Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Published 1947 under Military Government Information Control License No. US-E-178
Druck der C. H Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen
Printed in Germany. Auflage 1000

Ein Algorithmus von Poincaré und andere Algorithmen zur Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse.

Von **Heinrich Tietze** in München.

Vorgelegt am 9. Februar 1945.

1. Bekanntlich gelten die drei folgenden Sätze

Satz 1a. Ist γ eine reelle Zahl und

$$\gamma = q + \frac{1\,|}{|\,q^{(1)}} + \frac{1\,|}{|\,q^{(2)}} + \cdots \tag{1}$$

der regelmäßige Kettenbruch für γ, dann bricht diese Kettenbruchentwicklung notwendig nach endlich vielen Schritten ab, wenn γ rational ist[1]).

Satz 1b. Wenn der regelmäßige Kettenbruch (1) periodisch ist, dann ist γ notwendig eine reelle quadratische Irrationalität[2]).

Satz 1c. Im Falle eines unendlichen Kettenbruchs (1) konvergieren die Näherungsbrüche gegen die Zahl γ, aus deren Entwicklung (1) entstanden ist.

2. In einer kürzlich vorgelegten Arbeit[3]) wurde für die simultane Approximation des Verhältnisses von n ($\geqq 2$) reellen Zahlen $a_1 : \ldots : a_n$ zunächst ein vor mehr als 60 Jahren von H. Poincaré angegebenes Verfahren[4]) besprochen, sowie einige Modifikationen dieses Kettenalgorithmus[5]), wobei alle diese Verfahren für

---

[1]) Die Bedingung der Endlichkeit der Kettenbruchentwicklung ist dabei für die Rationalität von γ auch hinreichend.

[2]) Diese Bedingung, daß γ eine reelle algebraische Zahl vom Grad 2 ist, ist dabei für die Periodizität von (1) auch hinreichend.

[3]) „Über real – statt formal – festgelegte Kettenalgorithmen zur simultanen Approximation mehrgliedriger reeller Zahlenverhältnisse", diese Sitz.ber., Sitzung am 26. Januar 1945.

[4]) H. Poincaré, Sur une généralisation des fractions continues, Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Paris, t. 99 (1884²), p. 1014–1016.

[5]) Neben dem originalen, abgekürzt mit „P. o." bezeichneten Poincaréschen Algorithmus wird l. c. ein an diesen sich stärker anlehnendes – im

$n = 2$ in den Euklidischen Algorithmus übergehen, sei es in der üblichen Form der Ketten-Division, sei es in der Form einer Ketten-Subtraktion[6]). Für diese Algorithmen gelten aber im Falle $n > 2$ durchaus keine so einfachen Aussagen, wie sie die Sätze 1a, 1b und 1c für $n = 2$ liefern. Das zeigen die im Folgenden (Nr. **4–13**) vorgelegten Beispiele, denen man entnimmt[7]):

Satz 2a. Wenn die n Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ einem und demselben reellen algebraischen Zahlkörper von einem Grad $r < n$ angehören, dann gibt es Fälle, in denen sich eine Reduktion des n-gliedrigen Poincaréschen Algorithmus auf eine geringere Gliederzahl einstellt[8]). Es gibt aber auch Fälle mit $r < n$, in denen der Algorithmus ohne jede Reduktion n-gliedrig weiterläuft.

Satz 2b. Wenn für n reelle Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ der Poincarésche Algorithmus periodisch ist, dann gibt es Fälle, in denen die n Zahlen a_ν (gegebenenfalls nach Multiplikation mit einem gemeinsamen Faktor) n unabhängige Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers vom Grad n sind. Es gibt aber auch Fälle der Periodizität des n-gliedrigen Algorithmus, wo alle Zahlen a_ν einem und demselben algebraischen Zahlkörper von einem Grad $< n$ angehören.

Satz 2c. Bei geometrischer Interpretation sind mit dem Poincaréschen Algorithmus Folgen von Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}, \ldots, \mathfrak{e}_n^{(h)}$ des n-dimensionalen Raumes verknüpft, wobei $\mathfrak{e}_\nu^{(h)}$ die Koordinaten $k_{\nu 1}^{(h)}, \ldots, k_{\nu n}^{(h)}$ habe ($h = 0, 1, 2, \ldots$)[9]). Wenn keine Reduktion eintritt, dann gibt es Fälle, in denen die Richtungen aller dieser

---

engeren Sinn als modifizierter Poincaréscher Algorithmus (abgekürzt mit „P. m.") bezeichnetes Verfahren dargestellt, sowie zwei weitere, als „Algorithmus lentus" (A. l.) und „Algorithmus rapidus" (A. r.) benannte.

[6]) Über diese beiden Formen vgl. l. c.[3]), § 2, Nr. **3–11**.

[7]) Wir beschränken uns auf den ursprünglichen Poincaréschen (P. o.) Algorithmus. Doch lassen sich analoge Feststellungen für die anderen Algorithmen machen; vgl. auch Anm. 19.

[8]) Die Reduktion auf die Gliederzahl 1 bedeutet ein Abbrechen des Verfahrens (bei $n = 2$ ist demgemäß jede Reduktion mit einem solchen Abbrechen verknüpft). Im speziellen Fall $r = 1$, wo also die a_ν sämtlich rational sind, treten übrigens bei beliebigem n stets Reduktionen ein, die schließlich auf die Gliederzahl 1 und das Abbrechen des Verfahrens führen.

[9]) Vgl. l. c.[3]), § 3, Nr. **18**, Gleichung (56).

Vektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(h)}$ mit wachsendem h gegen die Richtung des Vektors mit den Koordinaten $a_1, \ldots, a_n$ konvergieren[10]). Es gibt aber auch Fälle, wo diese Konvergenz nicht für jedes ν statthat.

3. Was die Feststellung von Grenzrichtungen betrifft, wie sie in Satz 2c auftreten, so handelt es sich dabei in unseren Beispielen um die Untersuchung der Iteration von Koordinaten-Transformationen, anders gesagt um Potenzen einer gegebenen Matrix. Hier spielen in bekannter Weise die Wurzeln der charakteristischen Gleichung herein[11]), im besonderen bei Vorhandensein einer einzigen Wurzel mit größtem absoluten Betrag.

4. Erstes Beispiel[12]). Sei $\vartheta = 1{,}46557\ldots$ die reelle Wurzel der Gleichung $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Für $a_\nu = \vartheta^{3-\nu}$ $(\nu = 1, 2, 3)$ läßt sich der Poincarésche Algorithmus nach dem Muster der l. c.[3]), § 7 gegebenen Beispiele durch die folgende Tabelle darstellen.

---

[10]) Das heißt also, es ist

$$\lim_{h\to\infty} \frac{k_{\nu\mu}^{(h)}}{\sqrt{k_{\nu 1}^{(h)\,2} + \cdots + k_{\nu n}^{(h)\,2}}} = \frac{a_\mu}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

oder anders gesagt, es ist für geeignete von μ unabhängige Proportionalitäts-Faktoren $c_\nu(h)$

$$\lim_{h\to\infty} c_\nu(h)\, k_{\nu\mu}^{(h)} = a_\mu$$

für jedes $\nu = 1, \ldots, n$. Im Falle $n = 2$ ist diese Aussage gleichbedeutend mit der Konvergenz der Näherungsbrüche des unendlichen Kettenbruchs gegen den Wert γ.

[11]) Es lag nahe, sich hier von der Beschäftigung mit unserem Thema etwas ablenken zu lassen durch einen bekannten Satz über diese charakteristische Gleichung, wobei es während der Schwierigkeiten, inmitten des Bombenkriegs Literatur heranzuziehen, wiederum nahelag, sich selbst einen Beweis jenes Satzes zurechtzulegen. Aus dieser Ablenkung entstand die gleichzeitig vorgelegte Note über eine ,,Verallgemeinerung eines Hamilton-Cayley-Frobenius'schen Satzes auf ein beliebiges Paar vertauschbarer Matrizen''; diese Sitz.ber., Jahrgg. 1945/46, pag. 45.

[12]) Unser Beispiel (ebenso wie jenes der Nr. **8**) ist ein spezieller Fall des Beispiels in Nr. **13**. Die Behandlung ist dort eine etwas andere.

h	$a_1^{(h)}$	$a_2^{(h)}$	$a_3^{(h)}$	$e_1^{(h)}$	$e_2^{(h)}$	$e_3^{(h)}$
0	a_1 * * ϑ^2 (1)	* a_2 * ϑ (2)	* * a_3 1 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	$a_1 - a_2$ * $\vartheta^2 - \vartheta = \vartheta(\vartheta - 1)$ (2)	* $a_2 - a_3$ $\vartheta - 1$ (3)	* * a_3 $1 = \vartheta^2(\vartheta - 1)$ (1)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$a_1 - 2a_2 + a_3$ $(\vartheta - 1)^2$ (3)	* $a_2 - a_3$ $\vartheta - 1 = \vartheta^2(\vartheta - 1)^2$ (1)	$-a_1 + a_2 + a_3$ $\vartheta(\vartheta - 1)^2$ (2)	2, 1, 1	3, 2, 1	,,
3	$a_1 - 2a_2 + a_3$ $(\vartheta - 1)^2 = \vartheta^2(\vartheta - 1)^3$ (1)	a_1 * $-2a_3$ $\vartheta(\vartheta - 1)^3$ (2)	$-2a_1 + 3a_2$ * $(\vartheta - 1)^3$ (3)	6, 4, 3	,,	4, 3, 2

Da sich die Zahlen

$$a_1' = a_1 - a_2, \qquad a_2' = a_2 - a_3, \qquad a_3' = a_3$$

als proportional zu ϑ, 1, ϑ^2, somit bis auf die Reihenfolge als proportional zu a_1, a_2, a_3 ergeben, so ist schon mit diesem ersten Schritt die Periodizität des Algorithmus ersichtlich. Weiterhin wird $a_1^{(3)} : a_2^{(3)} : a_3^{(3)} = a_1 : a_2 : a_3$; und wenn wir im Einklang mit den Bezeichnungen l. c.[3]) (gemäß den dortigen Gleichungen (55), (56) in Nr. **18**) setzen:

$$a_\mu^{(3)} = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\nu\mu}^{(3)} a_\nu, \qquad e_\mu^{(3)} = \sum_{\nu=1}^{3} k_{\mu\nu}^{(3)} e_\nu,$$

dann erhalten wir für die Matrix der $c_{\mu\nu}^{(3)}$ bzw. $k_{\mu\nu}^{(3)}$ in unserem Fall

$$C^{(3)} = \begin{pmatrix} 1, & -2, & 1 \\ 1, & 0, & -2 \\ -2, & 3, & 0 \end{pmatrix}, \qquad K^{(3)} = \begin{pmatrix} 6, & 4, & 3 \\ 3, & 2, & 1 \\ 4, & 3, & 2 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

wobei (vgl. l. c., Gleichung (57)) $K^{(3)}$ reziprok zur gestürzten (transponierten) Matrix $C^{(3)}$ ist.

Wenn wir (vgl. l. c.[3]), Nr. **16**, **18**) die aus den Vektoren $e_\mu^{(h)}$ bzw. e_μ gebildeten Matrizen

$$\mathfrak{E}^{(h)} = \begin{pmatrix} e_1^{(h)} \\ e_2^{(h)} \\ e_3^{(h)} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{E}^{(0)} = \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \tag{3}$$

einführen, haben wir $\mathfrak{E}^{(3)} = K^{(3)}\,\mathfrak{E}$ und der Periodizität des Algorithmus gemäß also $\mathfrak{E}^{(3m)} = K^{(3)}\,\mathfrak{E}^{(3m-3)}$ für $m \geqq 1$. Somit ist

$$\mathfrak{E}^{(3m)} = (K^{(3)})^m\,\mathfrak{E}. \tag{4}$$

Die Untersuchung der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(h)}$ für $h \to \infty$, u. zw. zunächst speziell der $\mathfrak{e}_\mu^{(3m)}$ für $m \to \infty$, läuft also auf die Untersuchung der wachsenden Potenzen der Matrix $K^{(3)}$ hinaus. Unter Benützung des Umstandes, daß die charakteristische Gleichung von $K^{(3)}$ drei verschiedene Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ hat, führt nun die Transformation von $K^{(3)}$ mit Hilfe einer geeigneten Matrix T in die Matrix

$$T K^{(3)}\, T^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2, & 0_x \\ 0, & 0, & \lambda_3 \end{pmatrix} = L$$

auf

$$(K^{(3)})^m = T^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1^m, & 0, & 0 \\ 0, & \lambda_2^m, & 0 \\ 0, & 0, & \lambda_3^m \end{pmatrix} T.$$

Wegen (4) ist damit ein Verfahren zur Untersuchung der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(h)}$ bei wachsendem h gegeben[13]), wobei sich im vorliegenden Beispiel zeigt, daß für $h \to \infty$ die Richtungen aller Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}, \mathfrak{e}_2^{(h)}, \mathfrak{e}_3^{(h)}$ gegen die Richtung des Ausgangs-Vektors $(a_1, a_2, a_3) = (\vartheta^2, \vartheta, 1)$ konvergieren.

