Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Ein vektorielles Seitenstück zum Gauß-Bonnetschen Integralsatz.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt am 3. Oktober 1947.

Schon seit mehreren Jahrzehnten kennt man die Tatsache, daß die fundamentalen Beziehungen der Flächentheorie im euklidischen Raum, die als das theorema egregium von Gauß und als die Codazzi-Mainardischen Gleichungen bezeichnet werden, in einer vektoriellen Beziehung zusammengefaßt werden können, die einfacher ist als jede der drei skalaren Gleichungen, die sie ersetzt.[1] Sie fließt auf die natürlichste Weise aus einer auf Lagrange und Darboux zurückgehenden Integrabilitätsbedingung, der die partiellen Drehvektoren eines starren Körpers mit zwei Freiheitsgraden, dessen Lage also von zwei Parametern abhängt, genügen.[2]

Später zeigte es sich, daß ebenso wie die Gaußsche Beziehung auch die Gleichungen von Codazzi und Mainardi, die sich ihrerseits zu einer einfachen Vektorrelation vereinigen lassen, gleichbedeutend mit einer Integralformel sind, die somit als ein Seitenstück zu dem bekannten Integralsatz von Gauß und Bonnet erscheint.[3]

Beide Formeln setzen ein Flächenintegral über einen Bereich $\mathfrak{G}$ einer regulären Fläche, in dem der Integrand das Krümmungsmaß K ist, das aber im einen Fall mit dem skalaren Flächenelement df, im andern mit dem vektoriellen $d\mathfrak{f}$ multipliziert ist, in Beziehung zu einem Linienintegral, dessen Integrand in der skalaren Formel die geodätische Krümmung G, d. i. der Wert der Normalkomponente des Darboux-Cesaroschen Krümmungsvektors $\mathfrak{d}$ der Randkurve γ, in der vektoriellen Formel aber die in die Berührebene fallende Komponente $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{d}$ ist; Anteile, die von den Außenwinkeln α an den Ecken von γ herrühren oder

[1] Die Anmerkungen befinden sich am Schluß der Arbeit auf S. 125–128.

durch den topologischen Zusammenhang von $\mathfrak{G}$ bestimmt sind, wie sie in der ersten Formel auftreten, fehlen in der zweiten.

1. Hier möge zunächst für die vektorielle Integralformel ein einfacher Beweis gegeben werden, der sich nicht auf die genannte Integrabilitätsbedingung stützt[4]:

Der Vektor $\mathfrak{g}$ läßt sich durch den Einheitsvektor $\mathfrak{n}$ der Flächennormalen ausdrücken. Da $\mathfrak{g}$ sich nämlich vom Krümmungsvektor $\mathfrak{d}$ nur um die Normalkomponente $G\mathfrak{n}$ unterscheidet, ist die nach der Grundformel der Flächentheorie[5] berechnete Ableitung von $\mathfrak{n}$ nach der Bogenlänge s der orientierten Kurve γ

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{n} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{n},$$

folglich

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{n}}{ds}. \tag{1}$$

Daher ist

$$\int_\gamma \mathfrak{g}\, ds = \int_\gamma \mathfrak{n} \times d\mathfrak{n}.$$

Dieses Integral ist aber, wie als bekannt vorausgesetzt werden darf, das Doppelte des Flächenvektors[6]

$$\mathfrak{F} = \int_{\mathfrak{G}} d\bar{\mathfrak{f}}$$

des der Flächenkurve γ auf der Einheitskugel nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen entsprechenden Normalenbildes, dessen Punkte den Ortsvektor $\mathfrak{n}(s)$ haben; $d\bar{\mathfrak{f}}$ sei das $d\mathfrak{f}$ durch gleiche Stellung entsprechender Berührebenen zugeordnete vektorielle Flächenelement der Einheitskugel. Es ist also

$$\int_\gamma \mathfrak{g}\, ds = 2\,\mathfrak{F}. \tag{2}$$

$\mathfrak{F}$ läßt sich aber nach der ursprünglichen Gaußschen Definition des Krümmungsmaßes K unmittelbar als dessen vektorielles Flächenintegral auffassen; folglich gilt:

$$\int_\gamma \mathfrak{g}\, ds = 2 \int_{\mathfrak{G}} K\, d\mathfrak{f}. \tag{3}$$

Hierbei ist es gleichgültig, ob die Randlinie γ Ecken in endlicher Anzahl aufweist oder nicht und welchen Zusammenhang $\mathfrak{G}$ hat.

