Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

III. „Gleichmäßige“ Abbildungen.

Von Frank Löbell in München.

Vorgelegt von Herrn G. Faber am 7. Februar 1947.

In einer kürzlich erschienenen Arbeit[1] wurde der Begriff des Rißmaßstabes n einer Flächenabbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ für eine Tangentenrichtung eingeführt.

Im folgenden soll der ausgezeichnete Fall näher untersucht werden, daß in einem Punkte der Fläche $\mathfrak{x}$ der Wert von n unabhängig von der Richtung ist, der er zugehört; wir wollen die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ dann an der betrachteten Stelle gleichmäßig nennen.

1. Die notwendige und hinreichende Bedingung der Gleichmäßigkeit wurde schon früher entwickelt; sie lautet[2]:

$$\bar{E} : \bar{F} : \bar{G} = E : F : G. \tag{1a}$$

Diese Beziehungen müssen nach Gleichung (10) der oben genannten Arbeit[3] durch eine einzige andere ersetzt werden können, nämlich durch die Beziehung $n_1 = n_2$, die gemäß (15)[4] mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$J^2 + (\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J})^2 - 4\,\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = 0. \tag{1b}$$

Zunächst soll die Äquivalenz der beiden Gleichungen (1a), in denen nur Fundamentalgrößen auftreten, mit der Gleichung (1b), in der nur die Differentialinvarianten der Abbildung vorkommen, mit Hilfe früher gefundener Formeln nachgewiesen werden, die aber, wie hier sogleich hervorgehoben sei, nur im reellen Bezirk statthat: Die Diskriminante der quadratischen Gleichung für die

---

[1] Sitz.ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., Jahrg. 1947, S. 15ff.; per definitionem ist $n = d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2$.

[2] A. a. O. S. 16.

[3] A. a. O. S. 20.

[4] A. a. O. S. 21.

Hauptrißmaßstäbe,[5] um die es sich bei dem Ausdruck auf der linken Seite von (1 b) handelt, ist bis auf den Nenner $(EG - F^2)^2$

$$(E\overline{G} + G\overline{E} - 2\,F\overline{F})^2 - 4\,(EG - F^2)\,(\overline{E}\,\overline{G} - \overline{F}^2) =$$
$$((EG - F^2)\,(E\overline{G} - G\overline{E})^2 + (EF\overline{G} + FG\overline{E} - 2\,EG\overline{F})^2) : EG;$$

da $EG - F^2 > 0$, kann sie ersichtlich nie negativ sein und nur verschwinden, wenn $E\overline{G} - G\overline{E} = (E\overline{G} + G\overline{E})\,F - 2\,EG\overline{F} = 0$, folglich $E : G = \overline{E} : \overline{G}$ und daher auch $E : F = \overline{E} : \overline{F}$ ist, d. h. wenn (1 a) erfüllt ist.[6] Die benützte Umformung ist bekannt.

Nach Gleichung (17) der anfangs genannten Arbeit ist es für eine *gleichmäßige Abbildung* charakteristisch, daß auch der *Querrißmaßstab* in einem Punkt von der Richtung *unabhängig* ist, und zwar ist er gleich dem negativen Wert der halben Schiefe an der Stelle.

2. *Jede gleichmäßige Abbildung läßt sich aus zwei Abbildungen besonders einfacher Art zusammensetzen.*

Zuvörderst bemerken wir, daß wir wieder eine derartige Abbildung erhalten, wenn wir die Berührebene $\mathfrak{e}'$ in der zu $\mathfrak{e}$ senkrechten Richtung $\mathfrak{c}$ auf eine nicht zu $\mathfrak{e}$ lotrechte, sonst aber beliebige Ebene $\mathfrak{e}''$ projizieren; dadurch entsteht nämlich aus $d\mathfrak{y}$ ein Vektor $d\mathfrak{y} + l\mathfrak{c}$, für den wegen $\mathfrak{c}\,d\mathfrak{x} = 0$ $d\mathfrak{x}\,(d\mathfrak{y} + l\mathfrak{c}) = d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ ist, so daß der Rißmaßstab $n = d\mathfrak{x}\,(d\mathfrak{y} + l\mathfrak{c}) : d\mathfrak{x}^2$ der neuen Abbildung $\mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{e}''$ dem der alten $\mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{e}'$ gleich bleibt. Insbesondere ist also diejenige Abbildung von $\mathfrak{e}$ auf $\mathfrak{e}$ selbst, die durch senkrechtes Zurückprojizieren des Bildes $\mathfrak{e}'$ von $\mathfrak{e}$ nach $\mathfrak{e}$ ent-

[5] A. a. O. S. 18, (7') und (9).

