Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1947

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

IV. Ausgezeichnete Abbildungen verschiedener Art.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt am 2. Mai 1947.

Kürzlich wurde eine besondere Art des affinen Entsprechens zweier Ebenen ε, ε' des euklidischen Raumes untersucht,[1] die als gleichmäßig bezeichnet wurde und die dadurch gekennzeichnet ist, daß der sogenannte Rißmaßstab von der Richtung des Vektors, zu dem er gehört, unabhängig ist; zugleich erwies es sich für diese Art affiner Verwandtschaft als notwendig und hinreichend, daß auch der sogenannte Querrißmaßstab von der Richtung der Strecke, der er zugehört, nicht abhängt.

Waren ε und ε' die Berührebenen zweier regulär aufeinander abgebildeter Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ in entsprechenden Punkten P und P', so ließen sich die charakteristischen Bedingungen der Gleichmäßigkeit der Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) entweder mit Hilfe der Fundamentalgrößen 1. O. des Flächenpaares[2] in der Form

$$\bar{E} = nE, \ \bar{F} = nF, \ \bar{G} = nG \tag{1a}$$

oder mittels der Differentialinvarianten des Flächenpaares[3] in der Form

$$J^2 + (\mathfrak{J}_1\mathfrak{J})^2 - 4\,\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{J}_2 = 0 \tag{1b}$$

ausdrücken.

Bei früheren Gelegenheiten wurden noch einige andere Arten von Beziehungen betrachtet, die besonderes Interesse verdienen, so die geraden Abbildungen,[4] für die das Verschwinden der

---

[1] Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 25 ff.

[2] Math. Zeitschr. 49 (1943), S. 427 ff.
Zur Abkürzung ist hier $\frac{1}{2}(\bar{F}_1 + \bar{F}_2) = \bar{F}$ gesetzt.

[3] Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 217 ff.

[4] Sitzungsber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 126.

skalaren Invariante J kennzeichnend ist, sowie die durch das Nullwerden der vektoriellen Invariante $\mathfrak{J}$ charakterisierten,[5] schon lange bekannten Assoziationen.

Im folgenden sollen einige Lehrsätze über Paare von Flächen bewiesen werden, die auf eine der genannten ausgezeichneten Weisen aufeinander abgebildet sind.

1. Zunächst sei ein Weg gezeigt, auf dem aus zwei an allen Stellen gleichmäßig verwandten Flächenpaaren unendlich viele andere derartige Flächenpaare hergeleitet werden können. Es gilt der Satz:

I. Wenn die Abbildungen $\mathfrak{x}(u, v) \to \mathfrak{y}(u, v)$ *und* $\mathfrak{x}(u, v) \to \mathfrak{z}(u, v)$ *gleichmäßig sind, so sind es auch die Abbildungen* $\mathfrak{x} \to (\alpha\,\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$, *wo* α *und* β *beliebige Konstante sind, die nicht zugleich verschwinden.*

In der Tat sind die gemischten Fundamentalgrößen 1. O. des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to (\alpha\,\mathfrak{y} + \beta\,\mathfrak{z})$

$$\mathfrak{x}_u(\alpha\mathfrak{y}_u + \beta\mathfrak{z}_u),\ \mathfrak{x}_u(\alpha\mathfrak{y}_v + \beta\mathfrak{z}_v),\ \mathfrak{x}_v(\alpha\mathfrak{y}_u + \beta\mathfrak{z}_u),\ \mathfrak{x}_v(\alpha\mathfrak{y}_v + \beta\mathfrak{z}_v);$$

gelten also für die Paare $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ die Beziehungen (1 a), so sind E, F, G auch proportional zu

$$\alpha\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u + \beta\mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_u,\quad \tfrac{1}{2}\left[\alpha(\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u) + \beta(\mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_v + \mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_u)\right],\quad \alpha\mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v + \beta\mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_v. \tag{2}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Nach früheren Ergebnissen[6] bedeutet dies:

Wenn bei den beiden Flächenpaaren $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ an den Stellen (u, v) die Affinitäten $\varepsilon \to \varepsilon'$ und $\varepsilon \to \varepsilon''$[7] sich aus reinen Streckungen und Projektionen in zu ε senkrechter Richtung zusammensetzen, so ist das an dieser Stelle auch bei dem Paar $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$ der Fall, wenn α und β konstant sind.