Diese Herleitung zeigt nun aber, daß die Formel (2) allgemeinere Bedeutung hat als (3): Es braucht nur ein geschlossener Flächenstreifen mit der Mittellinie γ und der Normalen $\mathfrak{n}$ vorzuliegen. Diesem ist eindeutig als sein sphärisches Normalenbild die Kurve $\mathfrak{n}(s)$ zugeordnet, die den Flächenvektor $\mathfrak{F}$ besitzt. (2) gilt also auch dann, wenn in den Flächenstreifen $(\gamma, \mathfrak{n})$ gar keine ihn überall berührende Fläche eingespannt ist; in diesem Fall ist überhaupt kein Krümmungsmaß definiert, wohl aber könnte man ersichtlich auch dann von einer vektoriellen curvatura integra $\mathfrak{F}$ des geschlossenen Streifens $(\gamma, \mathfrak{n})$ sprechen.

Tatsächlich existiert gar nicht bei jedem geschlossenen Flächenstreifen, wenigstens wenn er mit Ecken behaftet ist, eine Fläche, die ihn in allen Punkten seiner Mittellinie berührt. Sind nämlich N_1 und N_2 die Normalkrümmungen, T_1 und T_2 die Normalwindungen zweier in einem Eckpunkt unter dem Winkel $\pi - \alpha$ einander berührend zusammentreffenden Streifen, so gilt, wenn diese in einer Umgebung der Ecke einer Fläche angehören:[7]

$$(N_1 - N_2)\cos\alpha - (T_1 + T_2)\sin\alpha = 0.$$

Das Bestehen dieser Relation in jeder Ecke eines Streifens ist also eine notwendige Bedingung dafür, daß es eine ihn überall berührende singularitätenfreie Fläche gibt; ob diese Bedingung auch hinreicht, scheint bisher noch nicht untersucht zu sein.

2. Dieses Ergebnis legt die Frage nahe, ob ähnliche Verhältnisse auch beim Gauß-Bonnetschen Integralsatz[8] vorliegen. In der Tat stellte sich dies schon vor mehr als hundert Jahren heraus, als Jacobi[9] den von Gauß ursprünglich für geodätische Dreiecke auf einer Fläche bewiesenen Satz auf Dreiecke ausdehnte, die von Raumkurvenbögen gebildet werden, die in den Ecken gemeinsame Hauptnormalen besitzen, und als daraufhin Clausen[10] bemerkte, daß man durch ein solches Dreieck durchaus nicht immer eine Fläche legen kann, auf der die Dreieckseiten geodätische Linien sind – wodurch eigentlich erst deutlich wurde, daß Jacobi, wenigstens in gewisser Hinsicht, eine Verallgemeinerung des Gaußschen Satzes geglückt war!

Diese Zusammenhänge werden klar durch die im folgenden skizzierte, von dem üblichen Wege abweichende Beweisführung, die ebensowenig wie die oben für den vektoriellen Fall gegebene von einer Integrabilitätsbedingung ausgeht:

Wir unterwerfen einen starren Körper $\mathfrak{K}$ einer infinitesimalen Parallelverschiebung im Sinne von Levi-Civita[11] längs $(\gamma, \mathfrak{n})$, d. h. einer Bewegung, die einen Körperpunkt P auf der Linie γ verschiebt, eine P enthaltende Körperebene ε stets berührend an dem Streifen $(\gamma, \mathfrak{n})$ entlang führt und dabei zu jeder Zeit t ohne Drehung um die Streifennormale $\mathfrak{n}$ vor sich geht; dann hat der Körper zur Zeit t den momentanen Drehvektor

$$\mathfrak{g}_t = \mathfrak{g}\,\frac{ds}{dt}$$

und vollzieht gegenüber dem begleitenden Dreikant $\mathfrak{B}$ des Streifens im gleichen Punkt P im allgemeinen eine relative Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit $-G\,\frac{ds}{dt}$, in jeder Ecke eine endliche Drehung durch den Winkel $-\alpha$ um die in beiden Körpern feste Normale $\mathfrak{n}$ als Drehachse. Bei einem vollen Umlauf um γ dreht sich also der Körper $\mathfrak{K}$ gegen den Begleitkörper $\mathfrak{B}$ um diese Achse durch den Winkel

$$-\int_\gamma G\,ds - \Sigma\,\alpha,$$

wo die Summe sich über alle Außenwinkel erstreckt.

Ist nun $\bar{\gamma}$ die Mittellinie eines geschlossenen Streifens, der dem ersten punktweise umkehrbar eindeutig und stetig so zugeordnet werden kann, daß in je zwei entsprechenden Punkten die Streifennormalen gleichgerichtet sind,[12] d. h. $\bar{\mathfrak{n}} = \mathfrak{n}$ ist, so ist für infinitesimale Parallelverschiebungen längs $(\gamma, \mathfrak{n})$ und $(\bar{\gamma}, \bar{\mathfrak{n}})$, bei denen Paare solcher Punkte gleichzeitig passiert werden,

$$\bar{\mathfrak{g}} = \bar{\mathfrak{n}} \times \frac{d\bar{\mathfrak{n}}}{dt} = \mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{n}}{dt} = \mathfrak{g}_t\,. \tag{4}$$

Da demnach, wie man übrigens auch ohne Rechnung einsehen kann, die infinitesimalen Parallelverschiebungen längs beider Streifen in ihren Drehbestandteilen übereinstimmen, so bleiben zwei längs $(\gamma, \mathfrak{n})$ und $(\bar{\gamma}, \mathfrak{n})$ gleichzeitig auf die beschriebene Art verschobene Körper $\mathfrak{K}$ und $\bar{\mathfrak{K}}$ einander stets euklidisch parallel. Die Begleitkörper $\mathfrak{B}$ und $\bar{\mathfrak{B}}$ von $(\gamma, \mathfrak{n})$ bzw. $(\bar{\gamma}, \mathfrak{n})$ nehmen aber nach dem Umlauf ihre Anfangslagen wieder ein, müssen sich also dann um ein ganzzahliges Vielfaches n von 2π gegeneinander gedreht haben; dabei haben die in den vier Körpern $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{B}$, $\overline{\mathfrak{K}}$, $\overline{\mathfrak{B}}$ festen Berührebenen jederzeit die gleiche Stellung. Daher muß

$$\int_{\gamma} G\,ds + \Sigma\alpha = \int_{\bar\gamma} \bar G\,d\bar s + \Sigma\bar\alpha - 2n\pi$$

sein; die Zahl n könnte man als die Voreilzahl von $\overline{\mathfrak{B}}$ gegen $\mathfrak{B}$ bezeichnen.

Nun kann man immer $(\bar\gamma, \mathfrak{n})$ als den sphärischen Streifen wählen, dessen Mittellinie das Normalenbild von $(\gamma, \mathfrak{n})$ ist; denn dessen Normale stimmt ja mit $\mathfrak{n}$ überein. Dann ist aber

$$\int_{\bar\gamma} \bar G\,d\bar s + \Sigma\bar\alpha,$$

wie man unmittelbar anschaulich erkennen, aber auch leicht durch Rechnung nachweisen kann,[13] der Inhalt $\bar F$ der Fläche, die ein Viertelbogen der sphärischen Tangente von $\bar\gamma$ auf der Einheitskugel, die $\bar\gamma$ trägt, bei einem Umlauf überstreicht; dabei rechnen wir die von einem Eckpunkt von $\bar\gamma$ ausgehenden Bögen, die innerhalb des zugehörigen Außenwinkels verlaufen, zu den sphärischen Tangenten. Es gilt somit

$$\int_{\gamma} G\,ds + \Sigma\alpha = \bar F - 2n\pi. \tag{5}$$

Der Wert der ganzen Zahl n ist zunächst nicht zu ermitteln.[14]