[6] Etwas Ähnliches liegt vor bei der Winkeltreue, die sich entweder durch die Proportion $E : F : G = E' : F' : G'$ oder durch die Gleichung $V = 0$ charakterisieren läßt, wo V das Verzerrungsmaß bedeutet; vgl. Nachr. a. d. Reichsvermessungsdienst, 1942, S. 306, (16), wo in dem Ausdruck für V der Zähler die Diskriminante sowohl der Gleichung (14) als auch der Gleichung (15) ist und in der Weise des Textes behandelt werden kann. Einen anderen Fall dieser Art haben wir bei der Bedingung (12) auf S. 433 der Math. Zeitschr. 49 (1943), die dort von S. 432 an durchweg als erfüllt vorausgesetzt wird; dort kann $\mathfrak{y}_u = \alpha\mathfrak{x}_u + \beta\mathfrak{x}_v + \mu\mathfrak{c}$, $\mathfrak{y}_v = \gamma\mathfrak{x}_u + \delta\mathfrak{x}_v + \nu\mathfrak{c}$ gesetzt werden, und es ergibt sich dann aus (12) $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ und $\mu = \nu = 0$. Das Gemeinsame aller dieser Fälle ist, daß von einer gewissen Funktion die Annahme eines Extremwertes gefordert wird und diese Forderung im Reellen mehr als eine Gleichung ersetzt. (Es ist $\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v : W = \mathfrak{J}_1$, also $\mathfrak{c}^2 = 1$.)

steht, gleichmäßig, wenn es die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ war, und umgekehrt. Eine solche Abbildung ist aber, wie die geometrische Anschauung unmittelbar zeigt, eine Drehstreckung.

Um das analytisch zu beweisen, legen wir in ε ein rechtwinkliges kartesisches Koordinatensystem x, y mit dem Ursprung O fest. Eine beliebige Affinität in ε mit dem Fixpunkt O wird dann durch Gleichungen der Form

$$x' = ax + by, \quad y' = cx + dy$$

dargestellt. Soll sie gleichmäßig sein, so muß

$$\begin{aligned} n = m' \cos\zeta' &= (xx' + yy') : (x^2 + y^2) \\ &= (ax^2 + (b + c)\, xy + dy^2) : (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

unabhängig von dem Wert von $x : y$ oder

$$(a - n)\, x^2 + (b + c)\, xy + (d - n)\, y^2 \equiv 0,$$

folglich

$$a - n = b + c = d - n = 0$$

sein. Es gibt nun stets einen Winkel ζ' und eine Zahl m', für die $m' \cos\zeta' = a$, $m' \sin\zeta' = b$ wird, welche Werte a und b auch haben mögen, und wir finden, da dann $c = -m' \sin\zeta'$, $d = m' \cos\zeta'$ ist, daß die gleichmäßige Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon$ das Produkt der Drehung um O durch den Winkel ζ' und der Streckung mit dem Dehnungsfaktor m' von O aus ist:

$$x' = m' (x \cos\zeta' + y \sin\zeta'), \qquad y' = m' (-x \sin\zeta' + y \cos\zeta').$$

Da es nicht möglich ist, daß alle vermöge $\varepsilon \to \varepsilon'$ den Punkten (x, y) von ε entsprechenden Punkte von ε' sich in einen einzigen Punkt O von ε projizieren, so muß $m' \neq 0$, also auch die Transformationsdeterminante $ad - bc = a^2 + b^2 = m'^2 \neq 0$ sein. Weil demnach die Abbildung $(x, y) \to (x', y')$ stets regulär ist, kann ε nicht senkrecht auf ε' stehen, d. h. bei Gleichmäßigkeit der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ ist sicher $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \neq 0$.

Wir erhalten mithin die allgemeinste gleichmäßige Abbildung einer Ebene ε auf eine andere ε', die zur ersten nicht senkrecht sein darf, dadurch, daß wir zuerst in ε eine beliebige Drehstreckung um einen Punkt O, der, wenn ε und ε' nicht parallel sind, auf der Schnittgeraden der Ebenen liegen muß, ausführen und dann die Parallelprojektion in der zu ε senkrechten Richtung auf ε' folgen lassen.