Was die nähere Ausführung betrifft[14]), so möge zunächst (allgemein für beliebiges n, nicht für $n = 3$) eine Matrix

$$A = (a_{ik}) \quad i, k = 1, \ldots, n$$

im Hinblick auf ihre Potenzen A^m unter der Voraussetzung betrachtet werden, daß $D(\lambda) = |\,A - \lambda E\,| = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_n - \lambda)$

[13]) In etwas anderer Gestalt wird dieselbe Aufgabe in den Beispielen der Nummern **5**, **6**, **9**, **11**, **13** behandelt.

[14]) Der Druck der obigen Arbeit, deren Manuskript ich bei Kriegsende in Verwahrung hatte, konnte erst durchgeführt werden, nachdem die Akademie und der Verlag ihre Tätigkeit wieder aufgenommen hatten. Dadurch ergab sich die Gelegenheit, gewisse Entwicklungen etwas mehr auszuführen, die im ursprünglichen, während der letzten Monate des Luftkriegs verfaßten Manuskript nur angedeutet worden waren. Der Abfassung einer wirklich

ist (wo E die Einheitsmatrix bedeute) und die Wurzeln $\lambda_1, \ldots,$ λ_n alle verschieden, die Elementarteiler von A somit gleich $\lambda - \lambda_1$, $\lambda - \lambda_2$ usw. sind, also mit den Elementarteilern von

$$L = \begin{pmatrix} \lambda_1, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & \ldots, & 0, & \lambda_n \end{pmatrix}$$

übereinstimmen. Damit ist die Äquivalenz von $A - \lambda E$ und $L - \lambda E$ gegeben[15]), also die Existenz von Matrizen T, U mit konstanten Koeffizienten, so daß

$$A - \lambda E = U(L - \lambda E)\,T,$$

also

$$U = T^{-1},$$
$$A = T^{-1}\,L\,T \tag{5}$$

ist. Ersichtlich ist T durch die Bedingung (5) nicht völlig festgelegt; vielmehr ergibt sich für zwei Matrizen $T = T_1$, $T = T_2$, die beide (5) erfüllen, wenn $T_2\,T_1^{-1} = S = (s_{ik})$ gesetzt wird, aus $SL = LS$, daß $s_{ik}\lambda_k = \lambda_i s_{ik}$, also $s_{ik} = 0$ für $i \neq k$ sein muß, während die $s_{ii} = s_i$ beliebig $\neq 0$ wählbar sind. Aus einer speziellen, der Gleichung (5) genügenden Transformation $T = (t_{ik})$ ergeben sich also alle anderen in der Gestalt

$$S\,T = (s_i\,t_{ik}), \tag{6}$$

---

ausgeglichenen Darstellung stehen jetzt, zwei Jahre nach Kriegsschluß – sozusagen als Ersatz für die Luftbombardements auf die Stadt – mannigfache Angriffe auf eine ruhige Entwicklung der wissenschaftlichen Institutionen entgegen. Vormals hatten diese Institutionen zwölf Jahre lang gelitten unter den Eingriffen wissenschaftsfremder, vielfach geradezu wissenschaftsfeindlicher Kräfte, zum Teil unter direkter Mithilfe von „Vertretern" der Wissenschaft, oft bei Fehlen einheitlicher Abwehr. Wer aber aus der jüngsten Vergangenheit so manche lähmend sich auswirkenden, beste Kräfte unnütz bindenden Erscheinungen beobachten mußte, wofür die sich schon so lange erfolglos hinziehenden Bemühungen um eine für den Betrieb der Akademie seit jeher nötige Stelle gerade nur ein augenblicklich sinnfälliges Beispiel darstellen, der möchte wegen gewisser Parallelen mit jenen zwölf Jahren besorgt sein um das Bild, das dereinst eine Geschichte der Wissenschaft unserer Tage bezüglich der Art der Verwaltung ihrer Lebensbedingungen bieten wird.

[15]) Vgl. Bôcher, Algebra, deutsche Ausgabe, S. 304, Satz 3.

somit durch Multiplikation der i-ten Zeile von T mit einem Faktor $s_i \neq 0$. Falls in T die Diagonalelemente $t_{ii} \neq 0$ sind, kann man ihnen also einen willkürlichen Wert $\neq 0$ vorschreiben, z. B. alle $= 1$ nehmen (indem man die $s_i = 1 : t_{ii}$ wählt).

Zur Bestimmung der Elemente t_{ik} der Matrix T gemäß (5), also aus $TA = LT$, hat man die n^2 homogenen linearen Gleichungen $(i, k = 1, \ldots, n)$

$$0 = a_{1k}\, t_{i1} + \cdots + (a_{kk} - \lambda_i)\, t_{ik} + \cdots + a_{nk}\, t_{in}, \qquad (7)$$

wobei für festes i zur Berechnung des Verhältnisses $t_{i1} : \ldots : t_{in}$ ein System von n Gleichungen (7) mit $k = 1, \ldots, n$ dient, dessen Determinante $D'(\lambda_i) = |A' - \lambda_i E|$ durch bloßes Vertauschen der Zeilen und Kolonnen aus $D(\lambda_i) = |A - \lambda_i E|$ hervorgeht und daher $= 0$ ist; und beim Rang $n - 1$ sind die $t_{i1}, \ldots, t_{in}$ demnach proportional den Minoren der Elemente einer Zeile (sagen wir der g-ten Zeile) der Determinante $D'(\lambda_i)$, anders gesagt den Minoren der Elemente der g-ten Kolonne von $D(\lambda_i)$. Wählt man speziell $g = i$, so hat man daher[16])

$$t_{ik} = (-1)^{k-1}\, \gamma_i \left| a_{hj} - \delta_{hj}\, \lambda_i \right|_{\substack{h,\, j = 1, \ldots, n \\ h \neq k,\, j \neq i}}. \qquad (12)$$

Machen wir die weitere Voraussetzung, daß unter den Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung eine, etwa λ_1,

---

[16]) Statt auf die Berechnung von $T = (t_{ik})$ kann man ausgehen auf die Berechnung von $U = (u_{ik})$ aus

$$AU = UL, \qquad (8)$$

wobei sich aus einer Lösung U alle anderen in der Gestalt

$$US = (u_{ik}\, s_k) \qquad (9)$$

ergeben, somit durch Multiplikation der k-ten Kolonne von U mit einem Faktor $s_k \neq 0$. Es liefert dann (8) die Gleichungen

$$0 = a_{i1}\, u_{1k} + \cdots + (a_{ii} - \lambda_k)\, u_{ik} + \cdots + a_{in}\, u_{nk}, \qquad (10)$$

somit für festes k zur Bestimmung von $u_{1k} : \ldots : u_{nk}$ ein System von n Gleichungen $i = 1, \ldots, n$ mit der Determinante $D(\lambda_k) = 0$, woraus sich die $u_{1k}, \ldots, u_{nk}$ proportional erweisen den Minoren der Elemente etwa der g-ten Zeile von $D(\lambda_k)$; das führt speziell für $g = k$ auf

$$u_{ik} = (-1)^{i-1}\, \beta_k \left| a_{hj} - \delta_{hj}\, \lambda_k \right|_{\substack{h,\, j = 1, \ldots, n \\ h \neq k,\, j \neq i}} \qquad (11)$$

einen größeren absoluten Betrag hat als jede andere Wurzel, dann konvergieren für $m \to \infty$ die Matrizen $\lambda_1^{-m} L^m$ gegen

$$\begin{pmatrix} 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0, & 0, & \ldots, & 0 \end{pmatrix}$$

und daher $\lambda_1^{-m} A^m = \lambda_1^{-m} T^{-1} L^m T = = U \lambda_1^{-m} L^m T$ gegen die Matrix $(u_{i\,1}\, t_{1\,k})$, deren sämtliche Zeilen zur ersten Zeile von T, deren sämtliche Kolonnen zur ersten Kolonne von U proportional sind. Das Gesagte liefert den folgenden

Hilfssatz: Wenn die analog zu (3) gebildeten Vektor-Matrizen $\mathfrak{E}^{(m)}$ mit der Vektor-Matrix $\mathfrak{E}$ in der Beziehung $\mathfrak{E}^{(m)} = A^m \mathfrak{E}$ stehen, die Wurzeln $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ der charakteristischen Gleichung $|A - \lambda E| = 0$ sämtlich verschieden sind und $|\lambda_1| > |\lambda_\nu|$ für jedes $\nu \neq 1$ ist, dann konvergieren für $m \to \infty$ die Richtungen aller die Matrix $\mathfrak{E}^{(m)}$ bildenden Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(m)}, \ldots, \mathfrak{e}_n^{(m)}$ (da die Koordinaten des Vektors $\mathfrak{e}_\mu^{(m)}$ nichts anderes sind als die Elemente der μ-ten Zeile von A^m) gegen die Richtung des Vektors mit den gemäß (12) bestimmten Koordinaten $t_{1\,1}, \ldots, t_{1\,n}$, anders gesagt gegen die Richtung eines Vektors, dessen Koordinaten den Minoren der ersten Kolonne von $D(\lambda_1) = |A - \lambda_1 E|$ proportional sind.

Für unser spezielles Beispiel haben wir das anzuwenden auf die durch (2) gegebene Matrix $A = K^{(3)}$, deren charakteristische Gleichung

$$0 = \begin{vmatrix} 6 - \lambda, & 4, & 3 \\ 3, & 2 - \lambda, & 1 \\ 4, & 3, & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 1 - \lambda + 10\,\lambda^2 - \lambda^3$$

eine reelle Wurzel $\lambda_1 = 2 + \vartheta + 3\,\vartheta^2 = 9{,}90927\ldots$ (umgekehrt ist $\vartheta = \frac{1}{11}\,(-1 - 28\,\lambda_1 + 3\,\lambda_1^2))$ und zwei konjugiert imaginäre λ_2, λ_3 mit $|\lambda_2| = |\lambda_3| < |\lambda_1|$ hat[17]). Für die Minoren der Elemente der ersten Kolonne von $D(\lambda_1)$ findet man nun (wobei wir in (12) $\gamma_1 = 1$ setzen)

---

[17]) Man berechnet für λ_2 und λ_3 die Werte $0{,}045367\ldots \pm i\; 0{,}3144156\ldots$ mit $|\lambda_2| = |\lambda_3| = 0{,}31767\ldots$.

$$t_{11} = \begin{vmatrix} 2 - \lambda_1, & 1 \\ 3, & 2 - \lambda_1 \end{vmatrix} = (\vartheta + 3\,\vartheta^2)^2 - 3 = 12 + 9\,\vartheta + 16\,\vartheta^2 =$$
$$= \vartheta^2\,(4 + 3\,\vartheta + 9\,\vartheta^2),$$

$$t_{12} = - \begin{vmatrix} 4, & 3 \\ 3, & 2 - \lambda_1, \end{vmatrix} = 4\,\lambda_1 + 1 = 9 + 4\,\vartheta + 12\,\vartheta^2 =$$
$$= \vartheta\,(4 + 3\,\vartheta + 9\,\vartheta^2),$$

$$t_{13} = \begin{vmatrix} 4, & 3 \\ 2 - \lambda_1, & 1 \end{vmatrix} = 3\,\lambda_1 - 2 = 4 + 3\,\vartheta + 9\,\vartheta^2,$$

also

$$t_{11} : t_{12} : t_{13} = \vartheta^2 : \vartheta : 1 = a_1 : a_2 : a_3.$$

Gemäß (4) konvergieren also die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(3m)}$, $\mathfrak{e}_2^{(3m)}$, $\mathfrak{e}_3^{(3m)}$ für $m \to \infty$ gegen die Richtung $a_1 : a_2 : a_3$.

Daß aber nicht nur die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(3m)}$ gegen die Richtung des Vektors (a_1, a_2, a_3) konvergieren, sondern auch die der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+1)}$, $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+2)}$ und somit für $h \to \infty$ die Richtungen aller Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(h)}$, ist unmittelbar aus den Beziehungen

$$\mathfrak{e}_1^{(3m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(3m)}, \qquad \mathfrak{e}_2^{(3m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(3m)} + \mathfrak{e}_2^{(3m)},$$
$$\mathfrak{e}_3^{(3m+1} = \mathfrak{e}_1^{(3m)} + \mathfrak{e}_2^{(3m)} + \mathfrak{e}_3^{(3m)},$$
$$\mathfrak{e}_3^{(3m+2)} = \mathfrak{e}_3^{(3m+1)}, \qquad \mathfrak{e}_1^{(3m+2)} = \mathfrak{e}_1^{(3m+1)} + \mathfrak{e}_3^{(3m+1)}$$
$$\mathfrak{e}_2^{(3m+2)} = \mathfrak{e}_1^{(3m+1)} + \mathfrak{e}_2^{(3m+1)} + \mathfrak{e}_3^{(3m+1)}$$

ersichtlich, wobei für den nächsten, zu den Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+3)}$ führenden Schritt die Formeln

$$\mathfrak{e}_2^{(3m+3)} = \mathfrak{e}_2^{(3m+2)}, \qquad \mathfrak{e}_3^{(3m+3)} = \mathfrak{e}_2^{(3m+2)} + \mathfrak{e}_3^{(3m+2)}$$
$$\mathfrak{e}_1^{(3m+3)} = \mathfrak{e}_1^{(3m+2)} + \mathfrak{e}_1^{(3m+2)} + \mathfrak{e}_3^{(3m+2)}$$

heranzuziehen wären[18]).