Da die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ stets gleichmäßig ist, so ist also mit $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ immer auch $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y})$ gleichmäßig (α, β konstant).

---

[5] $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ sind dann relative Minimalflächen; man sagt auch, jede der Flächen sei ein Drehriß der andern, oder auch, sie seien zueinander assoziiert. Vgl. 3 (d. h. die in Fußnote 3 zitierte Arbeit), S. 233 f. und W. Blaschke, Vorl. ü. Diff.-geom. II, Berlin 1923, S. 205f.

[6] Vgl. 1 S. 27f.

[7] ε, ε' und ε'' bezeichnen die Berührebenen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ in entsprechenden Punkten.

Sind n' und n'' die im allgemeinen veränderlichen Rißmaßstäbe für die Flächenpaare $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$, so ist $n = \alpha n' + \beta n''$ derjenige für das Flächenpaar $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$; das gilt übrigens auch, wenn n' und n'' und somit auch n nicht unabhängig von der Richtung von $d\mathfrak{x}$ sind. Weil hiernach mit n' und n'' auch n verschwindet, so erkennen wir:

Wenn sich sowohl die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ als auch die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{z}$ durch Orthogonalität der Linienelemente entsprechen, so tun das auch die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z}$, wo α und β beliebige Konstante bedeuten.[8]

2. Zu den gleichen Folgerungen muß auch die Verwendung der Differentialinvarianten $\bar{\mathfrak{j}}_1$, $\bar{\mathfrak{j}}_2$, $\bar{\mathfrak{j}}$, $\bar{j}$ der Abbildung $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$ führen, die wir durch die Invarianten $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$, j des Paares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$, $\mathfrak{j}_1' = \mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2'$, $\mathfrak{j}'$, j' des Paares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ und $\mathfrak{j}_1'' = \mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}_2'' = \mathfrak{j}_2'$, $\mathfrak{j}''$, j'' des Paares $\mathfrak{y} \to \mathfrak{z}$ ausdrücken wollen: Es wird zunächst

$$
\begin{aligned}
\bar{\mathfrak{j}}_1 &= \mathfrak{j}_1 = \mathfrak{j}_1', \\
\bar{\mathfrak{j}}_2 &= (\alpha\mathfrak{y}_u + \beta\mathfrak{z}_u) \times (\alpha\mathfrak{y}_v + \beta\mathfrak{z}_v) = \alpha^2\mathfrak{j}_2 + \alpha\beta\,\mathfrak{j}'' + \beta^2\mathfrak{j}_2', \\
\bar{\mathfrak{j}} &= \mathfrak{x}_u \times (\alpha\mathfrak{y}_v + \beta\mathfrak{z}_v) - \mathfrak{x}_v \times (\alpha\mathfrak{y}_u + \beta\mathfrak{z}_u) = \alpha\mathfrak{j} + \beta\mathfrak{j}', \\
\bar{j} &= \alpha j + \beta j'.
\end{aligned} \tag{3}
$$