Hieraus folgt unmittelbar, daß bei Gleichmäßigkeit, wenn ε nicht parallel zu ε' ist, die Schnittrichtung von ε und ε' Hauptrichtung in ε' ist; diese Aussage ist aber, wie leicht zu sehen, nicht umkehrbar.

3. Aus diesem anschaulichen Aufbau der gleichmäßigen Verwandtschaften können wir auch ihre Bedingungen noch einmal herleiten:

Eine Drehstreckung in ε um O führt

$$d\mathfrak{x} \text{ in } m' \, (d\mathfrak{x} \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x} \sin \zeta')$$

über. Eine gleichmäßige Abbildung liegt, wie wir sahen, vor, falls es solche Werte von m' und ζ' gibt, daß der Vektor

$$d\mathfrak{y} - m' \, (d\mathfrak{x} \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x} \sin \zeta')$$

auf ε, d. h. auf $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ senkrecht ist, also dann und nur dann, wenn die vier Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}_u \, (\mathfrak{y}_u - m' \, (\mathfrak{x}_u \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_u \sin \zeta')) &= 0,\\
\mathfrak{x}_u \, (\mathfrak{y}_v - m' \, (\mathfrak{x}_v \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_v \sin \zeta')) &= 0,\\
\mathfrak{x}_v \, (\mathfrak{y}_u - m' \, (\mathfrak{x}_u \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_u \sin \zeta')) &= 0,\\
\mathfrak{x}_v \, (\mathfrak{y}_v - m' \, (\mathfrak{x}_v \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_v \sin \zeta')) &= 0
\end{aligned}$$

oder, da $\mathfrak{x}_u \, (\mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_v) = -\mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = W$ und $\mathfrak{x}_v \, (\mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_u) = \mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = W \neq 0$ ist,

$$\begin{aligned}
\overline{E} &= m' \cos \zeta' \, E,\\
\overline{F}_1 &= m' \cos \zeta' \, F - m' \sin \zeta' \, W,\\
\overline{F}_2 &= m' \cos \zeta' \, F + m' \sin \zeta' \, W,\\
\overline{G} &= m' \cos \zeta' \, G.
\end{aligned} \tag{2}$$

Aus $d\mathfrak{x} \, (d\mathfrak{y} - m' \, (d\mathfrak{x} \cos \zeta' + \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x} \sin \zeta')) = 0$ oder $d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2 = m' \cos \zeta'$ folgt durch Vergleich mit $m \cos \zeta = d\mathfrak{x} d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2$

$$m' \cos \zeta' = m \cos \zeta, \tag{3}$$

was auch anschaulich sofort einleuchtet.

Aus (2) folgen als notwendige Bedingungen für die Gleichmäßigkeit einer affinen Abbildung, in Übereinstimmung mit (1 a):

$$\overline{E} = nE, \quad \overline{F} = nF, \quad \overline{G} = nG; \tag{1 c}$$

daß diese Bedingungen auch hinreichend sind, ergibt sich daraus, daß immer zwei Größen m' und ζ' so bestimmt werden können, daß, wie es die Gleichungen (2) verlangen, $m' \cos \zeta' = \bar{E} : E = \bar{G} : G$ und $m' \sin \zeta' = (\bar{F}_2 - \bar{F}_1) : 2\,W$ wird und daß dann wegen $(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) : 2\,F = m' \cos \zeta'$ auch $\bar{F}_1$ und $\bar{F}_2$ die durch (2) geforderten Werte annehmen.

Wir haben die Bedingungen (1 a) schon am Anfang durch eine solche ersetzt, in die nur die Differentialinvarianten des Flächenpaares $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ eingehen; dies wollen wir nun noch auf eine andere Art tun: Bedenken wir, daß aus dem Vektor $d\mathfrak{y}$ durch senkrechte Projektion auf $\mathfrak{e}$ der Vektor $\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y} \times \mathfrak{c}$ hervorgeht, so ist also die Frage, wann die Abbildung $d\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{c} \times d\mathfrak{y} \times \mathfrak{c}$ eine Drehstreckung ist. Dafür ist aber auf Grund früherer Ergebnisse notwendig und hinreichend, daß das vereinfachte Verzerrungsmaß[7] V' dieser Abbildung den Wert 1 hat; zu dessen Bildung brauchen wir die Differentialinvarianten dieser Abbildung[8]