5. Zweites Beispiel. Sei $\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ die positive Wurzel der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Wir betrachten den dreigliedrigen Poincaréschen Algorithmus für $a_1 = 2\,\vartheta + 1 = 2 + \sqrt{5}$, $a_2 = \vartheta$, $a_3 = 1$. Die ersten Schritte gibt die folgende Tabelle

[18]) Die Kombination der drei von den $\mathfrak{e}_\mu^{(3m)}$ über die $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+1)}$ und $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+2)}$ zu den $\mathfrak{e}_\mu^{(3m+3)}$ führenden Schritte liefert natürlich $\mathfrak{E}^{(3m+3)} = K^{(3)}\,\mathfrak{E}^{(3m)}$.

h	$a_1^{(h)}$	$a_2^{(h)}$	$a_3^{(h)}$	$\mathfrak{e}_1^{(h)}$	$\mathfrak{e}_2^{(h)}$	$\mathfrak{e}_3^{(h)}$
0	a_1 * * $2\vartheta + 1$ (1)	* a_2 * ϑ (2)	* * a_3 1 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	$a_1 - a_2$ * $\vartheta + 1$ (1)	* $a_2 - a_3$ $\vartheta - 1$ (3)	* * a_3 1 (2)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$a_1 - a_2 - a_3$ ϑ (1)	* $a_2 - a_3$ $\vartheta - 1$ (2)	* $-a_2 + 2a_3$ $-\vartheta + 2$ (3)	,,	3, 2, 1	2, 1, 1
3	$a_1 - 2a_2$ * 1 (1)	* $2a_2 - 3a_3$ $2\vartheta - 3$ (3)	* $-a_2 + 2a_3$ $-\vartheta + 2$ (2)	,,	4, 2, 1	6, 3, 2
4	$a_1 - a_2 - 2a_3$ $\vartheta - 1$ (1)	* $2a_2 - 3a_3$ $2\vartheta - 3$ (2)	* $-3a_2 + 5a_3$ $-3\vartheta + 5$ (3)	,,	11, 5, 3	7, 3, 2

Wie im früheren Beispiel erkennt man schon nach dem ersten Schritt die Periodizität, da die Zahlen

$$a_1' = a_1 - a_2, \quad a_2' = a_2 - a_3, \quad a_3' = a_3$$

sich als proportional zu $2\vartheta + 1$, 1, ϑ, also zu a_1, a_3, a_2 erweisen, demgemäß dann

$$a_1'' = a_1' - a_3', \quad a_2'' = a_2', \quad a_3'' = a_3' - a_2'$$

als proportional zu a_1, a_2, a_3. Die Koeffizienten-Matrizen $C^{(2)}$, $K^{(2)}$ der unimodularen linearen Transformationsgleichungen

$$a_\mu'' = \sum_{\nu=1}^{3} c_{\mu\nu}^{(2)} a_\nu, \quad \mathfrak{e}_\mu'' = \sum_{\nu=1}^{3} k_{\mu\nu}^{(2)} \mathfrak{e}_\nu$$

sind dann

$$C^{(2)} = \begin{pmatrix} 1, & -1, & -1 \\ 0, & 1, & -1 \\ 0, & -1, & 2 \end{pmatrix}, \quad K^{(2)} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 3, & 2, & 1 \\ 2, & 1, & 1 \end{pmatrix};$$

und die Wurzeln der charakteristischen Gleichung von $K^{(2)}$ sind, der Größe nach fallend geordnet,

$$\tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) = \vartheta + 1, \quad 1, \quad \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{5}) = 2 - \vartheta.$$

Aus der Tatsache, daß $a_1^{(h)}$ für alle h stets größer als $a_2^{(h)}$ und $a_3^{(h)}$, demgemäß stets $\mathfrak{e}_1^{(h)} = \mathfrak{e}_1$ ist, ergibt sich, daß die Zahlen $a_2^{(h)}$, $a_3^{(h)}$ für sich betrachtet einen zweigliedrigen Algorithmus liefern, der nichts anderes als der Euklidische Algorithmus für die Zahl ϑ ist. Im Einklang damit liefern die zweite und dritte Koordinate eines jeden der Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ – wie (1, 1), (2,1), (3, 2), (5, 3) usw. – den Zähler und Nenner eines Näherungsbruches der Zahl

$$\vartheta = 1 + \frac{1\,|}{|\,1} + \frac{1\,|}{|\,1} + \cdots .$$

Darüber hinaus aber kann man zeigen, daß die Richtungen dieser zwei Vektoren mit wachsendem h gegen die Richtung des Vektors $(a_1, a_2, a_3) = (2\,\vartheta + 1, \vartheta, 1)$ konvergieren. Mit Rücksicht darauf, daß $\mathfrak{e}_1^{(h)}$ für alle h konstant $= \mathfrak{e}_1$ bleibt, liegt hier ein völlig verschiedenes Verhalten vor im Vergleich zum vorigen Beispiel der Nr. **4**, wo alle drei Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}$, $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ für $h \to \infty$ gegen die Ausgangsrichtung $a_1 : a_2 : a_3$ konvergieren.

Im Einzelnen[19]) gewinnt man diese Feststellungen, wenn man die Fibonacci-Lamé'schen Zahlen[20])

$$U_m = \frac{(\vartheta')^m - (\vartheta'')^m}{\vartheta' - \vartheta''}, \tag{13}$$

sowie gewisse Zahlen V_m, W_m einführt, die erklärt werden können durch

[19]) Diese Einzelausführungen wurden erst bei der Überarbeitung beigefügt, von der in Anm. 14 die Rede ist. Die hier gebrachten Beispiele wurden ausgewählt aus einer etwas größeren Anzahl seinerzeit konstruierter. Den Ausgangspunkt für die Konstruktion bildeten die Anordnungsbeziehungen nach der Größe, die für $h = 0, 1, 2$ usw. von den Zahlen $a_1^{(h)}, \ldots, a_n^{(h)}$ gefordert wurden. Durch die weitere Forderung der Periodizität von einer gewählten Stelle an war dann der einzelne Fall festgelegt. – Aus der Gesamtheit der Verhältnisse im allgemeinen und besonderen (vgl. Anm. 14, 23) hat es sich ergeben, daß die Arbeit viel zu wünschen übrig läßt (nicht nur darin, daß von den verschiedenen Algorithmen nur einer behandelt wird, vgl. Anm. 7). Insbesondere schiene mir geboten, etwaigen Berührungspunkten mit anderen Publikationen nachzugehen, so speziell jenen von Herrn O. Perron (vgl. l. c.[3]), dortige Anm. 2).

[20]) Vgl. Encykl. d. math. Wiss., Bd. I, Teil 2, Artikel I C 1, pag. 577.

$$V_m = \Sigma f_m(\lambda), \quad W_m = \Sigma g_m(\lambda), \tag{14}$$

wenn

$$h_m(x) = 2x^{m-1} - x^{m-2} - 1, \tag{14a}$$
$$f_m(x) = \tfrac{1}{5}(3x-2)\,h_m(x),$$
$$g_m(x) = \tfrac{1}{5}(4x-1)\,h_m(x)$$

gesetzt wird, wenn ferner mit

$$\lambda' = \vartheta' + 1 = \tfrac{1}{2}(3+\sqrt{5}), \; \lambda'' = \vartheta'' + 1 = \tfrac{1}{2}(3-\sqrt{5})$$

die beiden Wurzeln der Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$ bezeichnet werden und für irgend eine Funktion $F(x)$

$$F(\lambda') + F(\lambda'') = \Sigma F(\lambda)$$

gesetzt wird. Dabei können die Zahlen U_m durch die bekannte Rekursion

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_{m+1} = U_m + U_{m-1}, \tag{15}$$

die Zahlen V_m, W_m aber durch

$$\left.\begin{aligned} V_1 &= 1, & V_{m+1} &= V_m + W_m + 2 \\ W_1 &= 1, & W_{m+1} &= V_m + 2\,W_m + 3 \end{aligned}\right. \tag{16}$$

rekursorisch definiert werden. Man bestätigt nämlich leicht, daß die Koordinaten $k_{\mu\nu}^{(h)}$ der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(h)} = k_{\mu 1}^{(h)}\,\mathfrak{e}_1 + k_{\mu 2}^{(h)}\,\mathfrak{e}_2 + k_{\mu 3}^{(h)}\,\mathfrak{e}_3$ für $\mu = 2, 3$ durch folgende Gleichungen gegeben sind:

Für ungerades $h = 2m-1$ haben $\mathfrak{e}_2^{(h)}$ und $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} &k_{21}^{(2m-1)} = V_m, \quad k_{22}^{(2m-1)} = U_{2m-1}, \quad k_{23}^{(2m-1)} = U_{2m-2}, \\ &k_{31}^{(2m-1)} = W_m, \quad k_{32}^{(2m-1)} = U_{2m}, \quad\;\; k_{33}^{(2m-1)} = U_{2m-1}; \end{aligned} \tag{17}$$

für gerades $h = 2m$ aber hat man, weil gemäß $a_1^{(2m-1)} > a_3^{(2m-1)} > a_2^{(2m-1)}$ der Algorithmus auf

$$\mathfrak{e}_3^{(2m)} = \mathfrak{e}_1^{(2m-1)} + \mathfrak{e}_3^{(2m-1)}, \quad \mathfrak{e}_2^{(2m)} = \mathfrak{e}_1^{(2m-1)} + \mathfrak{e}_2^{(2m-1)} + \mathfrak{e}_3^{(2m-1)}$$

führt:

$$\left.\begin{aligned} k_{21}^{(2m)} = 1 + V_m + W_m, \quad k_{22}^{(2m)} &= U_{2m-1} + U_{2m} = U_{2m+1}, \\ k_{23}^{(2m)} &= U_{2m-2} + U_{2m-1} = U_{2m}, \\ k_{31}^{(2m)} = 1 + W_m, \quad k_{32}^{(2m)} = U_{2m}, \quad k_{33}^{(2m)} &= U_{2m-1}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Wegen $a_1^{(2m)} > a_2^{(2m)} > a_3^{(2m)}$ liefert dann der Algorithmus die Gleichungen

$$\mathfrak{e}_2^{(2m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(2m)} + \mathfrak{e}_2^{(2m)}, \quad \mathfrak{e}_3^{(2m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(2m)} + \mathfrak{e}_2^{(2m)} + \mathfrak{e}_3^{(2m)}, \tag{19}$$

also speziell für die erste Koordinate, wenn (16) beachtet wird,

$$\begin{aligned} k_{21}^{(2m+1)} &= 1 + (1 + V_m + W_m) = V_{m+1}, \\ k_{31}^{(2m+1)} &= 1 + (1 + V_m + W_m) + (1 + W_m) = W_{m+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Und da sich für die zweite und dritte Koordinate aus (19) unter Beachtung von (15)

$$k_{22}^{(2m+1)} = k_{22}^{(2m)} = U_{2m+1}, \quad k_{23}^{(2m+1)} = k_{23}^{(2m)} = U_{2m},$$
$$k_{32}^{(2m+1)} = k_{22}^{(2m)} + k_{32}^{(2m)} = U_{2m+2}, \quad k_{33}^{(2m+1)} = k_{23}^{(2m)} + k_{33}^{(2m)} = U_{2m+1}$$

ergibt, so sind damit die Formeln (17), die man für $m = 1$ direkt bestätigt, durch vollständige Induktion bewiesen.

Nebenbei bemerkt ist natürlich der Weg zur Ermittlung der Formeln (14) für V_m und W_m der umgekehrte, indem zunächst aus dem Verlauf des Algorithmus die Rekursionsformeln (20) bzw. (16) hergeleitet werden, deren Lösung in bekannter Weise nach dem Muster inhomogener linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten zu gewinnen ist: Das zugehörige homogene System

$$X_{m+1} = X_m + Y_m, \quad Y_{m+1} = X_m + 2\,Y_m$$

führt auf $Y_{m+2} = 3\,Y_{m+1} - Y_m$ mit den speziellen Lösungen

$$\begin{aligned} Y'_m &= \lambda'^m, \quad X'_m = \lambda'^m(\lambda' - 2), \\ Y''_m &= \lambda''^m, \quad X''_m = \lambda''^m(\lambda'' - 2). \end{aligned}$$

Der Ansatz

$$\begin{aligned} V_m &= u'_m X'_m + u''_m X''_m, \\ W_m &= u'_m Y'_m + u''_m Y''_m, \end{aligned} \tag{21}$$

eingesetzt in (16), führt dann auf

$$u'_1 = \frac{1}{\lambda' - \lambda''}, \quad u'_{m+1} - u'_m = \frac{1}{\lambda' - \lambda''}\left(\frac{1}{\lambda'}\right)^{m-1},$$

$$u''_1 = \frac{-1}{\lambda' - \lambda''}, \quad u''_{m+1} - u''_m = \frac{-1}{\lambda' - \lambda''}\left(\frac{1}{\lambda''}\right)^{m-1};$$

von da gelangt man gemäß $\frac{1}{\lambda'-\lambda''} = \frac{2\lambda'-3}{5} = -\frac{2\lambda''-3}{5}$ sofort zu

$$u'_m = \frac{1}{\lambda'-\lambda''}\left[1+\sum_{\nu=0}^{m-2}\left(\frac{1}{\lambda'}\right)^\nu\right] = \frac{4-\lambda'}{5\lambda'^{m-2}}h_m(\lambda'),$$

$$u''_m = \frac{4-\lambda''}{5\lambda''^{m-2}}h_m(\lambda'')$$

und zu den Formeln (14).

