausdruck im Falle $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ an, so macht man keinen Fehler: er liefert dann den Nullvektor.

4. Die von O aus abgetragenen Vektoren $\mathfrak{l}(\lambda)$ liegen auf einem Kegel 2. O., $\mathfrak{K}$; die Endpunkte der Vektoren $\mathfrak{l}(\lambda) : \lambda = \lambda \mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2 : \lambda$ erfüllen allgemein eine Hyperbel, die den Mittelpunkt $-\mathfrak{j}$ hat, deren Asymptoten zu $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ parallel sind und die durch die Angabe vollends bestimmt ist, daß sie durch den Punkt $\mathfrak{j}_1 + \mathfrak{j}_2 - \mathfrak{j}$ geht.

a) Der Kegel $\mathfrak{K}$ mit der Spitze O, der diese Kurve als Leitlinie hat, ist nicht ausgeartet, wenn $\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} \neq 0$ ist.

Er kann aber entarten, und zwar

---

[6] Vgl. a. a. O. S. 225 unten.

[7] A. a. O. S. 224 f. Vgl. Math. Zeitschr. 49 (1943), S. 430, Fußnote 4.

b) entweder in eine Ebene, falls nämlich $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ komplanar sind, ohne daß ε parallel zu ε' ist – $\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} = 0$, $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ –,

c) oder in eine Gerade, falls ε und ε' parallel sind – $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$–, da in diesem Fall ja auch $\mathfrak{j}$ zu $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ parallel ist.[6]

Ad a): Falls

$$\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} \neq 0$$

ist, besitzt das vektorielle Polynom $\mathfrak{l}(\lambda) = \lambda^2\mathfrak{j}_1 - \lambda\,\mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2$ keine Nullstelle (weder eine reelle noch eine imaginäre); in der Tat würde die Existenz einer solchen ja bedeuten, daß die Vektoren $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ linear abhängig wären.

Ad b): Falls

$$\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} = 0 \text{ und } \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$$

ist, besitzt $\mathfrak{l}(\lambda)$ genau eine Nullstelle, nämlich, wie ebenfalls bei früherer Gelegenheit gezeigt wurde,[8] den reellen, nicht verschwindenden Skalar[9]

$$\lambda = \mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}, \tag{9}$$

mit dessen Hilfe sich $\mathfrak{j}$ folgendermaßen linear durch $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ ausdrücken läßt:

$$\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1\lambda + \mathfrak{j}_2 : \lambda.$$

Die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ setzt sich in diesem Fall aus einer Parallelprojektion und einer Streckung im Maßstab λ zusammen.

Während es offensichtlich ist, daß das Verschwinden von $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2\mathfrak{j}$ notwendig für die Möglichkeit des Nullwerdens von $\mathfrak{l}(\lambda)$ ist, folgt erst aus der Theorie der Differentialinvarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$, daß diese Bedingung dafür auch hinreicht.

Die Hyperbel geht in diesem Falle durch *O*.

Ad c): Falls

$$\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0,$$

ist, weil dann auch $\mathfrak{j}$ parallel zu $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ ist,[6] die Gleichung

---

[8] A. a. O. S. 223.

[9] Die folgenden Quotienten sind sinnvoll, weil $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}$, $\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_2$ wegen $\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2\,\mathfrak{j} = 0$ untereinander parallele Vektoren sind, von denen wegen $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ keiner verschwindet; vgl. a. a. O. S. 223, Gl. (10), aus der λ durch vektorielle Multiplikation mit $\mathfrak{j}_2$ oder mit $\mathfrak{j}_1$ zu gewinnen ist.

$\mathfrak{l}(\lambda) = 0$ eine quadratische Gleichung für λ im gewöhnlichen Sinn, die wegen $\mathfrak{j}_1 \neq 0$ und $\mathfrak{j}_2 \neq 0$ nur endliche, nicht verschwindende Lösungen haben und nicht identisch erfüllt sein kann; wegen der Parallelität von $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ sind ihre Wurzeln λ_1 und λ_2 reell verschieden, reell zusammenfallend oder imaginär getrennt, je nachdem gilt:

$$\mathfrak{j}^2 - 4\,\mathfrak{j}_1\,\mathfrak{j}_2 \gtreqless 0.$$

Die Hyperbel ist in diesem Fall eine Doppelgerade; sie läuft im allgemeinen zweimal durch O.

Eine doppelt zu zählende Wurzel λ genügt auch der Gleichung $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial \lambda} = 0$; sie muß nämlich im vorliegenden Falle die algebraische Bedingung für mehrfache Wurzeln erfüllen.