$$\begin{aligned}
\mathfrak{i}_1' &= \mathfrak{i}_1, \\
\mathfrak{i}_2' &= (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}) \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}) = (\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}) \times (\mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}) = \\
&\qquad \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}\mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v = \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_1 \mathfrak{i}_2, \\
\mathfrak{i}' &= \mathfrak{x}_u \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}) - \mathfrak{x}_v \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}) = \\
&\qquad - \mathfrak{x}_u \mathfrak{c}\mathfrak{y}_v \cdot \mathfrak{c} + \mathfrak{x}_v \mathfrak{c}\mathfrak{y}_u \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{J}_1 \cdot \mathfrak{J}_1 \mathfrak{i}, \\
j' &= \mathfrak{x}_u (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}) - \mathfrak{x}_v (\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}) = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u = j.
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als charakteristische Bedingung dafür, daß die Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ an der betrachteten Stelle gleichmäßig ist:

$$2\,\mathfrak{i}_1'\mathfrak{i}_2'(V'-1) = \mathfrak{i}'^2 + j'^2 - 4\,\mathfrak{i}_1'\mathfrak{i}_2' = (\mathfrak{J}_1\mathfrak{i})^2 + j^2 - 4\,\mathfrak{i}_1\mathfrak{i}_2 = 0.$$

Dieses Ergebnis stimmt mit der Beziehung (1 b) überein, bei deren Aufstellung wir von der geometrischen Bedeutung des

[7] Vgl. Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., Jahrg. 1943, S. 232 f.

[8] Die Berechnung von $\mathfrak{i}_2'$ wird durch die Überlegung vereinfacht, daß $\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{c} \times \mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}$ durch dieselbe Drehung in $\mathfrak{e}$ aus $\mathfrak{y}_u \times \mathfrak{c}$ und $\mathfrak{y}_v \times \mathfrak{c}$ hervorgehen und daher dasselbe Vektorprodukt wie diese Vektoren haben. Bei der Bildung von $\mathfrak{i}'$ ergibt sich ein Sonderfall des Satzes: Der Spreizvektor der Risse eines Paares von Flächenstücken in einer Ebene ist die zu dieser senkrechte Komponente des Spreizvektors $\mathfrak{J}$ der Flächenstücke (Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 113); j' aber ergibt sich auch aus dem Satz, daß die Schiefe J eines Paares affiner Ebenen sich nicht ändert bei senkrechter Projektion des Paares auf eine dieser Ebenen (a. a. O. S. 115).

auf der linken Seite der Gleichung stehenden Ausdrucks ausgingen.

Wenn ε und ε' parallel sind, also $\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J}_2 = 0$, folglich auch[9] $\mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J} = 0$ ist, wird $(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J})^2 = \mathfrak{J}^2$; wir erhalten dann also die bekannte Bedingung der Drehstreckung.[10]

4. Unter den gleichmäßigen Abbildungen ist als Sonderfall die inverse der senkrechten Projektion von ε' auf ε in Verbindung mit einer reinen Streckung der Ebene ε von O aus enthalten.

Diesen Fall bekommen wir, wenn wir $\zeta' = 0$ setzen, so daß wir nach (2) erhalten:

$$\overline{E} = m'E, \quad \overline{F}_1 = \overline{F}_2 = m'F, \quad \overline{G} = m'G. \tag{4}$$

Da $\overline{F}_1 - \overline{F}_2 = j$ ist, so können wir demnach als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\varepsilon' \to \varepsilon$ eine senkrechte Projektion in Verbindung mit einer reinen Streckung in ε ist, gemäß (1b) auch schreiben:

$$(\mathfrak{J}_1\mathfrak{J})^2 - 4\,\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 = 0 \text{ und } J = 0;$$

es trifft hier also Gleichmäßigkeit mit Geradheit zusammen.

5. Als weiterer Sonderfall der Gleichmäßigkeit stellt sich Orthogonalität entsprechender Richtungen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ ein, wenn wir ε um O in sich um $\zeta' = \pm \frac{\pi}{2}$ drehen, dann von O aus in beliebigem Maßstab m' strecken und daraufhin in zu ε senkrechter Richtung auf ε' projizieren.