Was aber die Grenzrichtungen der Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(h)}$ und $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ für $h\to\infty$ betrifft, so erkennt man aus (13) bzw. (14a) unter Beachtung von

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\vartheta''}{\vartheta'}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^n = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\frac{h_n(\lambda'')}{h_n(\lambda')} = 0,$$

sowie von

$$\sqrt{5} = 2\vartheta - 1 = 2\lambda - 3, \quad \vartheta^2 = \lambda,$$

daß

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2\vartheta-1}{\vartheta^n}U_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\vartheta'-\vartheta''}{\vartheta'^n}U_n = 1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n(\lambda)}{\lambda^{n-2}} = 2\lambda - 1 = 2\vartheta + 1 \tag{22}$$

ist; daß ferner wegen

$$\frac{2\vartheta-1}{\vartheta^{2m-2}}f_m(\lambda) = \frac{2\vartheta-1}{\vartheta^{2m-1}}g_m(\lambda) = \frac{h_m(\lambda)}{\lambda^{m-2}}$$

jeder der Grenzwerte

$$\lim_{m\to\infty}\frac{2\vartheta-1}{\vartheta^{2m-2}}V_m \text{ und } \lim_{m\to\infty}\frac{2\vartheta-1}{\vartheta^{2m-1}}W_m$$

gleich dem Grenzwert (22) ist; und daß sich daher derselbe Wert auch für

$$\lim_{m\to\infty} \frac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m}} (1 + V_m + W_m) = 0 + \frac{2\,\vartheta + 1}{\vartheta^2} + \frac{2\,\vartheta + 1}{\vartheta}$$

und für $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m-1}} (1 + W_m)$ ergibt.

Unter Beachtung der Formeln (17) und (18) für die Koordinaten der Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ ergibt sich dann, daß jeder der Vektoren

$$\frac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m-2}}\,\mathfrak{e}_2^{(2m-1)}, \quad \frac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m-1}}\,\mathfrak{e}_3^{(2m-1)}, \quad \frac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m}}\,\mathfrak{e}_2^{(2m)}, \quad \frac{2\,\vartheta - 1}{\vartheta^{2m-1}}\,\mathfrak{e}_3^{(2m)}$$

mit $m \to \infty$ gegen den Vektor $(2\,\vartheta + 1,\ \vartheta,\ 1)$ konvergiert.

6. Drittes Beispiel. Sei $\vartheta = 1 + \sqrt{2}$ die positive Wurzel der Gleichung $x^2 - 2\,x - 1 = 0$. Für $a_1 = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,\vartheta = 3 + \frac{5}{2}\sqrt{2}$, $a_2 = \vartheta$, $a_3 = 1$ sind die ersten Schritte des Poincaréschen Algorithmus gegeben durch

h	$a_1^{(h)}$	$a_2^{(h)}$	$a_3^{(h)}$	$\mathfrak{e}_1^{(h)}$	$\mathfrak{e}_2^{(h)}$	$\mathfrak{e}_3^{(h)}$
0	a_1 * * $\frac{5}{2}\,\vartheta + \frac{1}{2}$ (1)	* a_2 * ϑ (2)	* * a_3 1 (3)	1, 0, 0	0, 1, 0	0, 0, 1
1	$a_1 - a_2$ * $\frac{3}{2}\,\vartheta + \frac{1}{2}$ (1)	* $a_2 - a_3$ $\vartheta - 1$ (2)	* * a_3 1 (3)	,,	1, 1, 0	1, 1, 1
2	$a_1 - 2\,a_2 + a_3$ $\frac{1}{2}\,\vartheta + \frac{3}{2}$ (1)	* $a_2 - 2\,a_3$ $\vartheta - 2$ (3)	* * a_3 1 (2)	,,	2, 1, 0	3, 2, 1

Auch dieses Beispiel liefert einen periodischen Algorithmus, wie sich daraus ergibt, daß $a_1'' : a_3'' : a_2'' = a_1 : a_2 : a_3$ und daher $a_1^{(4)} : a_2^{(4)} : a_3^{(4)} = a_1 : a_2 : a_3$ ist. Die Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}$, $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ verhalten sich dabei analog wie im vorigen Beispiel: Es sind alle $\mathfrak{e}_1^{(h)} = \mathfrak{e}_1 = (1, 0, 0)$, während die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ für $h \to \infty$ gegen die Richtung $a_1 : a_2 : a_3$ konvergieren.

Im Einzelnen[21]) werde etwa $\mathfrak{e}_2^{(4m)} = (r_m,\ s_m,\ t_m)$, $\mathfrak{e}_3^{(4m)} =$

[21]) Wegen der Einzelausführungen vgl. Anm. 19.

$= (u_m, v_m, w_m)$ gesetzt. Unter Beachtung des Umstandes, daß sich stets $\mathfrak{e}_1^{(h+1)} = \mathfrak{e}_1^{(h)} = (1, 0, 0)$ ergibt, gewinnt man dann aus

$$\mathfrak{e}_2^{(4m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(4m)} + \mathfrak{e}_2^{(4m)} = (1 + r_m, s_m, t_m),$$

$$\mathfrak{e}_3^{(4m+1)} = \mathfrak{e}_1^{(4m)} + \mathfrak{e}_2^{(4m)} + \mathfrak{e}_3^{(4m)} = (1 + r_m + u_m, s_m + v_m, t_m + w_m),$$

$$\mathfrak{e}_2^{(4m+2)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+1)} + \mathfrak{e}_2^{(4m+1)} = (2 + r_m, s_m, t_m),$$

$$\mathfrak{e}_3^{(4m+2)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+1)} + \mathfrak{e}_2^{(4m+1)} + \mathfrak{e}_3^{(4m+1)} = (3 + 2r_m + u_m, 2s_m + v_m, 2t_m + w_m),$$

$$\mathfrak{e}_2^{(4m+3)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+2)} + \mathfrak{e}_2^{(4m+2)} + \mathfrak{e}_3^{(4m+2)} = (6 + 3r_m + u_m, 3s_m + v_m, 3t_m + w_m),$$

$$\mathfrak{e}_3^{(4m+3)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+2)} + \mathfrak{e}_3^{(4m+2)} = (4 + 2r_m + u_m, 2s_m + v_m, 2t_m + w_m),$$

$$\mathfrak{e}_2^{(4m+4)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+3)} + \mathfrak{e}_2^{(4m+3)} + \mathfrak{e}_3^{(4m+3)} = (11 + 5r_m + 2u_m, 5s_m + 2v_m, 5t_m + 2w_m),$$

$$\mathfrak{e}_3^{(4m+4)} = \mathfrak{e}_1^{(4m+3)} + \mathfrak{e}_3^{(4m+3)} = (5 + 2r_m + u_m, 2s_m + v_m, 2t_m + w_m),$$

die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned}
r_{m+1} &= 11 + 5r_m + 2u_m && \text{mit } r_0 = 0,\\
u_{m+1} &= 5 + 2r_m + u_m && \text{mit } u_0 = 0,\\
s_{m+1} &= 5s_m + 2v_m && \text{mit } s_0 = 1,\\
v_{m+1} &= 2s_m + v_m && \text{mit } v_0 = 0,\\
t_{m+1} &= 5t_m + 2w_m && \text{mit } t_0 = 0,\\
w_{m+1} &= 2t_m + w_m && \text{mit } w_0 = 1.
\end{aligned}\right\} \qquad (23)$$

Da nun das homogene System

$$X_{m+1} = 5X_m + 2Y_m,$$
$$Y_{m+1} = 2X_m + Y_m$$

mit

$$Y_{m+2} - 6Y_{m+1} + Y_m = 0$$

und

$$\lambda' = 3 + 2\sqrt{2} = 2\vartheta' + 1,$$
$$\lambda'' = 3 - 2\sqrt{2} = 2\vartheta'' + 1$$

(wo $\vartheta' = \vartheta = 1 + \sqrt{2}$, $\vartheta'' = 1 - \sqrt{2}$) als Wurzeln der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0$, bzw. das inhomogene System

$$C = R_{m+1} - 5 R_m - 2 U_m,$$
$$D = U_{m+1} - 2 R_m - U_m$$

die Lösung

$$X_m = \tfrac{1}{8} \Sigma \lambda^m [(\lambda + 1) X_0 + (\lambda - 3) Y_0],$$
$$Y_m = \tfrac{1}{8} \Sigma \lambda^m [(\lambda - 3) X_0 + (-\lambda + 7) Y_0]$$

bzw. (wenn man X_0, Y_0 durch R_0, U_0 ersetzt)

$$R_m = X_m + \tfrac{1}{16} \Sigma (\lambda^m - 1) [(\lambda - 3) C + (-\lambda + 7) D],$$
$$U_m = Y_m + \tfrac{1}{16} \Sigma (\lambda^m - 1) [(-\lambda + 7) C + (3\lambda - 17) D]$$

hat[22]), so erhält man als Lösungen obiger Rekursionsformeln (23)

$$r_m = \tfrac{1}{8} \Sigma (3\lambda + 1)(\lambda^m - 1), \qquad u_m = \tfrac{1}{4} \Sigma (\lambda - 2)(\lambda^m - 1),$$
$$s_m = \tfrac{1}{8} \Sigma (\lambda + 1) \lambda^m, \qquad v_m = \tfrac{1}{8} \Sigma (\lambda - 3) \lambda^m,$$
$$t_m = \tfrac{1}{8} \Sigma (\lambda - 3) \lambda^m, \qquad w_m = \tfrac{1}{8} \Sigma (-\lambda + 7) \lambda^m,$$

was wegen

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{\lambda'}\right)^m = 0, \qquad \lim_{m\to\infty} \left(\frac{\lambda''}{\lambda'}\right)^m = 0$$

auf

$$\lim_{m\to\infty} \frac{r_m}{(\lambda')^m} = \tfrac{1}{8}(3\lambda' + 1) = \tfrac{1}{4}(3\vartheta + 2) = \tfrac{1}{4}(\vartheta - 1)(\tfrac{5}{2}\vartheta + \tfrac{1}{2}),$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{s_m}{(\lambda')^m} = \tfrac{1}{8}(\lambda' + 1) = \tfrac{1}{4}(\vartheta + 1) = \tfrac{1}{4}(\vartheta - 1)\vartheta,$$

$$\lim_{m\to\infty} \frac{t_m}{(\lambda')^m} = \tfrac{1}{8}(\lambda' - 3) = \tfrac{1}{4}(\vartheta - 1),$$

---

[22]) Wie in Nr. **5** sind die Summen Σ über die beiden Wurzeln $\lambda = \lambda'$ und $\lambda = \lambda''$ zu nehmen.

$$\lim_{m\to\infty}\frac{u_m}{(\lambda')^m}=\tfrac{1}{4}(\lambda'-2)=\tfrac{1}{4}(2\vartheta-1)=\tfrac{1}{4}(-\vartheta+3)(\tfrac{5}{2}\vartheta+\tfrac{1}{2}),$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{v_m}{(\lambda')^m}=\tfrac{1}{8}(\lambda'-3)=\tfrac{1}{4}(\vartheta-1)=\tfrac{1}{4}(-\vartheta+3)\,\vartheta,$$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{w_m}{(\lambda')^m}=\tfrac{1}{8}(-\lambda'+7)=\tfrac{1}{4}(-\vartheta+3)$$

führt. Daher gilt

$$\lim_{m\to\infty}\frac{4}{\vartheta-1}\cdot\frac{1}{(2\vartheta+1)^m}\,\mathfrak{e}_2^{(4m)}=\lim_{m\to\infty}\frac{4}{-\vartheta+3}\cdot\frac{1}{(2\vartheta+1)^m}\,\mathfrak{e}_3^{(4m)}=$$
$$=(\tfrac{5}{2}\vartheta+\tfrac{1}{2},\vartheta,1)=(a_1,a_2,a_3)$$

und man findet leicht, daß gegen die Richtung $a_1:a_2:a_3$ dieses Vektors überhaupt die Richtungen aller Vektoren $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$ für $h\to\infty$ konvergieren.