Daher erhalten wir, wenn wir die gemischten Fundamentalgrößen 1. O. des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ mit $\bar{E}'$, $\bar{F}_1'$, $\bar{F}_2'$, $\bar{G}'$ bezeichnen,

$$
\begin{gathered}
\bar{j}^2\bar{\mathfrak{j}}_1^2 + (\bar{\mathfrak{j}}_1\bar{\mathfrak{j}})^2 - 4\,\bar{\mathfrak{j}}_1\bar{\mathfrak{j}}_2 \cdot \bar{\mathfrak{j}}_1^2 = \alpha^2(j^2\mathfrak{j}_1^2 + (\mathfrak{j}_1\mathfrak{j})^2 - 4\,\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 \cdot \mathfrak{j}_1^2) + \\
\beta^2(j'^2\mathfrak{j}_1'^2 + (\mathfrak{j}_1'\mathfrak{j}')^2 + 4\,\mathfrak{j}_1'\mathfrak{j}_2' \cdot \mathfrak{j}_1'^2) + 2\,\alpha\beta\,(jj' \cdot \mathfrak{j}_1^2 + \mathfrak{j}_1\mathfrak{j} \cdot \mathfrak{j}_1'\mathfrak{j}' - \\
2\,\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}'' \cdot \mathfrak{j}_1^2) = 2\,\alpha\beta\,[(\bar{F}_1 - \bar{F}_2)(\bar{F}_1' - \bar{F}_2')(EG - F^2) + (E\bar{G} + \\
G\bar{E} - F(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)]\,[E\bar{G}' + G\bar{E}' - F(\bar{F}_1' + \bar{F}_2')] - 2\,(EG - \\
F^2)(\bar{E}\bar{G}' + \bar{G}\bar{E}' - \bar{F}_1\bar{F}_2' - \bar{F}_2\bar{F}_1');
\end{gathered}
$$

denn, weil die Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ als gleichmäßig vorausgesetzt werden, verschwinden gemäß (1 b) die Faktoren von α^2 und β^2, ferner ist

$$
\begin{gathered}
\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}'' = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v)(\mathfrak{y}_v \times \mathfrak{z}_v - \mathfrak{y}_v \times \mathfrak{z}_u) = \\
\mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_v \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_v \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u - \mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_u \cdot \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_u \cdot \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_v = \\
\bar{E}\bar{G}' - \bar{F}_1\bar{F}_2' - \bar{F}_2\bar{F}_1' + \bar{G}\bar{E}'.
\end{gathered}
$$

---

[8] Dies ergibt sich auch aus dem Zusammenhang des Entsprechens durch Orthogonalität der Linienelemente mit den infinitesimalen Verbiegungen.

Nun folgt aus (1 b), wie früher[9] bewiesen wurde, (1 a); daher wird der Faktor von $2\alpha\beta$ gleich $(EG - F^2)\,[(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)\,(\bar{F}_1' + \bar{F}_2') - 2\,\bar{E}\bar{G}' - 2\,\bar{G}\bar{E}') + (E\bar{G} + G\bar{E} - F\,(\bar{F}_1 + \bar{F}_2)]\,[E\bar{G}' + G\bar{E}' - F\,(\bar{F}_1' + \bar{F}_2')] = (EG - F^2)\,(2\,n'F \cdot 2n''F - 2n'En''G - 2n'Gn''E) + (En'G + Gn'E - F \cdot 2n'F)\,(En''G + Gn''E - F \cdot 2n''F) = 0.$

So ist auf eine viel schwerfälligere Weise der erste Satz nocheinmal bewiesen.

3. Jedoch erweist sich die Berechnung der vier Invarianten der Abbildung $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$ in anderer Hinsicht als wertvoll. Ein Blick auf die letzte der Gleichungen (3) läßt nämlich erkennen, daß mit j und j' auch $\bar{j}$ verschwindet; daraus folgt aber – ganz unabhängig davon, ob sich unter den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ gleichmäßige befinden oder nicht – der Satz:

II. Wenn die Flächenpaare $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ beide verschwindende Schiefe J besitzen oder, was dasselbe bedeutet, „gerade" aufeinander abgebildet sind, so gilt das auch für alle Flächenpaare $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$, wenn α und β beliebige konstante Werte haben.

Da die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{x}$ stets gerade ist, so ist also mit $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ immer auch $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{x} + \beta\mathfrak{y})$ gerade (α, β konstant).