Wenn $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ ist, muß aber für jeden Wert von λ $\frac{\partial \mathfrak{l}}{\partial \lambda} = 2\lambda\mathfrak{j}_1 - \mathfrak{j} \neq 0$ sein, da sonst $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}$ parallel wären, was der bekannten Tatsache[6] widerspräche, daß aus dem Bestehen einer der Gleichungen $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$, $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j} = 0$, $\mathfrak{j}_2 \times \mathfrak{j} = 0$ das der beiden anderen folgt. Da stets $\frac{\partial^2 \mathfrak{l}}{\partial \lambda^2} = 2\mathfrak{j}_1 \neq 0$ ist, so können wir demnach das in der Algebra übliche Kriterium dafür, ob λ eine doppelte Nullstelle eines Polynoms ist, formal ganz allgemein auf unser vektorielles Polynom $\mathfrak{l}(\lambda)$ anwenden.

5. Die Wurzeln der Gleichung

$$\mathfrak{l}(\lambda) = 0$$

haben eine geometrische Bedeutung, die wir auf eine Weise aufdecken wollen, die gültig bleibt, wenn statt zweier affin aufeinander bezogener Ebenen im Raum zwei m-dimensionale lineare Vektorräume, die einander vermöge einer Affinität entsprechen, im affinen Raum von $n > m$ Dimensionen vorliegen; statt vektorieller Multiplikation wäre dann äußere Multiplikation im Sinne von H. Graßmann anzuwenden:

Hat die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ eine Fixrichtung und ist μ der Abbildungsmaßstab für diese, so ist $\lambda = \mu$ eine Nullstelle von $\mathfrak{l}(\lambda)$.

Beweis: Es weise nämlich $\mathfrak{x}_u$ in diese Fixrichtung, so daß $\mathfrak{y}_u = \mu \mathfrak{x}_u$ ist; x_v habe eine beliebige andere Richtung in ε. Dann ist in der Tat wegen $\mathfrak{y}_u - \mu \mathfrak{x}_u = 0$

$$(\mathfrak{y}_u - \mu \mathfrak{x}_u) \times (\mathfrak{y}_v - \mu \mathfrak{x}_v) = \mathfrak{j}_1 \mu^2 - \mathfrak{j} \mu + \mathfrak{j}_2 = 0.$$

Ist λ eine N u l l s t e l l e von $\mathfrak{f}(\lambda)$, so gibt es mindestens eine Fixrichtung der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ mit dem Abbildungsmaßstab $\mu = \lambda$.

Beweis: Denn, wenn $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ zwei beliebige, linear unabhängige Vektoren in ε sind, so folgt aus

$$\mathfrak{f}(\lambda) = (\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u) \times (\mathfrak{y}_v - \lambda \mathfrak{x}_v) = 0$$

die lineare Abhängigkeit von $\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{y}_v - \lambda \mathfrak{x}_v$, d. h. die Existenz zweier nicht zugleich verschwindender Skalare α und β, für die gilt:

$$\alpha (\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u) + \beta (\mathfrak{y}_v - \lambda \mathfrak{x}_v) = 0$$

oder

$$\alpha \mathfrak{y}_u + \beta \mathfrak{y}_v = \lambda (\alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v),$$

wobei $\lambda \neq 0$ sein muß, weil auch $\mathfrak{y}_u$ und $\mathfrak{y}_v$ nach unseren ein für allemal getroffenen Vereinbarungen linear unabhängig sind; da aber $\alpha \mathfrak{y}_u + \beta \mathfrak{y}_v$ vermöge $\varepsilon \to \varepsilon'$ dem Vektor $\alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v$ entspricht, so bedeutet dies, daß $\alpha \mathfrak{x}_u + \beta \mathfrak{x}_v$ in eine Fixrichtung mit dem Abbildungsmaßstab $\mu = \lambda$ weist.

Das Verhältnis von α zu β braucht nicht eindeutig festzuliegen, wenn nämlich etwa schon $\mathfrak{y}_u - \lambda \mathfrak{x}_u$ verschwindet; daher kann es vorkommen, daß es m e h r e r e Fixrichtungen mit dem g l e i c h e n Abbildungsmaßstab μ gibt. Dann weisen a l l e von diesen linear abhängigen Vektoren in Fixrichtungen mit dem Maßstab μ.

Sind nämlich etwa $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ zwei verschiedene Fixrichtungen, für die $\mathfrak{y}_u = \mu \mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{y}_v = \mu \mathfrak{x}_v$ ist, so ist auch

$$\xi \mathfrak{y}_u + \eta \mathfrak{y}_v = \mu (\xi \mathfrak{x}_u + \eta \mathfrak{x}_v),$$

wobei ξ und η zwei beliebige Zahlen bedeuten.

Eine Folgerung hieraus ist, daß zwei v e r s c h i e d e n e N u l l s t e l l e n λ_1 und λ_2 von $\mathfrak{f}(\lambda)$ stets die Änderungsmaßstäbe für untereinander l i n e a r u n a b h ä n g i g e F i x r i c h t u n g e n sind.