7. Ganz Ähnliches, wie für das Beispiel in Nr. **6** gilt für ein

Viertes Beispiel mit $\vartheta=1+\sqrt{3}$ (positive Wurzel der Gleichung $x^2-2x-2=0$), $a_1=\vartheta^2$, $a_2=\vartheta$, $a_3=1$. Man erhält

$$\begin{aligned}
a_1' &= \vartheta+2 > a_2'=\vartheta-1 > a_3'=1,\\
a_1'' &= 3 > a_3''=1 > a_2''=\vartheta-2,\\
a_1''' &= 2 > a_2'''=\vartheta-2 > a_3'''=-\vartheta+3,
\end{aligned}$$

wobei

$$a_1'''=(3-\vartheta)\,a_1,\quad a_2'''=(3-\vartheta)\,a_2,\quad a_3'''=(3-\vartheta)\,a_3$$

ist, der Algorithmus somit periodisch ist. Dabei gilt

$$\mathfrak{e}_1^{(h+1)}=\mathfrak{e}_1^{(h)},\quad \mathfrak{e}_2^{(h+1)}=\mathfrak{e}_1^{(h)}+\mathfrak{e}_2^{(h)},\quad \mathfrak{e}_3^{(h+1}=\mathfrak{e}_1^{(h)}+\mathfrak{e}_2^{(h)}+\mathfrak{e}_3^{(h)},$$

bzw.

$$\mathfrak{e}_1^{(h+1)}=\mathfrak{e}_1^{(h)},\quad \mathfrak{e}_2^{(h+1)}=\mathfrak{e}_1^{(h)}+\mathfrak{e}_2^{(h)}+\mathfrak{e}_3^{(h)},\quad \mathfrak{e}_3^{(h+1)}=\mathfrak{e}_1^{(h)}+\mathfrak{e}_3^{(h}$$

für $h=3\,m$ und $3\,m+1$, bzw. $h=3\,m+2$, woraus man

$$\mathfrak{e}_1^{(3m+3)} = \mathfrak{e}_1^{(3m)},$$
$$\mathfrak{e}_2^{(3m+3)} = 6\,\mathfrak{e}_1^{(3m)} + 3\,\mathfrak{e}_2^{(3m)} + \mathfrak{e}_3^{(3m)},$$
$$\mathfrak{e}_3^{(3m+3)} = 4\,\mathfrak{e}_1^{(3m)} + 2\,\mathfrak{e}_2^{(3m)} + \mathfrak{e}_3^{(3m)}$$

erschließt und nun nach dem Muster von Nr. **6** fortfährt[23]).

8. Nach den in Nr. **4–7** mitgeteilten Beispielen 3-gliedriger Algorithmen sollen einige 4-gliedrige folgen. Ein

Fünftes Beispiel, in welchem ϑ die zwischen 1 und 2 gelegene positive Wurzel der Gleichung $x^4 - x^3 - 1 = 0$ und $a_1 = \vartheta^3$, $a_2 = \vartheta^2$, $a_3 = \vartheta$, $a_4 = 1$ ist, sei nicht weiter ausgeführt, da es (wie übrigens schon das erste Beispiel in Nr. **4**) ein Sonderfall des n-gliedrigen Algorithmus im Beispiel der Nr. **13** ist.

9. Sechstes Beispiel. Sei $\vartheta = 2{,}6787\ldots$ die positive Wurzel der Gleichung $x^4 - 3x^3 + x^2 - 1 = 0$. Für $a_1 = \vartheta^3 - 2\vartheta^2$, $a_2 = \vartheta^2 - \vartheta$, $a_3 = \vartheta$, $a_4 = 1$ erhält man

[23]) Es erweist sich als nötig, in dieser und den folgenden Nummern **8**, **9**, **10**, **12** auf die Wiedergabe mancher Einzelheiten zu verzichten. Als ich diese noch während des Krieges zu Beginn des Jahre 1945 vorgelegte Note, deren Druck damals nicht mehr möglich war, nun nach über zwei Jahren zwecks Ausarbeitung gewisser Einzelheiten vornahm, war ich in der Vorstellung befangen, daß diese Ausarbeitung in kurzer Zeit durchführbar sein werde. Das hat sich als eine Illusion herausgestellt. Wenn in den auf 1935 folgenden Jahren Kräfte tätig waren, den wissenschaftlichen Charakter der Akademie zu zerstören, unterstützt von Personen, die sich an ihre Spitze gedrängt hatten, und wenn es dazumal lange schwere Kämpfe auszufechten galt, so ist die Bayerische Akademie der Wissenschaften jetzt, zwei Jahre nach Kriegsende und etwa dreiviertel Jahre nach ihrer Wiedereröffnung noch immer nicht in geordneter Lage bezüglich der notwendigen Voraussetzungen für ihre Tätigkeit. Fernab von der Welt der Wissenschaft entstandene Vorstellungen und Tendenzen wirken sich seit Jahr und Tag hemmend aus auf die eigentlichen Aufgaben, zu der die Gelehrten berufen sind. Und wer als Funktionär in wissenschaftlichen Körperschaften tätig ist, wird dadurch unausgesetzt von wissenschaftlicher Arbeit abgehalten. Das mag man mit mildem Lächeln hinnehmen, wenn es sich um anspruchslosere Untersuchungen handelt. Tief betrüblich aber ist es, wenn man sieht, wie jüngere und stärkere Persönlichkeiten in ihrer Forschertätigkeit schwer gehemmt werden. Es ist nicht abzusehen, wann sich diese, mehr auf gewisse Unzulänglichkeiten als auf die allgemeine Not zurückzuführenden Zustände ändern werden. [Jedenfalls geben manche Erscheinungen im ablaufenden Jahr 1947 weiterhin zu schweren Sorgen Anlaß. (Zusatz bei der Korrektur.)]

$$\begin{aligned}
a_1' &= a_1 - a_2 = \vartheta^3 - 3\,\vartheta^2 + \vartheta = \frac{1}{\vartheta},\\
a_2' &= a_2 - a_3 = \vartheta^2 - 2\,\vartheta,\\
a_3' &= a_3 - a_4 = \vartheta - 1,\\
a_4' &= a_4 = 1
\end{aligned}$$

und daher

$$a_1' : a_2' : a_3' : a_4' = a_4 : a_1 : a_2 : a_3.$$

Der Algorithmus verläuft also periodisch. Man kann feststellen, daß die bei den fortgesetzten Koordinatentransformationen auftretenden Grundvektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}$, $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$, $\mathfrak{e}_4^{(h)}$ mit wachsendem h sämtlich gegen die Richtung des Vektors (a_1, a_2, a_3, a_4) konvergieren.

In dieser Hinsicht sei unter Verzicht auf nähere Ausführungen (siehe Anm. 23) nur ausgeführt: Wenn man für die Vektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(4\,m)}$ $(\nu = 1, 2, 3, 4)$ der Reihe nach $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{y}_m$, $\mathfrak{z}_m$, $\mathfrak{u}_m$ schreibt, so erhält man für die $\mathfrak{e}_\nu^{(4\,m+1)}$, bzw. $\mathfrak{e}_\nu^{(4\,m+2)}$, bzw. $\mathfrak{e}_\nu^{(4\,m+3)}$, bzw. schließlich $\mathfrak{e}_\nu^{(4\,m+4)}$ der Reihe nach

$$\mathfrak{x}_m,\ \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m,\quad \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m,\quad \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m,$$

bzw.

$$4\,\mathfrak{x}_m + 3\,\mathfrak{y}_m + 2\,\mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m,\quad \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m,\quad 2\,\mathfrak{x}_m + 2\,\mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m,$$
$$3\,\mathfrak{x}_m + 3\,\mathfrak{y}_m + 2\,\mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m,$$

bzw.

$$9\,\mathfrak{x}_m + 8\,\mathfrak{y}_m + 5\,\mathfrak{z}_m + 2\,\mathfrak{u}_m,\quad 10\,\mathfrak{x}_m + 9\,\mathfrak{y}_m + 5\,\mathfrak{z}_m + 2\,\mathfrak{u}_m,$$
$$2\,\mathfrak{x}_m + 2\,\mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m,\quad 5\,\mathfrak{x}_m + 5\,\mathfrak{y}_m + 3\,\mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m,$$

bzw. schließlich

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{x}_{m+1} &= 14\,\mathfrak{x}_m + 13\,\mathfrak{y}_m + 8\,\mathfrak{z}_m + 3\,\mathfrak{u}_m,\\
\mathfrak{y}_{m+1} &= 24\,\mathfrak{x}_m + 22\,\mathfrak{y}_m + 13\,\mathfrak{z}_m + 5\,\mathfrak{u}_m,\\
\mathfrak{z}_{m+1} &= 26\,\mathfrak{x}_m + 24\,\mathfrak{y}_m + 14\,\mathfrak{z}_m + 5\,\mathfrak{u}_m,\\
\mathfrak{u}_{m+1} &= 5\,\mathfrak{x}_m + 5\,\mathfrak{y}_m + 3\,\mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m
\end{aligned}\right\} \qquad (24)$$

Bezeichnen wir also mit A die Matrix der Koeffizienten auf der rechten Seite von (24), mit E die Einheitsmatrix, so ist die charakteristische Gleichung von A durch

$$0 = \varphi(\lambda) = 1 - 6\lambda - 25\lambda^2 - 51\lambda^3 + \lambda^4 \tag{25}$$

gegeben, sodaß für die Vektoren $\mathfrak{x}_m$ (desgleichen analog für $\mathfrak{y}_m$, $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{u}_m$) die Rekursion

$$0 = \mathfrak{x}_m - 6\mathfrak{x}_{m+1} - 25\mathfrak{x}_{m+2} - 51\mathfrak{x}_{m+3} + \mathfrak{x}_{m+4} \tag{26}$$

gilt[24]). Sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ die Wurzeln von (25), so kann man für $\mathfrak{x}_m$, bzw. analog für $\mathfrak{y}_m, \mathfrak{z}_m, \mathfrak{u}_m$ den Ansatz

---

[24]) Wenn man mit x_{m1h} $(h = 1, \ldots, 4)$ die Koordinaten von $\mathfrak{x}_m$ und analog mit $x_{m2h}, x_{m3h}, x_{m4h}$ jene von $\mathfrak{y}_m, \mathfrak{z}_m, \mathfrak{u}_m$ bezeichnet, dann hat man für alle i, h

$$0 = x_{mih} - 6x_{m+1,ih} - 25x_{m+2,ih} - 51x_{m+3,ih} + x_{m+4,ih}.$$

Ist nämlich $A = (a_{ik})$, $E = (\delta_{ik})$, wo die a_{ik} $(i, k = 1, \ldots, n)$ von m unabhängig sind,

$$|A - \lambda E| = \varphi(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu \lambda^\nu$$

und gilt

$$f_i(m+1) = \sum_k a_{ik} f_k(m), \tag{27}$$

dann gilt für jedes $i = 1, \ldots, n$

$$0 = \sum_{\nu=1}^{n} b_\nu f_i(m+\nu). \tag{28}$$

Liegt, wie im Text, für ein System von Vektoren $\mathfrak{x}_{mi} = (x_{mi1}, \ldots, x_{min})$ die Rekursion $\mathfrak{x}_{m+1,i} = \sum_k a_{ik}\mathfrak{x}_{mk}$ $(i = 1, \ldots, n)$ vor, so braucht man in (27) nur $f_i(m) = x_{mih}$ zu setzen, um $0 = \Sigma b_\nu x_{m+\nu,ih}$ und damit $0 = \Sigma b_\nu \mathfrak{x}_{m+\nu,i}$ zu erhalten. Analoges gilt für Systeme linearer homogener Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten. Es mag also F_m [bzw. O] eine aus einer einzigen Vertikalreihe bestehende Matrix bedeuten, deren Elemente die $f_i(m)$ oder aber die Ableitungen $y_i^{(m)}(x)$ von n Funktionen $y_i(x)$ [bzw. 0] sind; aus $F_{m+1} = A F_m$ $(m \geqq 0)$ folgt dann, da nach dem in Anm. 11 zitierten Satz $\Sigma b_\nu A^\nu$ die Null-Matrix ist, $\Sigma b_\nu F_{m+\nu} = (\Sigma b_\nu A^\nu) F = O$, also (28) oder analog eine Differentialgleichung n-ter Ordnung für jede einzelne Funktion $y_i(x)$.

$$\mathfrak{x}_m = \Sigma\, \mathfrak{c}_{1\nu}\, \lambda_\nu^m$$

machen, mit geeigneten Vektoren $\mathfrak{c}_{1\nu}$, bzw. $\mathfrak{c}_{2\nu}$, $\mathfrak{c}_{3\nu}$, $\mathfrak{c}_{4\nu}$, die insbesondere (für $m = 0$) der Bedingung

$$\Sigma\, \mathfrak{c}_{1\nu} = \mathfrak{x}_0 = \mathfrak{e}_1, \text{ bzw. } \Sigma\, \mathfrak{c}_{2\nu} = \mathfrak{y}_0 = \mathfrak{e}_2 \text{ usw.}$$

sowie jenen Bedingungen zu genügen haben, die sich aus (24) für $m = 0$ ergeben. Bei Aufsuchung der Grenzrichtung unserer Vektoren für $m \to \infty$ ist (analog wie in Nr. **5**) die absolut-größte der Wurzeln λ_ν ausschlaggebend, die durch $\lambda = 51{,}48780_7 \ldots = 1 - \vartheta^2 + 3\,\vartheta^3$ gegeben ist. Wegen Zugehörigkeit von λ zum Körper aus ϑ vgl. u. a. auch Nr. **4.**

10. Siebentes Beispiel. Wie im dreigliedrigen Beispiel der Nr. **4** bedeute $\vartheta = 1{,}46557\ldots$ die positive Wurzel der Gleichung $x^3 - x^2 - 1 = 0$. Der viergliedrige mit den Zahlen $a_1 = \frac{1}{3}(4\,\vartheta^2 + \vartheta + 2)$, $a_2 = \vartheta^2$, $a_3 = \vartheta$, $a_4 = 1$ gebildete Poincarésche Algorithmus fällt dann periodisch aus, wie aus $a_1' = \frac{1}{3}(\vartheta^2 + \vartheta + 2)$, $a_2' = \vartheta^2 - \vartheta$, $a_3' = \vartheta - 1$, $a_4' = 1$ und

$$a_1' : a_2' : a_3' : a_4' = a_1 : a_3 : a_4 : a_2$$

hervorgeht. Die Untersuchung des Verhaltens der Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}$, $\mathfrak{e}_2^{(h)}$, $\mathfrak{e}_3^{(h)}$, $\mathfrak{e}_4^{(h)}$ erinnert an die in Nr. **5**, **6**, **7** behandelten Fälle (wobei noch auf Anm. 23 verwiesen werde).