In diesem Fall erhalten wir $\cos\zeta' = 0$, also $n = 0$, wodurch (1c) in Übereinstimmung mit den Gleichungen (5) der Arbeit kommt, an die wir am Anfang anknüpften.[11] Wir wollen aber auch die Bedingungen hierfür mit Hilfe der Differentialvarianten ausdrücken: Wenn ε und ε' nicht parallel sind ($\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$), so ist, wie früher[12] bewiesen wurde, $\mathfrak{j}$ senkrecht zu den beiden Richtungen in ε und ε', die der Schnittgeraden von ε und ε' vermöge

[9] Vgl. die in Fußnote 7 zitierte Arbeit (weiterhin kurz als 7 bezeichnet), S. 225 unten.

[10] Vgl. 7 S. 227, (17).

[11] Vgl. 1 S. 17.

[12] Vgl. 7 S. 233.

der Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ entsprechen, muß also in unserem Fall dieser Schnittgeraden parallel sein, d. h. es muß gelten:

$$\rho\, \mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2.$$

Der Ansatz ist in dieser Form möglich; denn da wir $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ annahmen, ist sicher[13] $\mathfrak{j} \neq 0$ und $\rho \neq 0$. Setzen wir $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$ in die Identität ein, die die Invarianten erfüllen,[14] so finden wir wegen $\mathfrak{j}_1\mathfrak{j} = \mathfrak{j}_2\mathfrak{j} = 0$

$$j\,\rho\, \mathfrak{j}^2 - \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 \cdot \mathfrak{j}^2 - \rho^2 \mathfrak{j}^2 = 0,$$

folglich, da hier ja $\mathfrak{j}^2 \neq 0$,

$$\rho^2 - j\,\rho + \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 = 0. \tag{5}$$

Dies gilt allgemein, wenn die Schnittrichtung von ε und ε' Hauptrichtung sowohl in ε als auch in ε' ist, ohne sich selbst zu entsprechen; mehr haben wir in der Tat bis jetzt nicht vorausgesetzt. Soll aber *jedem* Vektor in ε ein zu ihm senkrechter in ε' zugeordnet sein, so muß[15]

$$(\xi\, \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j} + \eta\, \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2)\,(\xi\, \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 + \eta\, \mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_2) = 0$$

sein für alle Werte von ξ und von η, also wegen $\rho\, \mathfrak{j} = \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2$

$$\xi\eta\,((\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j})\,(\mathfrak{j} \times \mathfrak{j}_2) + (\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2)^2) = -\xi\eta\,(\mathfrak{j}^2 \cdot \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 - \mathfrak{j}^2\rho^2) = 0$$

oder

$$\rho^2 = \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2.$$

Da also nach (5) $2\rho^2 - j\,\rho = 0$, mithin gemäß der Forderung $\rho \neq 0$

$$2\,\rho = j$$

sein muß, so erhalten wir im Falle $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ als *notwendige und hinreichende Bedingung für das Entsprechen durch Orthogonalität der Linienelemente*:[16]

$$j\,\mathfrak{j} = 2\, \mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2. \tag{6a}$$

Als Folge dieser Gleichung tritt nach (5) die folgende hinzu:

$$j^2 = 4\, \mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2. \tag{6b}$$

---

[13] Vgl. 7 S. 225.

[14] Vgl. 7 S. 222 (9).

[15] Vgl. 7 S. 222 u. 235 f.

[16] Vgl. 7 S. 236 (24); die hier im Text gegebene Bedingung ist beträchtlich einfacher.

Hier muß, wie wir sahen, $\frac{1}{2}\rho = j \neq 0$ sein; in der Tat ist es geometrisch evident, daß im vorliegenden Fall ε und ε' nicht zueinander lotrecht sein können, weil nämlich sonst jeder Richtung von ε nur die eine zu ihr senkrechte in ε' entsprechen könnte.

Ist aber ε parallel zu ε', so muß eine Drehstreckung in ε mit dem Drehwinkel $\zeta' = \pm\frac{\pi}{2}$ vorliegen; die notwendige und hinreichende Bedingung hierfür ist:[17] $\mathfrak{j} = 0$ und $j^2 = 4\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2$.