Wir heben noch den Satz hervor: Der Vektor $d\mathfrak{x}$ lasse sich linear durch die Vektoren $\mathfrak{f}_i$ ausdrücken, deren jeder in eine Fixrichtung weist: $d\mathfrak{x} = \Sigma\, \xi_i \mathfrak{f}_i$; ist μ_i der Abbildungsmaßstab für $\mathfrak{f}_i$, so ist $d\mathfrak{y} - \mu_1 d\mathfrak{x} = \Sigma \xi_i\, \mu_i \mathfrak{f}_i - \mu_1 \Sigma\, \xi_i \mathfrak{f}_i$ schon von $\mathfrak{f}_2, \mathfrak{f}_3, \ldots$, d. h. der Menge der Vektoren $\mathfrak{f}_i$ ohne $\mathfrak{f}_1$ linear abhängig, da die ersten Glieder der beiden Summen einander gleich sind.

6. Wenden wir diese Ergebnisse auf den Fall zweier affiner Ebenen im Raum an, so finden wir: Die Aussagen umfassen in den Fällen, in denen ε und ε' nicht parallel sind – $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ –, eine Reihe früher bewiesener Tatsachen,[10] in dem Falle paralleler Ebenen ε und ε' – $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ – aber die bekannte Diskussion der ebenen Affinitäten auf demselben Träger. Wir fassen dies folgendermaßen zusammen:

Zwischen den Nullstellen des vektoriellen Polynoms

$$\mathfrak{l}(\lambda) = \lambda^2 \mathfrak{j}_1 - \lambda \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2$$

und den Fixrichtungen der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ besteht folgender Zusammenhang:

a) Hat $\mathfrak{l}(\lambda)$ keine Nullstelle, so gibt es keine Fixrichtung der Abbildung, und umgekehrt; es ist dann $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} \neq 0$, und es kann dann auch $\mathfrak{l}'(\lambda) = \dfrac{\partial \mathfrak{l}}{\partial \lambda}$ für keinen Wert von λ verschwinden.

Der oben beschriebene Kegel $\mathfrak{K}$ ist dann nicht ausgeartet.

b) Besitzt $\mathfrak{l}(\lambda)$ genau eine Nullstelle μ, die einfach in dem Sinne ist, daß $\mathfrak{l}'(\mu) \neq 0$ ist, so existiert genau eine Fixrichtung der Abbildung mit dem Abbildungsmaßstab μ, und umgekehrt; es ist dann $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \mathfrak{j} = 0$, jedoch $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$, und $\mathfrak{l}'(\lambda)$ verschwindet überhaupt für keinen Wert von λ.

Der Kegel $\mathfrak{K}$ ist dann in eine Ebene entartet.

c) Hat $\mathfrak{l}(\lambda)$ zwei Nullstellen μ_1 und μ_2, so ist $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$; es sind dann verschiedene Fälle zu unterscheiden:

α) Ist $\mu_1 \neq \mu_2$, so gibt es genau zwei verschiedene Fixrichtungen der Abbildung mit den Abbildungsmaßstäben μ_1 und μ_2; es hat dann $\mathfrak{l}'(\lambda)$ eine Nullstelle, die gleich $\frac{1}{2}(\mu_1 + \mu_2)$, also $\neq \mu_1$ und $\neq \mu_2$ ist.

---

[10] A. a. O. S. 222 f.

β) Ist $\mu_1 = \mu_2$, so verschwindet auch $\mathfrak{l}'(\lambda)$ für diesen Wert $\mu = \mu_1 = \mu_2$; es gibt dann mindestens eine Fixrichtung der Abbildung mit dem Abbildungsmaßstab μ, und zwar entweder eine (die man doppelt zählen kann), wenn nämlich $j \neq 0$, oder ein ganzes Büschel von Fixrichtungen mit diesem Abbildungsmaßstab, wenn $j = 0$ ist.

Der Kegel $\mathfrak{K}$ ist in diesem Falle in eine Gerade ausgeartet.

Wie man sieht, kann man die Vektorgleichung $\mathfrak{l}(\lambda) = 0$ als eine Verallgemeinerung der skalaren „charakteristischen Gleichung" *einer Affinität zwischen zwei in Deckung liegenden* Ebenen ansehen; denn wenn ε parallel zu ε' ist, geht die Gleichung durch Division durch $\mathfrak{j}_1$ in die bekannte charakteristische Gleichung der Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ über, und der Affinor A, der die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ in diesem Falle darstellt, genügt der Beziehung

$$A^2 \cdot \mathfrak{j}_1 - A \cdot \mathfrak{j} + \mathfrak{j}_2 = 0, \tag{10}$$

die im wesentlichen die Cayley-Hamiltonsche Gleichung dieser Affinität ist.