Nur in den Fällen, in denen sich in den Streifen $(\gamma, \mathfrak{n})$ eine ihn überall berührende, an jeder Stelle reguläre Fläche legen läßt, kann jedoch von der curvatura integra des von γ umrandeten Flächenstückes als Skalar die Rede sein. Denn nur dann entspricht diesem eindeutig einer der von $\bar\gamma$ begrenzten Bereiche der Einheitskugel, dessen Inhalt ist:

$$F = \int_{\mathfrak{G}} K\,df.$$

Um aber die Beziehung zu finden, die zwischen F und $\bar F$ bestehen muß, tut man gut, sich fürs erste auf Kurven $\bar\gamma$ besonders einfacher Art zu beschränken, etwa auf genügend kleine Dreiecke mit zwei geodätischen Seiten. Man erkennt dann zunächst, daß die von einem halben Bogen der sphärischen Tangente von $\bar\gamma$

überstrichene Fläche zusammen mit F und der F diametral gegenüberliegenden Fläche genau einmal die Kugel überdeckt, daß somit $2F + 2\overline{F} = 4\pi$ ist. Ferner stellt man auf die übliche Weise durch Zusammenziehen von γ auf einen Punkt fest, daß die Voreilzahl $n = 0$ zu setzen ist, vorausgesetzt, daß $\mathfrak{G}$ von γ im positiven Sinn umfahren wird; hierbei werden Stetigkeitssätze der Kinematik gebraucht. So ergibt sich die wohlbekannte Gleichung:

$$\int_{\gamma} G\,ds + \Sigma\alpha = 2\pi - \int_{\mathfrak{G}} K\,df. \tag{6}$$

Stellt jedoch $\mathfrak{G}$ ein Kontinuum von beliebigem endlichen Zusammenhang dar, so kann man es auf Grund des Heine-Borelschen Theorems in eine endliche Anzahl f von Dreiecken der soeben betrachteten Art zerlegen und auf jedes von diesen (6) anwenden. Addition der für diese Teildreiecke geltenden f Gleichungen führt dann, wenn die Anzahlen der inneren Ecken und Kanten der vorgenommenen topologischen Triangulierung mit e bzw. k bezeichnet werden, bei Beachtung der Werte der Summen[15] der je um einen inneren oder an einem äußeren Eckpunkt zusammenstoßenden Innenwinkel der Größe $\pi - \alpha$, auf den allgemeinen Gauß-Bonnetschen Integralsatz

$$\int_{\gamma} G\,ds + \Sigma\alpha + \int_{\mathfrak{G}} K\,df + 2c\pi = 0, \tag{7}$$

wo

$$c = -e + k - f$$

die Charakteristik von $\mathfrak{G}$ im Sinne der analysis situs bedeutet. Damit ist auch ein Weg zu einer weiteren Deutung von n gefunden. Der Rand braucht nicht aus nur einem Zug zu bestehen.