11. Achtes Beispiel. Wie in Nr. **5** sei $\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. Nimmt man $a_1 = 3 + 5\,\vartheta = \frac{11}{2} + \frac{5}{2}\sqrt{5}$, $a_2 = 1 + 2\,\vartheta = 2 + \sqrt{5}$, $a_3 = \vartheta$, $a_4 = 1$, so erhält man

$$a_1' = 2 + 3\,\vartheta,\quad a_2' = 1 + \vartheta,\quad a_3' = -1 + \vartheta,\quad a_4' = 1$$

mit

$$a_1' : a_2' : a_3' : a_4' = a_1 : a_2 : a_4 : a_3.$$

Daraus ist die Periodizität des Algorithmus ersichtlich, wobei bezüglich der Richtungen der Vektoren $\mathfrak{e}_\mu^{(h)}$ für $h \to \infty$ Verhältnisse vorliegen, die eine gewisse Analogie aufweisen zu denen in den Beispielen Nr. **5**, **6**, **7**, **10**.

Setzt man, zwecks Ausführung im Einzelnen (vgl. Anm. 19)

$$\mathfrak{e}_1^{(2m)} = \mathfrak{x}_m, \quad \mathfrak{e}_2^{(2m)} = \mathfrak{y}_m, \quad \mathfrak{e}_3^{(2m)} = \mathfrak{z}_m, \quad \mathfrak{e}_4^{(2m)} = \mathfrak{u}_m$$

so hat man

$$\mathfrak{e}_1^{(2m+1)} = \mathfrak{x}_m, \quad \mathfrak{e}_2^{(2m+1)} = \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m, \quad \mathfrak{e}_3^{(2m+1)} = \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m,$$
$$\mathfrak{e}_4^{(2m+1)} = \mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m$$

und

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{x}_{m+1} &= \mathfrak{x}_m, \\ \mathfrak{y}_{m+1} &= 2\,\mathfrak{x}_m + \mathfrak{y}_m, \\ \mathfrak{z}_{m+1} &= 4\,\mathfrak{x}_m + 3\,\mathfrak{y}_m + 2\,\mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m, \\ \mathfrak{u}_{m+1} &= 3\,\mathfrak{x}_m + 2\,\mathfrak{y}_m + \mathfrak{z}_m + \mathfrak{u}_m. \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Daraus ergibt sich zunächst

$$\mathfrak{x}_m = (1, 0, 0, 0), \quad \mathfrak{y}_m = (2\,m, 1, 0, 0), \tag{30}$$

sodaß $\mathfrak{x}_m$, $\mathfrak{y}_m$ ganz in der Ebene der 1-sten und 2-ten Koordinate liegen.

Versteht man also unter $\mathfrak{v}_{1m}$ bzw. $\mathfrak{v}_{2m}$ die Projektion des Vektors $\mathfrak{z}_m$ bzw. $\mathfrak{u}_m$ in die Ebene der 3-ten und 4-ten Koordinate, so ist

$$\mathfrak{v}_{1,\,0} = (1, 0), \quad \mathfrak{v}_{2,\,0} = (0, 1) \tag{31}$$

und

$$\begin{aligned} \mathfrak{v}_{1,\,m+1} &= 2\,\mathfrak{v}_{1,\,m} + \mathfrak{v}_{2,\,m}, \\ \mathfrak{v}_{2,\,m+1} &= \mathfrak{v}_{1,\,m} + \mathfrak{v}_{2,\,m} \end{aligned} \tag{32}$$

mit $A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2, & 1 \\ 1, & 1 \end{pmatrix}$ als Matrix der Koeffizienten dieser Rekursion. Die charakteristische Gleichung

$$0 = |\,A - \lambda E\,| = 1 - 3\,\lambda + \lambda^2$$

hat die Wurzeln $\lambda_1 = 1 + \vartheta_1$, $\lambda_2 = 1 + \vartheta_2$, wenn wir mit $\vartheta_1 = \vartheta$, $\vartheta_2 = 1 - \vartheta$ die beiden Wurzeln der Gleichung für ϑ bezeichnen, und es genügt (vgl. Nr. **9**, Anm. 24) jeder der Vektoren $\mathfrak{v}_{\mu, m}$ der Gleichung

$$0 = \mathfrak{v}_{\mu, m} - 3\,\mathfrak{v}_{\mu, m+1} + \mathfrak{v}_{\mu, m+2}.$$

Werden die Zahlen $c_{k\nu}$ $(k, \nu = 1, 2)$ so bestimmt, daß die Gleichungen

$$0 = \sum_k (a_{ik} - \delta_{ik}\lambda_\nu)\, c_{k\nu} \quad (i = 1, 2) \tag{33}$$

gelten (wodurch die Verhältnisse $c_{1\nu} : c_{2\nu}$ festgelegt, also Proportionalitätsfaktoren frei zu wählen sind), dann erhält man als allgemeinste Lösung von (32)

$$\mathfrak{v}_{i, m} = \sum_\nu \mathfrak{r}_\nu\, c_{i\nu}\, \lambda_\nu^m \tag{34}$$

mit $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ als frei wählbaren Vektoren, die sich aus den „Anfangswerten" für $m = 0$ gemäß

$$c_{i1}\,\mathfrak{r}_1 + c_{i2}\,\mathfrak{r}_2 = \mathfrak{v}_{i0} \quad (i = 1, 2) \tag{35}$$

ergeben. In unserem Falle findet man bei entsprechender Wahl der Proportionalitätsfaktoren aus (33), (35) und (31)

$$\begin{aligned} c_{1\nu} &= \lambda_\nu - 1, \qquad c_{2\nu} = 1; \\ \mathfrak{r}_\nu &= c_{2\nu}\,\mathfrak{r}_\nu = \tfrac{1}{5}(2\lambda_\nu - 3, 4 - \lambda_\nu), \\ c_{1\nu}\,\mathfrak{r}_\nu &= \tfrac{1}{5}(\lambda_\nu + 1, 2\lambda_\nu - 3). \end{aligned}$$

Gemäß (34) hat also $\mathfrak{v}_{1m}$ bzw. $\mathfrak{v}_{2m}$ die Koordinaten

$$\sum_\nu \tfrac{1}{5}(\lambda_\nu + 1)\,\lambda_\nu^m, \qquad \sum_\nu \tfrac{1}{5}(2\lambda_\nu - 3)\,\lambda_\nu^m, \tag{36}$$

bzw.

$$\sum_\nu \tfrac{1}{5}(2\lambda_\nu - 3)\,\lambda_\nu^m, \quad \sum_\nu \tfrac{1}{5}(4 - \lambda_\nu)\,\lambda_\nu^m. \tag{37}$$

Damit ist die 3-te und 4-te Koordinate der Vektoren $\mathfrak{z}_m$, $\mathfrak{u}_m$ bestimmt.

Wenn andererseits $\mathfrak{w}_{1,m}$ bzw. $\mathfrak{w}_{2,m}$ die Projektion von $\mathfrak{z}_m$ bzw. $\mathfrak{u}_m$ in die Ebene der 1-sten und 2-ten Koordinate bedeuten, dann ergibt sich für diese Vektoren aus (29) die Rekursion

$$\begin{aligned} \mathfrak{w}_{1,m+1} &= 2\,\mathfrak{w}_{1,m} + \mathfrak{w}_{2,m} + \mathfrak{a}_{1,m}, \\ \mathfrak{w}_{2,m+1} &= \mathfrak{w}_{1,m} + \mathfrak{w}_{2,m} + \mathfrak{a}_{2,m}, \end{aligned} \tag{38}$$

wobei $\mathfrak{a}_{1,m} = (4 + 6\,m,\ 3)$ bzw. $\mathfrak{a}_{2,m} = (3 + 4\,m,\ 2)$ die Projektion von $4\,\mathfrak{x}_m + 3\,\mathfrak{y}_m$ bzw. $3\,\mathfrak{x}_m + 2\,\mathfrak{y}_m$ und

$$\mathfrak{w}_{1,0} = \mathfrak{w}_{2,0} = (0, 0) \tag{39}$$

ist. Wir haben es bei (38) mit einem inhomogenen linearen System zu tun, für welches (32) das zugehörige homogene System darstellt. Macht man dementsprechend – analog dem in Nr. **5** zur Lösung von (16) mit dem Ansatz (21) eingeschlagenen Verfahren, – den Ansatz

$$\mathfrak{w}_{i\,m} = \sum_{\nu} \mathfrak{r}_{\nu\,m}\, c_{i\,\nu}\, \lambda_\nu^m, \tag{40}$$

wo jetzt von m abhängige Vektoren $\mathfrak{r}_{\nu m}$ auftreten, anstelle der von m unabhängigen Vektoren $\mathfrak{r}_\nu$ in Formel (34), dann ergeben sich aus (38) für die Vektordifferenzen $\mathfrak{r}_{\nu,m+1} - \mathfrak{r}_{\nu,m}$ die Gleichungen

$$\sum c_{i\,\nu}\,(\mathfrak{r}_{\nu,m+1} - \mathfrak{r}_{\nu,m})\,\lambda_\nu^{m+1} = \mathfrak{a}_{i\,m}$$

nebst

$$\sum_{\nu} c_{i\,\nu}\,\mathfrak{r}_{\nu\,0} = \mathfrak{w}_{i,0}.$$

Daraus folgt zunächst, da die Determinante $|c_{i\nu}| = \lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$ ist, wegen (39)

$$\mathfrak{r}_{1,0} = \mathfrak{r}_{2,0} = (0, 0),$$

sowie, wenn wir zur Abkürzung die Vektoren

$$\mathfrak{f}_\nu = \left(\lambda_\nu - 1,\ \tfrac{1}{5}(3\lambda_\nu - 2)\right),\quad \mathfrak{t}_\nu = \left(\tfrac{2}{5}(\lambda_\nu + 1), 0\right)$$

einführen,

$$\lambda_\nu^{m+1}(\mathfrak{r}_{\nu,m+1}-\mathfrak{r}_{\nu,m}) = \frac{2\lambda_\nu-3}{5}\,\mathfrak{a}_{1,m}+\frac{4-\lambda_\nu}{5}\,\mathfrak{a}_{2,m} = (\lambda_\nu-1)\,\mathfrak{f}_\nu + m\,(\lambda_\nu-1)^2\,\mathfrak{t}_\nu$$

und

$$\mathfrak{r}_{\nu,m} = \frac{\lambda_\nu-1}{\lambda_\nu}\,\mathfrak{f}_\nu\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\lambda_\nu^k}+\left(\frac{\lambda_\nu-1}{\lambda_\nu}\right)^2\mathfrak{t}_\nu\sum_{k=0}^{m-1}\frac{k}{\lambda_\nu^{k-1}} = \mathfrak{f}_\nu\left(1-\frac{1}{\lambda_\nu^m}\right)+\mathfrak{t}_\nu\left(1-\frac{m}{\lambda_\nu^{m-1}}+\frac{m-1}{\lambda_\nu^m}\right),$$

gemäß (40) also

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{w}_{1,m} &= \sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,(\lambda_\nu-1)\,\mathfrak{f}_\nu+\sum_\nu(\lambda_\nu^m-m\lambda_\nu+m-1)\,(\lambda_\nu-1)\,\mathfrak{t}_\nu,\\ \mathfrak{w}_{2,m} &= \sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,\mathfrak{f}_\nu+\sum_\nu(\lambda_\nu^m-m\lambda_\nu+m-1)\,\mathfrak{t}_\nu. \end{aligned}\right\}\quad(41)$$