Schließlich sehen wir, daß die Bedingungen (6a) und (6b) unter allen Umständen, d. h. auch, wenn ε und ε' parallel sind, als charakteristisch für die senkrechte Lage je zweier entsprechender Richtungen gelten können: Im Falle $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 \neq 0$ ist die zweite eine Folge der unter dieser Voraussetzung allein schon ausreichenden ersten Beziehung; im Falle $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ aber folgt, da nach der zweiten Bedingung wegen der Parallelität von $\mathfrak{j}_1 \neq 0$ und $\mathfrak{j}_2 \neq 0$ $j \neq 0$ sein muß, aus der ersten das Verschwinden von $\mathfrak{j}$.

Wie es sein muß, ist (1b) erfüllt, wenn (6a) und (6b) gelten.

6. Während i. allg., wenn die Affinität $\varepsilon \to \varepsilon'$ gleichmäßig ist, die inverse Abbildung $\varepsilon' \to \varepsilon$ nicht gleichmäßig zu sein braucht, ist, wenn $\zeta' = \pm\frac{\pi}{2}$, mit $\varepsilon \to \varepsilon'$ auch $\varepsilon' \to \varepsilon$ gleichmäßig; dies geht aus der Symmetrie der Bedingungen $\overline{E} = \overline{F} = \overline{G} = 0$ in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ hervor. In diesem Fall der Orthogonalität entsprechender Richtungen erhalten wir also $\varepsilon \to \varepsilon'$ auch dadurch, daß wir zuerst ε auf ε' senkrecht projizieren und danach in ε' eine Drehung um O durch $\pm\frac{\pi}{2}$ und eine Streckung vornehmen. Deren Dehnungsmaßstab $1 : m''$ steht, wie eine einfache geometrische Überlegung lehrt, zu m' in der Beziehung

$$m' m'' = \cos\vartheta,$$

wo ϑ den Winkel zwischen ε und ε' bedeutet; dabei ist ϑ als spitzer Winkel zu nehmen, wenn die Drehsinne in ε und ε' so gewählt werden, daß sie bei der Betrachtung in einer beliebigen der beiden Projektionsrichtungen gleich erscheinen.

---

[17] Vgl. 7 S. 227, (15b) und (17).

Hier liegt die Frage nach all den Fällen nahe, in denen neben der Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ auch ihre inverse $\varepsilon' \to \varepsilon$ gleichmäßig ist. Es muß dann sowohl $\bar{E} = nE$, $\bar{F} = nF$, $\bar{G} = nG$ als auch $\bar{E} = \bar{n}E'$, $\bar{F} = \bar{n}F'$, $\bar{G} = \bar{n}G'$ sein. Diese Gleichungen sind entweder dadurch erfüllbar, daß $n = \bar{n} = 0$, folglich $\bar{E} = \bar{F} = \bar{G} = 0$ gesetzt wird, oder dadurch, daß $n\bar{n} \neq 0$, folglich $E : F : G = E' : F' : G'$ angenommen wird; eine dritte Möglichkeit gibt es nicht. Der erste Fall ist der oben behandelte, der zweite der der direkten Winkeltreue in Verbindung mit gleicher Stellung der orientierten Berührebenen ε und ε', da nur dann die senkrechte Projektion von ε' auf ε eine Drehstreckung in ε ergeben kann.

7. In dem Falle der Gleichmäßigkeit der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ entartet der Kegel 3. O., dessen Mantellinien i. allg. den Projektionsrichtungen $d\mathfrak{y} - n\,d\mathfrak{x}$ parallel sind,[18] und zwar in eine Ebene, die zu dem Vektor $\mathfrak{l}(n)$ normal ist.

Zum Schluß sei noch die Frage aufgeworfen, ob es überhaupt Flächenabbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ gibt, die in allen Punkten in nichttrivialer Weise gleichmäßig sind. Als Antwort möge hier der Hinweis auf die isotropen Strahlenkongruenzen[19]

$$w\mathfrak{x}(u, v) + \mathfrak{y}(u, v),$$

wo $\mathfrak{x}^2 = 1$ ist, genügen; diese sind nämlich dadurch gekennzeichnet, daß die Einheitskugel $\mathfrak{x}$ jeder Leitfläche des Systems gleichmäßig entspricht. Genauer soll diese Frage zusammen mit anderen, ähnlichen Problemstellungen in einer besonderen Arbeit behandelt werden.

[18] Sitz.ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl. 1947, S. 16.
[19] Siehe Bianchi-Lukat, Vorl. ü. Differentialgeometrie, Leipzig 1899, S. 262.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1949

Band/Volume: 1947

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Betrachtungen über Flächenabbildungen. "Gleichmäßige" Abbildungen 25-33