Bei diesem, hier zum Teil nur in seinen Grundzügen durchgeführten Gedankengang ist es wohl aufgefallen, wie viel verwickelter der Übergang von (5) zu (6) oder gar zu (7) war als der von (2) zu (3). Das hat einen tieferen Grund:

Bei (2) und (5) handelt es sich um Sätze der Streifentheorie, die ihrer Natur nach nur im euklidischen Raum sinnvoll sein können. Das gilt nun auch für (3), jedoch, zum Unterschied davon, nicht für (6); denn, da K und ebenso G oder, was auf dasselbe hinausläuft, das Gesetz der infinitesimalen Parallelverschiebung der

Berührebene durch den Maßtensor der Fläche allein bestimmt ist, gilt der Gauß-Bonnetsche Integralsatz, wie man weiß, in jeder zweidimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit ohne Rücksicht darauf, ob sie in einen metrischen Raum von mehr Dimensionen eingelagert ist oder nicht, worin eben seine große Bedeutung beschlossen liegt.

Anmerkungen.

[1] Ernesto Cesaro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, p. 250–53.

[2] Ein Beweis für diese Beziehung, der ihrem Charakter als einer nicht nur notwendigen, sondern auch hinreichenden Bedingung gerecht wird, findet sich in einer Arbeit des Verfassers in den Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1942, S. 6–10. Die dort durchgeführten Überlegungen sind durch den Gebrauch dualer Vektoren allgemeiner, als es für den hier verfolgten Zweck nötig wäre; sie gelten aber gerade in dem hier benötigten Umfang, wenn man die dort verwendeten Vektoren als gewöhnliche auffaßt: die betrachteten Bewegungen des Raumes sind dann Drehungen um einen festen Punkt. Bei einer allgemeinen Bewegung bestimmen ja die Drehungsanteile die Drehvektoren.

[3] Siehe die Note des Verfassers: Die Grundgleichungen der Flächentheorie und ihr Ausdruck durch Integralsätze. Sitz.-Ber. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1929, S. 165 ff. Dort wird noch eine zweite vektorielle Integralformel bewiesen. (Vgl. auch Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 39, 1930, S. 180 f., Fußnote.)

[4] Die Voraussetzungen, unter denen die folgenden Überlegungen des Textes gültig sind, seien hier ein für allemal genannt: γ sei die rektifizierbare Mittellinie (Leitlinie) eines zusammenhängenden, geschlossenen Flächenstreifens von endlichem Umfang. (Bezüglich des Begriffes des Streifens sei verwiesen auf die 324. Aufgabe im Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 53, 1943, 2. Abt., S. 33. Vgl. auch Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 9, 1929, S. 216, wo nur „Band" statt „Streifen" gesagt ist; das Wort Band bleibe nach dem Vorschlag von S. Finsterwalder für geodätische Streifen vorbehalten.) Die Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{n}$ von Tangente und Normale seien stetig differenzierbare Funktionen der Bogenlänge s, so daß auch $\mathfrak{d} = \mathfrak{g} + G\mathfrak{n}$ und im besonderen G und $\mathfrak{g}$ stetig von s abhängen; nur in einer endlichen Anzahl von Eckpunkten darf die Tangente einen endlichen Sprung erleiden, ebenso dort auch $\frac{d\mathfrak{n}}{ds}$, G und $\mathfrak{g}$, nicht jedoch $\mathfrak{n}$. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil angenommen wird, gehöre der Streifen einem überall regulären Flächenstück an, auf dem γ ein beschränktes Gebiet begrenze; die Fläche sei quadrierbar und besitze in jedem Punkt des Integrationsbereiches $\mathfrak{G}$ mit dem Rand γ eine Normale $\mathfrak{n}$ und ein Krümmungsmaß K, die stetig vom Ort abhängen. Bei den betrachteten Bewegungen soll jeder im Endlichen gelegene Punkt eine stetige Geschwindigkeit besitzen.