Die Koordinaten von $\mathfrak{z}_m$ bzw. $\mathfrak{u}_m$ sind also gemäß (41), (36) und (37)

$$\sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,\lambda_\nu+(\lambda_\nu^m-m\,\lambda_\nu+m-1)\,\tfrac{2}{5}\,(3\,\lambda_\nu-2),$$
$$\sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,\tfrac{1}{5}\,(4\,\lambda_\nu-1),$$
$$\sum_\nu\tfrac{1}{5}\,(\lambda_\nu+1)\,\lambda_\nu^m \text{ und } \sum_\nu\tfrac{1}{5}\,(2\,\lambda_\nu-3)\lambda_\nu^m$$

bzw.

$$\sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,(\lambda_\nu-1)+(\lambda_\nu^m-m\,\lambda_\nu+m-1)\,\tfrac{2}{5}\,(\lambda_\nu+1),$$
$$\sum_\nu(\lambda_\nu^m-1)\,\tfrac{1}{5}\,(3\,\lambda_\nu-2),$$
$$\sum_\nu\tfrac{1}{5}\,(2\,\lambda_\nu-3)\,\lambda_\nu^m \text{ und } \sum_\nu\tfrac{1}{5}\,(4-\lambda_\nu)\,\lambda_\nu^m.$$

Daraus, aus (36), (37) und aus

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^m=0,\qquad \lim_{m\to\infty}\frac{m}{\lambda_1^m}=0$$

folgt, daß die beiden Grenzwerte

$$\lim_{m\to\infty} (2\lambda_1 - 3)\lambda_1^{-m}\mathfrak{z}_m =$$
$$= (2\lambda_1 - 3)\tfrac{1}{5}(11\lambda_1 - 4, 4\lambda_1 - 1, \lambda_1 + 1, 2\lambda_1 - 3)$$

und

$$\lim_{m\to\infty} (\lambda_1 + 1)\lambda_1^{-m}\mathfrak{u}_m = (\lambda_1 + 1)\tfrac{1}{5}(7\lambda_1 - 3, 3\lambda_1 - 2, 2\lambda_1 - 3, 4 - \lambda_1)$$

beide gleich dem Vektor

$$(5\lambda_1 - 2, 2\lambda_1 - 1, \lambda_1 - 1, 1) = (5\vartheta + 3, 2\vartheta + 1, \vartheta, 1) =$$
$$= (a_1, a_2, a_3, a_4)$$

sind.

Fassen wir das zusammen mit (30), so sehen wir, daß mit wachsendem m die Richtung des Vektors $\mathfrak{y}_m$ gegen jene des festbleibenden Vektors $\mathfrak{x}_m = \mathfrak{e}_1$ konvergiert, die Richtungen der Vektoren $\mathfrak{z}_m$ und $\mathfrak{u}_m$ aber gegen die Richtung des Ausgangsvektors (a_1, a_2, a_3, a_4). Das ganz Entsprechende gilt überhaupt für $h \to \infty$ für die Vektoren $\mathfrak{e}_1^{(h)}$, $\mathfrak{e}_2^{(h)}$ bzw. $\mathfrak{e}_3^{(h)}$, $\mathfrak{e}_4^{(h)}$: Nur die beiden letzteren konvergieren gegen die Ausgangsrichtung; von den beiden ersteren konvergiert $\mathfrak{e}_2^{(h)}$ gegen die Richtung des festbleibenden Vektors $\mathfrak{e}_1^{(h)} = \mathfrak{e}_1$. Wir übergehen es, dies im Einzelnen auszuführen, zumal frühere Beispiele ganz analog verliefen.

12. Von derselben Art wie das fünfte Beispiel ist das

Neunte Beispiel. Dabei sei $\vartheta = 11{,}701366\ldots$ die größere der beiden reellen Wurzeln der Gleichung

$$x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 6x + 1 = 0$$

(die kleinere liegt zwischen 0 und 1) und es sei

$$a_1 = \vartheta^3 - 6\vartheta^2 - \vartheta,\ a_2 = 3\vartheta^2,\ a_3 = \vartheta^2 + 3\vartheta - 1,\ a_4 = 3\vartheta. \tag{42}$$

Der Poincarésche Algorithmus verläuft dann mit seinen ersten Schritten gemäß folgender Tabelle.

h	$a_1^{(h)}$	$a_2^{(h)}$	$a_3^{(h)}$	$a_4^{(h)}$	$\mathfrak{e}_1^{(h)}$	$\mathfrak{e}_2^{(h)}$	$\mathfrak{e}_3^{(h)}$	$\mathfrak{e}_4^{(h)}$
0	$a_1 \; * \; * \; *$ $\vartheta^3 - 6\vartheta^2 - \vartheta$ (1)	$* \; a_2 \; * \; *$ $3\vartheta^2$ (2)	$* \; * \; a_3 \; *$ $\vartheta^2 + 3\vartheta - 1$ (3)	$* \; * \; * \; a_4$ 3ϑ (4)	1, 0, 0, 0	0, 1, 0, 0	0, 0, 1, 0	0, 0, 0, 1
1	$a_1 - a_2 \; * \; *$ $\vartheta^3 - 9\vartheta^2 - \vartheta$ (1)	$* \; a_2 - a_3 \; *$ $2\vartheta^2 - 3\vartheta + 1$ (2)	$* \; * \; a_3 - a_4$ $\vartheta^2 - 1$ (3)	$* \; * \; * \; a_4$ 3ϑ (4)	1, 0, 0, 0	1, 1, 0, 0	1, 1, 1, 0	1, 1, 1, 1
2	$a_1 - 2a_2 + a_3 \; *$ $\vartheta^3 - 11\vartheta^2 + 2\vartheta - 1$ (1)	$* \; a_2 - 2a_3 + a_4$ $\vartheta^2 - 3\vartheta + 2$ (2)	$* \; * \; a_3 - 2a_4$ $\vartheta^2 - 3\vartheta - 1$ (3)	$* \; * \; * \; a_4$ 3ϑ (4)	1, 0, 0, 0	2, 1, 0, 0	3, 2, 1, 0	4, 3, 2, 1
3	$a_1 - 3a_2 + 3a_3 - a_4$ $\vartheta^3 - 12\vartheta^2 + 5\vartheta - 3$ (3)	$* \; a_2 - 3a_3 + 3a_4$ 3 (4)	$* \; * \; a_3 - 3a_4$ $\vartheta^2 - 6\vartheta - 1$ (1)	$* \; * \; * \; a_4$ 3ϑ (2)	1, 0, 0, 0	3, 1, 0, 0	6, 3, 1, 0	10, 6, 3, 1

Um sicher zu sein, daß wirklich

$$a_1^{(h)} > a_2^{(h)} > a_3^{(h)} > a_4^{(h)} \text{ für } 0 \leqq h \leqq 2$$

gilt, d. h. daß die Zahlen

$$a_1^{(h+1)} = a_1^{(h)} - a_2^{(h)},\ a_2^{(h+1)} = a_2^{(h)} - a_3^{(h)},$$
$$a_3^{(h+1)} = a_3^{(h)} - a_4^{(h)} \text{ alle} > 0 \tag{43}$$

sind, dazu genügt es, (43) für $h = 2$ festzustellen, da man von den a_ν''' nach rückwärts auf die a_ν'', a_ν' und a_ν schließen kann. Will man das Rechnen mit angenäherten Werten nebst Genauigkeits-Schätzungen vermeiden, so kann man, was speziell $a_1''' = g(\vartheta)$ betrifft, wenn $f(x) = x^4 - 12x^3 + 4x^2 - 6x + 1$ und $g(x) = x^3 - 12x^2 + 5x - 3$ gesetzt wird, feststellen, daß $g(x)$, $g'(x)$, $g''(x)$, $g'''(x)$ für $x = \zeta = \frac{35}{3}$ und somit für $x \geqq \zeta$ sämtlich positiv sind, während $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f''''(x)$ für $x = \zeta$ und somit für $x \geqq \zeta$ positiv, dagegen $f(\zeta) = -\frac{4361}{3^4} < 0$ ist. Für die wegen $f(12) = 505 > 0$ zwischen $\frac{35}{3}$ und 12 gelegene Nullstelle ϑ von $f(x)$ ist also $g(\vartheta) > 0$, wie behauptet[25]. Andererseits sind $3 \pm \sqrt{10}$ die Nullstellen von $g_1(x) = x^2 - 6x - 1$, sodaß $g_1(x) > 0$ für $x > 3 + \sqrt{10}$ und speziell $a_3''' = g_1(\vartheta) > 0$ ist Da auch $a_2''' = 3 > 0$ ist, so ist (43) für $h = 2$ nachgewiesen.

Aus

$$a_1'''\vartheta = a_3, \quad a_2'''\vartheta = a_4, \quad a_3'''\vartheta = a_1, \quad a_4'''\vartheta = a_2$$

erkennt man

$$a_1''' : a_2''' : a_3''' : a_4''' := a_3 : a_4 : a_1 : a_2,$$

also

$$a_1^{(6)} : a_2^{(6)} : a_3^{(6)} : a_4^{(6)} = a_1 : a_2 : a_3 : a_4$$

und damit die Periodizität des Algorithmus.

Verwenden wir die Bezeichnungen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{E}^{(h)} = K^{(h)}\,\mathfrak{E}$ analog wie in Nr. **4**, so sehen wir, daß

---

[25]) Zum gleichen Resultat führt eine approximative Berechnung der (einzigen) reellen Nullstelle η von $g(x)$. Man findet $\eta = 11{,}59095_4$ also $< \vartheta = 11{,}701\ldots$, somit $g(\vartheta) > 0$.

$$K^{(3)} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0, & 0 \\ 3, & 1, & 0, & 0 \\ 6, & 3, & 1, & 0 \\ 10, & 6, & 3, & 1 \end{pmatrix}$$

ist. Durch Vertauschung der 3-ten bzw. 4-ten Zeile mit der 1-sten bzw. 2-ten Zeile und der analogen Vertauschung der Kolonnen erhält man daraus die Matrix

$$J^{(3)} = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 6, & 3 \\ 3, & 1, & 10, & 6 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 3, & 1 \end{pmatrix},$$

die gemäß $\mathfrak{C}^{(6)} = J^{(3)}\,\mathfrak{C}^{(3)}$ den Übergang von den Vektoren $\mathfrak{c}_\nu^{(3)}$ zu den Vektoren $\mathfrak{c}_\nu^{(6)}$ vermittelt. Daraus erhält man

$$K^{(6)} = J^{(3)} K^{(3)} = \begin{pmatrix} 67, & 36, & 15, & 3 \\ 126, & 67, & 28, & 6 \\ 6, & 3, & 1, & 0 \\ 28, & 15, & 6, & 1 \end{pmatrix},$$

wobei der Periodizität gemäß $K^{(6m)} = (K^{(6)})^m$ ist. Die Rechnung kann dann wie in Nr. **4** so weitergeführt werden, daß man die absolut-größte Wurzel λ_1 der charakteristischen Gleichung $|K^{(6)} - \lambda E| = 0$ nimmt und $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_1^{-m}\,(K^{(6)})_m$ ermittelt. Das führt wie l. c. zur Bestimmung der Grenzrichtungen der Vektoren $\mathfrak{c}_\nu^{(h)}$ für $h \to \infty$. Zum gleichen Ziel kann man gelangen, indem man wie in Nr. **5** die durch $\mathfrak{C}^{(6m+6)} = K^{(6)}\,\mathfrak{C}^{(6m)}$ gegebene Rekursion zur Berechnung der Vektoren in $\mathfrak{C}^{(6m)}$ benützt. Auf die Ausführung müssen wir verzichten (vgl. Anm. 23).

13. Ein letztes Beispiel ist n-gliedrig und umfaßt[26]) für $n = 3$ und 4 die Beispiele der Nummern **4**, **8**.

---

[26]) Im Falle $n = 2$ handelt es sich einfach um die Kettenbruchentwicklung der Zahl $\vartheta = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$.

Zehntes Beispiel. Für jedes $n \geqq 2$ hat die Gleichung

$$x^n - x^{n-1} - 1 = 0 \tag{44}$$

genau eine positive Wurzel ϑ, wobei $1 < \vartheta < 2$ ist. Setzt man

$$a_1 = \vartheta^{n-1}, \quad a_2 = \vartheta^{n-2}, \ldots, a_{n-1} = \vartheta, \; a_n = 1,$$

so ergibt sich für $1 \leqq \nu < n$

$$a'_\nu = a_\nu - a_{\nu+1} = \vartheta^{n-\nu} - \vartheta^{n-\nu-1} = \frac{1}{\vartheta^\nu}$$

nebst $a'_n = a_n = 1$, woraus

$$a'_1 : a'_2 : \ldots : a'_{n-1} : a'_n = \vartheta^{n-2} : \vartheta^{n-3} : \ldots : 1 : \vartheta^{n-1} =$$
$$= a_2 : a_3 : \ldots : a_n : a_1$$

folgt und damit die Periodizität des Algorithmus ersichtlich wird. Die Grundvektoren $\mathfrak{c}_\nu^{(h)}$ $(\nu = 1, \ldots, n)$ konvergieren dabei mit wachsendem h gegen die Richtung des Vektors $\mathfrak{a} = (a_1, \ldots, a_n)$.