Treffen bei den Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{x} \to \mathfrak{z}$ Geradheit und Gleichmäßigkeit zusammen, so übertragen sich nach den Sätzen I und II beide Eigenschaften auf die Abbildung $\mathfrak{x} \to (\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z})$.

4. Ferner sehen wir, da nach der vorletzten der Gleichungen (3) $\bar{\mathfrak{j}}$ eine linear homogene Funktion von $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{j}'$ ist:

III. Wenn die Flächen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ Drehrisse[10] der Fläche $\mathfrak{x}$ sind, so gilt das auch von allen Flächen $\alpha\mathfrak{y} + \beta\mathfrak{z}$, wo α und β beliebige Konstanten bedeuten.

Hierin ist als Sonderfall ein bekannter Satz von Weierstraß über Minimalflächen[11] enthalten, die so aufeinander bezogen sind, daß sie in entsprechenden Punkten Berührebenen gleicher Stellung haben; ist nämlich $\mathfrak{x}$ die Einheitskugel mit dem Mittel-

---

[9] Vgl. 1, S. 25 f.

[10] Vgl. Fußnote 5 und E. Müller, Wiener Monatshefte 31 (1921), S. 10.

[11] Vgl. Bianchi-Lukat, Vorl. ü. Differentialgeometrie. Leipzig 1899. S. 363.

punkt O, so sind die Drehrisse von $\mathfrak{x}$ die Minimalflächen, die der Kugel und folglich auch einander nach dem Gaußschen Prinzip gleichgerichteter Normalen in Punkten mit gleichen Parameterpaaren u, v entsprechen.

Alle bis jetzt in dieser Arbeit bewiesenen Sätze bleiben gültig, wenn an Stelle zweier Flächen $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ eine beliebige endliche Anzahl von Flächen tritt, die in einer der betrachteten Beziehungen zu $\mathfrak{x}$ stehen; unter gewissen Voraussetzungen darf die Menge dieser Flächen sogar unendlich sein.

5. Veranlassung dazu, den Fall einer Kugel $\mathfrak{x}$ besonders zu betrachten, gibt auch die folgende Frage:

Ist es möglich, daß neben $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ auch $\mathfrak{x} \to (\nu\, \mathfrak{x} + \mathfrak{y})$ bei nicht konstantem ν eine gleichmäßige Abbildung ist?

Es sei ν eine stetig differenzierbare skalare Funktion von u und v. Dann müßten gemäß (1a) die Größen

$$\begin{aligned} &\nu_u \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u + \nu \mathfrak{x}_u^2 + \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u, \\ &\nu_u \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v + \nu_v\, \mathfrak{x}\mathfrak{x}_u + 2\,\nu \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u, \\ &\nu_v \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v + \nu \mathfrak{x}_v^2 + \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v \end{aligned} \tag{4}$$

ebenso wie $\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v$ proportional zu $\mathfrak{x}_u^2$, $2\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{x}_v^2$ sein; dafür ist in der Tat hinreichend, daß

$$\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u = 0 \text{ und } \mathfrak{x}\mathfrak{x}_v = 0, \text{ also } \mathfrak{x}^2 = \text{const},$$

d. h. $\mathfrak{x}\,(u, v)$ eine Kugel mit dem Mittelpunkt O ist. Der Proportionalitätsfaktor ist ersichtlich $\nu + n$, wo n den richtungsunabhängigen Rißmaßstab der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ bedeutet. Es gilt daher der Satz:

IV. Ist $\mathfrak{x}\,(u, v)$ eine Kugel, deren Mittelpunkt im Bezugspunkt O liegt, und ist unter den Abbildungen von $\mathfrak{x}\,(u, v)$ auf die Flächen $\nu\,(u, v)\,\mathfrak{x}\,(u, v) + \mathfrak{y}\,(u, v)$ eine einzige gleichmäßig, so sind es alle.