[5] Für jeden mit dem Begleitkörper eines Streifens – bestimmt durch das aus Normale $\mathfrak{n}$, Tangente $\mathfrak{t}$ und Berührlot $\mathfrak{f} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{t}$ bestehende Dreibein – fest verbundenen Vektor $\mathfrak{q}$ gilt nach einer grundlegenden Formel der Kinematik:

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q},$$

da $\mathfrak{d}$ als der Drehvektor derjenigen Bewegung des begleitenden Dreikants definiert ist, bei der dessen Scheitel sich mit der Geschwindigkeit 1 auf der Leitlinie bewegt. (Die Beziehung umfaßt bekanntlich alle Ableitungsgleichungen der Differentialgeometrie des euklidischen Raumes.) Vgl. M. Lagally, Die Verwendung des begleitenden Dreibeins für den Aufbau der natürlichen Geometrie, diese Sitz.-Ber. 1927, S. 5 ff., M. Lagally, Vorl. ü. Vektorrechnung, Leipzig 1928, S. 60–98, ferner die in den Anm. 4 u. 3 zitierten Arbeiten in der ZAMM, S. 216 (14), und im Jahresber. d. DMV, S. 168 ff.

[6] Siehe diese Sitz.-Ber. 1944, S. 108, sowie die dort angeführte Literatur.

[7] Vgl. C. Burali-Forti, Rend. d. circ. mat. d. Palermo 33, 1912, p. 36, Anm. 26, und J. Knoblauch, Grundl. d. Diff.-Geom., Leipzig und Berlin 1913, S. 257, auch die oben zitierte Arbeit im Jahresber. d. DMV 39, S. 178 (34). Die Formel umfaßt (für $\alpha = \pm \pi/2$) den Bonnetschen Satz, der besagt, daß zwei sich senkrecht schneidende Flächenkurven im Schnittpunkt entgegengesetzt gleiche Normalwindungen (geodätische Windungen) haben. Siehe Cesaro l. c. p. 156.

[8] C. F. Gauß bewies den Satz für geodätische Dreiecke und veröffentlichte ihn im Jahre 1827 in seinen Disquisitiones generales circa superficies curvas (Werke IV, S. 217 ff.). Er kam der von O. Bonnet in seinem Mémoire sur la théorie générale des surfaces (Journal de l'école polytechnique, 19, p. 131) im Jahre 1848 gegebenen allgemeinen Fassung schon ganz nahe; denn es liegt nahe, seinen Satz auf geodätische Polygone mit beliebig vielen Ecken auszudehnen, und es lag für die damaligen Mathematiker nahe, eine Kurve als „Polygon mit unendlich vielen, unendlich kleinen Seiten" anzusehen. Tatsächlich hatte Gauß auch den Begriff der geodätischen Krümmung, die er „Seitenkrümmung" nannte, schon zwischen 1822 und 1825 als „Quotient des Winkels der in zwei konsekutiven Punkten berührenden geodätischen Linien zum Linienelement zwischen diesen Punkten" eingeführt (Werke VIII, S. 386 ff.), ehe E. F. A. Minding einen Ausdruck für sie veröffentlichte (Crelles Journal 5, 1830, S. 297, und 6, 1830, S. 159).

[9] C. G. J. Jacobi, Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de curvatura integra trianguli in data superficie a lineis brevissimis formati. Crelles Journal 16, 1837, S. 344 (Werke 7, S. 26 ff.). Jacobis Beweis arbeitete mit viel geringerem analytischem Aufwand als der Gaußsche. J. Steiner geometrisierte den Beweis noch weiter (Monatshefte der Berliner Akademie 1839), so daß, wie es in einer zeitgenössischen Besprechung heißt, „die Beweisgründe aus einer fast unmittelbaren geometrischen Anschauung hervorgehen".

[10] Astronomische Nachrichten 20, 1842, S. 115 ff. Hierzu vergleiche man auch Jacobis Werke 7, S. 34 ff.

[11] T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una varietà qualunque. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 42, 1917, p. 173–205.

Ähnliche Gedankengänge finden sich bei W. Thomson and P. G. Tait, Treatise on Natural Philosophy, I (Cambridge 1912), sect. 137 (in der Übersetzung von H. Helmholtz und G. Wertheim, Handbuch der theoretischen Physik, I, Braunschweig 1871, S. 101 f.).

Die Hauptgedanken der folgenden Ausführungen des Textes trug der Verfasser im Mathematischen Kolloquium der Universität und Technischen Hochschule München am 3. III. 1936 vor.