Im Einzelnen gilt Folgendes[27]). Wird $f(x) = x^n - x^{n-1} - 1$ gesetzt, so ergibt die Diskussion der Kurve $y = f(x)$ unter Benützung von $f(1) < 0$, $f(2) > 0$, $(-1)^n f(-1) > 0$ sowie des Vorzeichens von $f'(x)$ für $x < 0$, für $0 < x < \dfrac{n-1}{n}$ und für $x > \dfrac{n-1}{n}$, daß die Gleichung (44) außer der einen positiven Wurzel $\vartheta = \vartheta_1$ bei ungeradem n keine weitere reelle Wurzel hat, bei geradem n aber nur noch eine negative Wurzel ϑ_2 zwischen -1 und 0, für die also $|\vartheta_2| < \vartheta$ gilt. Dabei hat allemal die Gleichung (44) lauter einfache Wurzeln $\vartheta = \vartheta_1, \vartheta_2, \ldots, \vartheta_n$ und unter ihnen ist die reelle positive Wurzel ϑ diejenige vom größten absoluten Betrag. Denn für eine Wurzel x von (44) muß

$$|x^n - x^{n-1}| = 1$$

sein, während für jede Zahl $x \neq \vartheta$ mit $|x| \geqq \vartheta$ (> 1) notwendig

---

[27]) Bezüglich dieser näheren Ausführungen vgl. Anm. 19.

$|x-1| > \vartheta - 1$, also $|x^n - x^{n-1}| = |x|^{n-1}.\ |x-1| >$ $> \vartheta^{n-1}(\vartheta - 1) = 1$ ist. Es ist also

$$\left|\frac{\vartheta_\nu}{\vartheta_1}\right| < 1 \text{ für } 2 \leqq \nu \leqq n. \tag{45}$$

Definiert man ferner die ganzen Zahlen X_m für $m \geqq 0$ durch die Rekursionsformel

$$X_m = X_{m-1} + X_{m-n} \quad (m \geqq n) \tag{46}$$

nebst den Anfangswerten

$$X_0 = 1,\ X_1 = \ldots = X_{n-1} = 0, \tag{47}$$

wobei man übrigens durch die Festsetzung

$$X_{-(n-1)} = -1,\ X_{-(n-2)} = \ldots = X_{-1} = 0,\ X_0 = 1$$

die Rekursion noch weiter zurückverlegen und (46) für $m \geqq 1$ postulieren kann, bezeichnet man ferner mit $\mathfrak{x}_m$ $(m \geqq 1)$ den Vektor

$$\mathfrak{x}_m = (X_m, X_{m-1}, \ldots, X_{m-n+1}),$$

dann erkennt man leicht, daß der betrachtete Algorithmus für die Vektoren $\mathfrak{c}_\mu^{(h)}$ folgendes Bild gibt

h	$\mathfrak{c}_1^{(h)}$,	$\mathfrak{c}_2^{(h)}$,	……………………,	$\mathfrak{c}_{n-1}^{(h)}$	$\mathfrak{c}_n^{(h)}$
0	$\mathfrak{x}_n$,	$\mathfrak{x}_1$,	$\mathfrak{x}_2$, ………………,	$\mathfrak{x}_{n-2}$,	$\mathfrak{x}_{n-1}$
1	$\mathfrak{x}_n$,	$\mathfrak{x}_{n+1}$,	……………………,	$\mathfrak{x}_{2n-2}$,	$\mathfrak{x}_{2n-1}$
2	$\mathfrak{x}_{2n}$,	$\mathfrak{x}_{2n+1}$,	……………………,	$\mathfrak{x}_{3n-2}$,	$\mathfrak{x}_{2n-1}$
3	$\mathfrak{x}_{3n}$	$\mathfrak{x}_{3n+1}$,	……………, $\mathfrak{x}_{4n-3}$,	$\mathfrak{x}_{3n-2}$,	$\mathfrak{x}_{3n-1}$
…..	………	………	………	………	………
$n-1$	$\mathfrak{x}_{nn-n}$,	$\mathfrak{x}_{nn-n+1}$,	$\mathfrak{x}_{nn-2n+2}$, $\mathfrak{x}_{nn-2n+3}$,	………,	$\mathfrak{x}_{nn+n-1}$
n	$\mathfrak{x}_{nn}$,	$\mathfrak{x}_{nn-n+1}$,	$\mathfrak{x}_{nn-n+2}$, ………………	………,	$\mathfrak{x}_{nn-1}$
$n+1$	$\mathfrak{x}_{nn}$,	$\mathfrak{x}_{nn+1}$,	……………………	………,	$\mathfrak{x}_{nn+n-1}$
$n+2$	$\mathfrak{x}_{nn+n}$,	$\mathfrak{x}_{nn+n+1}$,	……………………,	$\mathfrak{x}_{nn+2n-2}$,	$\mathfrak{x}_{nn+n-1}$

Allgemein ist demnach, wenn $k = \left[\frac{h-1}{n}\right]$, $h = kn + 1 + r$ mit $0 \leqq r < n$ gesetzt wird,

$$\mathfrak{e}_{\mu}^{(h)} = \mathfrak{x}_{nh-nk+\mu-1} \text{ für } 1 \leqq \mu \leqq n-r,$$
$$\mathfrak{e}_{\mu}^{(h)} = \mathfrak{x}_{nh-nk-n+\mu-1} \text{ für } n-r < \mu \leqq n,$$

wobei sich der Algorithmus wegen

$$a_{n-r}^{(h)} > \ldots > a_n^{(h)} > a_1^{(h)} > a_2^{(h)} > \ldots > a_{n-r-1}^{(h)}$$

(bzw. $a_1^{(h)} > \ldots > a_n^{(h)}$ im Falle $r = n - 1$) den folgenden Formeln gemäß fortsetzt:

$$\mathfrak{e}_{n-r}^{(h+1)} = \mathfrak{e}_{n-r}^{(h)},$$

ferner für $n - r \leqq \nu \leqq n - 1$, bzw. falls $r \leqq n - 3$ ist, für $1 \leqq \nu \leqq n - r - 2$

$$\mathfrak{e}_{\nu+1}^{(h+1)} = \sum_{\alpha=n-r}^{\nu+1} \mathfrak{e}_{\alpha}^{(h)} = \mathfrak{e}_{\nu}^{(h+1)} + \mathfrak{e}_{\nu+1}^{(h)}$$

bzw.

$$\mathfrak{e}_{\nu+1}^{(h+1)} = \sum_{\alpha=n-r}^{n} \mathfrak{e}_{\alpha}^{(h)} + \sum_{\alpha=1}^{\nu+1} \mathfrak{e}_{\alpha}^{(h)} = \mathfrak{e}_{\nu}^{(h+1)} + \mathfrak{e}_{\nu+1}^{(h)}$$

und, falls $r \leqq n - 2$ ist,

$$\mathfrak{e}_{1}^{(h+1)} = \sum_{\alpha=n-r}^{n} \mathfrak{e}_{\alpha}^{(h)} + \mathfrak{e}_{1}^{(h)} = \mathfrak{e}_{n}^{(h+1)} + \mathfrak{e}_{1}^{(h)}.$$

Macht man zur Wertbestimmung der Zahlen X_m den speziellen Ansatz $X_m = x^m$, so folgt aus (46), daß x eine Wurzel ϑ_ν von (44) sein muß. Die allgemeine Lösung von (46) ist also

$$X_m = u_1 \vartheta_1^m + \ldots + u_n \vartheta_n^m \tag{48}$$

mit konstanten Koeffizienten $u_1, \ldots, u_n$, die sich aus den Anfangswerten $X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}$ durch Auflösung des Systems der Gleichungen (48) für $m = 0, 1, \ldots, n - 1$ ergeben. Das liefert

$$u_\nu f_\nu(\vartheta_\nu) = \sum_{\alpha=1}^{n} (-1)^{n-\alpha} s_{\nu, n-\alpha} X_{\alpha-1}, \tag{49}$$
$$(\nu = 1, \ldots, n)$$

wenn

$$f_\nu(x) = \frac{f(x)}{x - \vartheta_\nu} = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^\alpha s_{\nu\alpha} x^{n-\alpha-1}$$

gesetzt wird[28]), also $s_{\nu\alpha}$ die symmetrische Grundfunktion vom Grad α derjenigen $n-1$ Größen bedeutet, die aus allen $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_n$ mit Ausnahme von ϑ_ν bestehen ($s_{\nu 0} = 1$), sodaß für jedes $\nu = 1, \ldots, n$ die $n-1$ Gleichungen

$$0 = f_\nu(\vartheta_\mu) = \sum_{\alpha=0}^{n-1} (-1)^\alpha s_{\nu\alpha} \vartheta_\mu^{n-\alpha-1} \qquad (50)$$

$$(1 \leqq \mu \leqq n, \quad \mu \neq \nu)$$

bestehen. Für die speziellen Anfangswerte (47) erhalten wir also

$$u_\nu = (-1)^{n-1} \frac{\vartheta_1 \ldots \vartheta_n}{\vartheta_\nu f_\nu(\vartheta_\nu)}$$

und

$$X_m = (-1)^{n-1} \vartheta_1 \ldots \vartheta_n \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\vartheta_\nu^{m-1}}{f_\nu(\vartheta_\nu)}.$$

Gemäß (45) aber gilt

---

[28]) Sind $s_0 = 1, s_1, \ldots, s_n$ die symmetrischen Grundfunktionen von $x_1, \ldots, x_n$ und faßt man

$$0 = f(x_\mu) = \sum_{\alpha=0}^{n} (-1)^\alpha s_\alpha x_\mu^{n-\alpha} \qquad (\mu = 1, \ldots, n)$$

als linear-homogenes System von n Gleichungen für die $n+1$ Unbekannten s_α auf, so sieht man, daß diese den $n+1$ Determinanten proportional sind, die man aus der Matrix $(x_\mu^{n-\beta})_{\mu=1,\ldots,n;\,\beta=0,1,\ldots,n}$ durch Streichen je einer Kolonne erhält; diese Determinanten, deren erste gleich dem Differenzenprodukt Δ der x_ν ist, erweisen sich also gleich den Größen $\Delta\, s_\alpha$. Ebensolche Determinanten (für $n-1$ statt n und für $n-1$ der Größen ϑ_ν anstelle der x_ν) treten aber bei Anwendung der Cramerschen Regel zur Auflösung der Gleichungen (48) für $m = 0, 1, \ldots, n-1$ auf. Man braucht aber nur jede dieser Gleichungen mit $(-1)^{n-m-1} s_{\nu, n-m-1}$ zu multiplizieren, dann zu addieren und (50) zu beachten, um direkt (49) zu erhalten.

$$\lim_{m\to\infty} \frac{X_m}{u_1 \vartheta_1^m} = 1$$

und somit (wenn wir für ϑ_1 wieder ϑ schreiben)

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{u_1 \vartheta^{m-n+1}} \mathfrak{x}_m = (\vartheta^{n-1}, \vartheta^{n-2}, \ldots, \vartheta, 1) = \mathfrak{a}\,.$$

14. Aus den Beispielen der Nummern **4** bis **13** gewinnt man die Bestätigung der Sätze 2a, 2b und 2c aus Nr. **2**. Was Satz 2a anlangt, so zeigen die Beispiele in Nr. **5**, **6**, **7**, **10**, **11** Fälle ohne Reduktion, während man einen Fall mit Reduktion l. c.[3]), § 7, Nr. **25** (übrigens auch Nr. **24**) findet. Was Satz 2b betrifft, so haben wir in den Beispielen der Nr. **4**, **8** und dem sie umfassenden zehnten Beispiel (Nr. **13**), sowie in Nr. **9** und **12** Periodizität des Poincaréschen Algorithmus bei n unabhängigen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers vom Grad n, dagegen in den Beispielen Nr. **5**, **6**, **7**, **10**, **11** zwar ebenfalls die n-gliedrige Periodizität, jedoch bei Zugehörigkeit der n Zahlen zu einem Zahlkörper von einem Grad $< n$. Was schließlich Satz 2c betrifft, so stehen den Fällen der Nrn. **4**, **8**, **9**, **13**, wo alle Vektoren $\mathfrak{e}_\nu^{(h)}$ ($\nu = 1, \ldots, n$) mit wachsendem h gegen die Ausgangsrichtung konvergieren, in den Beispielen der Nrn. **5**, **6**, **7**, **11** Fälle gegenüber, wo dies nicht zutrifft. Die hieran sich anschließenden Fragen, unter welchen Bedingungen jeweils der eine oder andere Fall vorliegt, seien hier nur angeführt. Auch sonst sind manche Fragen offen gelassen. Andererseits weisen die Beispiele selbst deutlich auf gewisse Zusammenhänge hin.