Dieser Fall liegt vor bei den isotropen Strahlenkongruenzen von Ribaucour $w\,\mathfrak{x}\,(u, v) + \mathfrak{y}\,(u, v)$, wo $\mathfrak{x}^2 = 1$ ist und w einen unabhängigen Parameter neben u und v bedeutet. Jede beliebige Leitfläche eines solchen Strahlensystems, die durch eine stetig differenzierbare Funktion $w\,(u, v)$ erhalten wird, entspricht der Einheitskugel gleichmäßig, und zwar tritt dies bei einem Strahlensystem ein, sobald eine einzige seiner Schnittflächen der

Kugel vermöge der mit den schneidenden Strahlen gleichgerichteten Radien gleichmäßig zugeordnet ist.

Unter den Leitflächen befindet sich eine einzige, die der Kugel $\mathfrak{x}$ durch Orthogonalität der Linienelemente entspricht, nämlich die Fläche $\mathfrak{y} - n\mathfrak{x}$; bekanntlich ist dies die Mittenfläche der Kongruenz.[12]

6. Gibt es auch solche Leitflächen des Strahlensystems, deren Abbildung auf die Kugel $\mathfrak{x}$ gerade ist, für die also $j = 0$ ist? Diese Frage wollen wir behandeln, ohne die Voraussetzung der Gleichmäßigkeit zu machen: Für alle Flächenpaare $\mathfrak{x} \rightarrow (\nu\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$ haben unter der Voraussetzung $\mathfrak{x}^2 = \text{const}$ die Differenzen

$$\mathfrak{x}_u (\nu_v\mathfrak{x} + \nu\mathfrak{x}_v + \mathfrak{y}_v) - \mathfrak{x}_v (\nu_u\mathfrak{x} + \nu\mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u),$$

wie unmittelbar zu sehen, den gleichen Wert $\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = j$; da auch $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{j}_1$ für alle diese Flächenpaare dieselbe Vektorfunktion ist, so gilt der Satz:

V. Die Abbildungen einer Kugel $\mathfrak{x}$ (u, v) mit dem Mittelpunkt O auf die Flächen ν (u, v) $\mathfrak{x}$ (u, v) + $\mathfrak{y}$ (u, v), wo ν eine willkürliche Funktion von u und v bedeutet, stimmen alle in der Schiefenfunktion J (u, v) überein.

Speziell sind somit alle diese Abbildungen gerade, wenn es eine von ihnen ist.

7. Nehmen wir nun wieder an, daß die Flächenpaare $\mathfrak{x} \rightarrow (\nu\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$, wo $\mathfrak{x}^2 = \text{const}$ sei, gleichmäßig aufeinander bezogen seien, so ist nach früher entwickelten Formeln[13] $m' \sin \zeta'$ für sie alle die gleiche Funktion. Da $m' \cos \zeta' = n + \nu$ durch geeignete Wahl von ν einer beliebig vorgeschriebenen Funktion gleich gemacht werden kann, so läßt sich demnach m' (u, v) willkürlich vorschreiben, ebenso, sofern $j \neq 0$ ist, d. h. die Flächenpaare nicht zugleich gerade und gleichmäßig aufeinander bezogen sind, statt m' auch ζ' (u, v).

8. Schließlich berechnen wir j für die Abbildung, die eine Strahlenkongruenz, bei der wir nun wieder keine Isotropie voraussetzen, zwischen irgend zwei sie schneidenden Flächen

---

[12] Vgl. Bianchi-Lukat, Vorl. ü. Differentialgeometrie, S. 262.

[13] Vgl. 1, S. 28. Aus den beiden mittleren der dort stehenden Formeln (2) folgt: $2 m' \sin \zeta' = -J$.