Zusatz bei der Korrektur: Herr O. Baier, der sich ebenfalls, jedoch unter anderen Gesichtspunkten, um die Vereinfachung des Beweises des Gauß-Bonnetschen Satzes bemüht, machte den Verfasser auf eine Arbeit aufmerksam, die auch an Thomson und Tait anknüpft: W. Scherrer, Eine Formel für die geodätische Krümmung. Commentarii Mathematici Helvetici, 16 (1943), S. 101–104. In diesem Zusammenhang sei auch auf Arbeiten von R. Sauer hingewiesen, die in diesen Sitz.-Ber. 1928, S. 97–104, und im Jahresber. d. DMV. 38 (1929), 2. Abt., S. 8–10, stehen und die auf Gedanken von S. Finsterwalder weiterbauen.

[12] S. Finsterwalder nennt solche Streifenpaare „stellungsverwandt".

Die Übereinstimmung der in den infinitesimalen Parallelverschiebungen längs stellungsverwandter Streifen enthaltenen Drehungen kann, statt aus der Gleichung (4), auch daraus geschlossen werden, daß man sie durch Abrollenlassen einer zu den Berührebenen parallelen Ebene von einem und demselben Kegel erhalten kann, der als Hüllfläche einer zu eben diesen Ebenen parallelen Ebene durch einen festen Punkt, also als Polarkegel der Normalen $\mathfrak{n}$ eindeutig bestimmt ist.

[13] Die Fläche besteht, wenn zunächst die Außenwinkelflächen weggelassen werden, aus den Punkten $\mathfrak{x} = \mathfrak{n}\cos\varphi + \mathfrak{n}'\sin\varphi$, wo $\mathfrak{n}' = \dfrac{d\mathfrak{n}}{d\bar{s}}$ sei $(0 \leqq \varphi \leqq \pi/2)$. Ihr Inhalt ist, da $\mathfrak{x}$ der Einheitsvektor der Flächennormalen im Punkte $\mathfrak{x}$ ist, wenn l den Umfang von $\bar{\gamma}$ bedeutet, auf Grund der differentialgeometrischen Erklärung des Flächeninhalts einer orientierten Fläche

$$\int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2}\int\limits_{\bar{s}=0}^{l} \mathfrak{x}\,\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\varphi}\,\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial\bar{s}}\,d\varphi\,d\bar{s} =$$

$$\iint (\mathfrak{n}\cos\varphi + \mathfrak{n}'\sin\varphi)\,(-\mathfrak{n}\sin\varphi + \mathfrak{n}'\cos\varphi)\,(\mathfrak{n}'\cos\varphi + \mathfrak{n}''\sin\varphi)\,d\varphi\,d\bar{s}$$
$$= \iint \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}'\,\mathfrak{n}''\sin\varphi\,d\varphi\,d\bar{s}.$$

Da $\mathfrak{n}'$ der Einheitsvektor der Tangente von $\bar{\gamma}$ ist, so ist nach der Grundformel der Flächentheorie (siehe Anmerkung 5) wegen $\mathfrak{n}\,\mathfrak{n}' = 0$:

$$\mathfrak{n}'' = \bar{\mathfrak{d}} \times \mathfrak{n}', \text{ also } \mathfrak{n}\,\mathfrak{n}'\,\mathfrak{n}'' = \mathfrak{n}\,(\mathfrak{n}' \times \bar{\mathfrak{d}} \times \mathfrak{n}') = \bar{\mathfrak{d}}\,\mathfrak{n} = \bar{G}.$$

Folglich ist, wenn nun noch die Außenwinkelflächen, die die Größe $\bar{\alpha}$ haben, hinzugenommen werden:

$$\bar{F} = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2}\int\limits_{\bar{s}=0}^{l} \bar{G}\sin\varphi\,d\varphi\,d\bar{s} + \sum\bar{\alpha} = \int\limits_{\bar{\gamma}} \bar{G}\,d\bar{s} + \sum\bar{\alpha}.$$

[14] Hängt n vielleicht mit der Verschlingungszahl der beiden Ränder des zu $(\gamma, \mathfrak{n})$ senkrechten Streifens zusammen, die man durch Abtragen einer genügend kleinen, konstanten Strecke auf der Normalen $\mathfrak{n}$ erhält?