$\nu_1\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ und $\nu_2\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ vermittelt, wobei wir $\mathfrak{x}^2 = 1$ annehmen. Es ist für dieses Flächenpaar

$$j = (\nu_{1u}\mathfrak{x} + \nu_1\mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u)(\nu_{2v}\mathfrak{x} + \nu_2\mathfrak{x}_v + \mathfrak{y}_v) - (\nu_{1v}\mathfrak{x} + \nu_1\mathfrak{x}_v + \\ + \mathfrak{y}_v)(\nu_{2u}\mathfrak{x} + \nu_2\mathfrak{x}_u + \mathfrak{y}_u) = \nu_{1u}\nu_{2v} - \nu_{1v}\nu_{2u} + (\nu_1 - \nu_2) \\ (\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u) + (\nu_{1u} - \nu_{2u})\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}_v - (\nu_{1v} - \nu_{2v})\,\mathfrak{x}\mathfrak{y}_u. \qquad (5)$$

Wählen wir die Differenz $\nu_1 - \nu_2$ als Konstante, so finden wir hieraus bei Berücksichtigung des vorigen Lehrsatzes:

VI. Sobald eine der Abbildungen $\mathfrak{x} \to (\nu\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$ gerade ist, so ist nicht nur $\mathfrak{x}$ auf jede der Leitflächen $\nu\mathfrak{x} + \mathfrak{y}$ gerade abgebildet, sondern es hat dann auch jedes Paar von Flächen, die aus den Strahlen der Kongruenz Stücke konstanter Länge ausschneiden, verschwindende Schiefe, sofern sie durch diese Strahlen aufeinander bezogen gedacht werden. (Es sei wiederholt, daß hierbei $\mathfrak{x}$ als Vektor konstanter Länge vorausgesetzt ist.)

Tritt noch Gleichmäßigkeit hinzu, so bedeutet dies, wie wir oben sahen: Bei jedem Flächenpaar $\mathfrak{x} \to (\nu\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$ ist die Abbildung $\varepsilon \to \varepsilon'$ die Aufeinanderfolge einer reinen Dehnung der Ebene ε von O aus und einer Projektion in zu ε senkrechter Richtung; dies gilt jedoch im allgemeinen nicht für die Paare $(\nu_1\mathfrak{x} + \mathfrak{y}) \to (\nu_2\mathfrak{x} + \mathfrak{y})$.

9. Ein Satz, in dem eine andere, sehr allgemeine Abbildungsart eine Rolle spielt, ist der folgende:

VII. Die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ ist gerade, wenn der Ortsvektor $\mathfrak{y}$ stets normal zur Berührebene der Fläche $\mathfrak{x}$ im entsprechenden Punkte ist; es muß nur die Existenz einer stetigen gemischten Ableitung von $\mathfrak{x}$ (u, v) gefordert werden.

Aus den unter den Voraussetzungen des Satzes geltenden Gleichungen

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{y} = 0 \text{ und } \mathfrak{x}_v\mathfrak{y} = 0 \qquad (6)$$

folgt dann nämlich

$$\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v = 0 \text{ und } \mathfrak{x}_{vu}\mathfrak{y} + \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = 0,$$

folglich

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = 0.$$

Sonderfälle liegen vor, wenn $\mathfrak{y}$ eine Fußpunktsfläche von $\mathfrak{x}$ ist – es gilt dann außer (6) noch die Beziehung $(\mathfrak{x} - \mathfrak{y})\,\mathfrak{y} = 0$ –, oder, wenn $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ euklidisch-polare Flächen sind, die dadurch gekennzeichnet seien, daß der Ortsvektor der einen Fläche als rechtwinklige Koordinaten die Ebenenkoordinaten der entsprechenden Berührebene der anderen Fläche besitzt, so daß außer den Gleichungen (6) noch die folgenden gelten:

$$\mathfrak{x}\mathfrak{y} + 1 = 0, \quad \mathfrak{x}\mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}\mathfrak{y}_v = 0.$$

Übrigens läßt sich unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen jedes Paar von Flächen in der Weise aufeinander abbilden, wie es im Satz VII vorausgesetzt ist, falls $\mathfrak{x}$ nicht abwickelbar ist.

10. Wenn außer $\mathfrak{x}\mathfrak{y} = C =$ const noch $\mathfrak{x} \times \mathfrak{y} = 0$ gilt, wenn also

$$\mathfrak{y} = C\,\mathfrak{x} : \mathfrak{x}^2$$

ist, so finden wir

$$\mathfrak{y}_u = C\mathfrak{x}_u : \mathfrak{x}^2 - 2\,C\mathfrak{x}\mathfrak{x}_u \,.\, \mathfrak{x} : \mathfrak{x}^4, \quad \mathfrak{y}_v = C\mathfrak{x}_v : \mathfrak{x}^2 - 2\,C\mathfrak{x}\mathfrak{x}_v \,.\, \mathfrak{x} : \mathfrak{x}^4,$$

folglich wiederum

$$\mathfrak{x}_u\mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v\mathfrak{y}_u = 0.$$

Damit ist der Satz bewiesen:

VIII. *Entsprechen die Flächen* $\mathfrak{x}$ *und* $\mathfrak{y}$ *einander vermöge einer Transformation durch reziproke Radien, so ist die Abbildung* $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ *gerade.*

11. Ein Beispiel einer endlichen Menge gegenseitig aufeinander abgebildeter Flächen, zwischen denen verschiedene der früher besprochenen besonderen Beziehungen bestehen, bildet der Darbouxsche Flächenkranz.[14] Es verdient hervorgehoben zu werden, daß zu den bisher bekannten ausgezeichneten Beziehungen innerhalb des Kranzes noch einige weitere hinzutreten:

Je zwei der zwölf Flächen, die in der durch den Kranz gegebenen Reihenfolge durch eine Fläche voneinander getrennt sind, entsprechen einander gerade.

Diese Tatsache ist, da je zwei im Kranz benachbarte Flächen

[14] Siehe G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV, Paris 1896, S. 48 ff., ferner E. Salkowski, Affine Differentialgeometrie, Berlin und Leipzig 1934, S. 176 ff., und Emilie Meiners, Der Darbouxsche Flächenkranz im Bereich der projektiven Abbildungen (Diss. Aachen 1939), sowie die dort angeführte Literatur.

abwechselnd Paare assoziierter Flächen[15] und Paare durch Orthogonalität der Linienelemente einander entsprechender Flächen sind, in der folgenden Aussage enthalten:

IX. *Wenn* $\mathfrak{x}\,(u, v)$ *und* $\mathfrak{y}\,(u, v)$ *assoziierte Flächen sind und entsprechende Linienelemente von* $\mathfrak{x}\,(u, v)$ *und* $\mathfrak{z}\,(u, v)$ *aufeinander senkrecht stehen, so ist die Abbildung* $\mathfrak{y}\,(u, v) \rightarrow \mathfrak{z}\,(u, v)$ *gerade.*

Es ist dann nämlich $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u = 0$ und $\mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_u = \mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_v + \mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_u = \mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_v = 0$; aus der ersten dieser Gleichungen folgt bekanntlich,[16] daß $\mathfrak{y}_u$ und $\mathfrak{y}_v$ linear abhängig von $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ sind, und zwar in folgender Form: $\mathfrak{y}_u = a\mathfrak{x}_u + b\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_v = c\mathfrak{x}_u - a\mathfrak{x}_v$. Daher finden wir in der Tat: $\mathfrak{y}_u\mathfrak{z}_v - \mathfrak{y}_v\mathfrak{z}_u = a\mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_v + b\mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_v - c\mathfrak{x}_u\mathfrak{z}_u + a\mathfrak{x}_v\mathfrak{z}_u = 0$; das aber war zu beweisen.

---

[15] Vgl. Fußnote 5.

[16] Vgl. 2, S. 436 und S. 440, und 3, S. 227, Gl. (15b), u. S. 233 f.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1949

Band/Volume: 1947

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Betrachtungen über Flächenabbildungen. Ausgezeichnete Abbildungen verschiedener Art 35-43