[15] Die Linienintegrale über die inneren Kanten heben sich gegenseitig auf. Da, wenn β der neben α' liegende Innenwinkel ist, $\alpha' = \pi - \beta$ ist, so liefert die Summe der Außenwinkel an jeder einzelnen inneren Ecke so oft den Beitrag π, als in ihr Kanten zusammenstoßen, und einmal den von den um die Ecke aufgereihten Innenwinkeln herrührenden Beitrag -2π, an jeder äußeren, d. h. auf γ liegenden Ecke einmal mehr den Beitrag π, als in sie innere Kanten einmünden, und einmal wieder den von den Innenwinkeln an dieser Ecke herrührenden Beitrag $\alpha - \pi$, wobei α den Außenwinkel von γ an dieser Ecke bedeutet, der auch verschwinden kann. Bei dieser Zählung tritt jede innere Kante im ganzen zweimal auf; deshalb ist die Gesamtsumme aller Außenwinkel sämtlicher Teildreiecke gleich $2k\pi - 2e\pi + \sum \alpha$, wo nur noch die Außenwinkel α der Kurve γ in Erscheinung treten.

Schlußbemerkung:

Herleitungen der oben betrachteten Integralsätze, die von Integrabilitätsbedingungen ausgehen, können diese Sätze nicht in dem Geltungsumfang liefern, der in den Gleichungen (2) und (5) gewonnen wurde; denn Integrabilitätsbedingungen setzen das Vorhandensein von Flächen voraus, welche die Streifen enthalten, an deren Leitlinien entlang zu integrieren ist, während doch gerade festgestellt wurde (auf S. 121), daß nicht durch jeden Flächenstreifen eine überall reguläre Flächeberührend hindurchgelegt werden kann.

Zu der im Text (S. 124 unten) betonten Beschränkung der Gültigkeit von (2) und (5) auf den euklidischen Raum ist zu sagen, daß wegen der Biegungsinvarianz von G und α und wegen der Ganzzahligkeit von n aus der Beziehung (5) folgt, daß bei einer stetigen Verbiegung des Streifens $(\gamma, \mathfrak{n})$ sich zwar die Gestalt, nicht aber die Größe des Stückes der Kugeloberfläche, dessen Inhalt mit $\overline{F}$ bezeichnet wurde, verändern kann. Bei einer Deutung von n nach (7) ist der Anteil von $\mathfrak{c}$, der auf n entfällt, nicht schon durch den Streifen allein bestimmt; bei der Loslösung aus dem euklidischen Raum, die nur bei (6) und (7) möglich ist und auch hier nur dann zu sinnvollen Ergebnissen führt, wenn sich $(\gamma, \mathfrak{n})$ als Grenzstreifen einer Fläche auffassen läßt, verliert die Zahl n nicht nur ihre ursprüngliche Bedeutung als „Voreilzahl", sondern möglicherweise überhaupt jede eigene Deutbarkeit, wenn nicht vielleicht der in Anmerkung 14 gegebene Hinweis oder eine ähnliche Anregung einen Zugang zu einer von jeder äußeren Metrik und sogar von der Einspannbarkeit einer Fläche unabhängigen Deutung eröffnet.

In diesem Zusammenhang sei auch hervorgehoben, daß der Ausdruck des Flächenvektors durch ein Randintegral, der oben (auf S. 120) benützt wurde, zwar aus einer Integrabilitätsbedingung ableitbar ist, jedoch auch unabhängig von einer solchen aufgestellt werden kann; Flächenstreifen spielen hierbei freilich keine Rolle.