Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1947

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei in Nördlingen

Die Methoden der Koinzidenzen zweier Sterne in Höhe bei Ortsbestimmungen aus der Luft und zur See.

Von Erich Schoenberg in München.

Mit einer Figur.

Vorgelegt am 3. Oktober 1947.

Übersicht.

1. Die Theorie der Methoden der Koinzidenz in Höhe.
2. Die Bestimmung der Breite.
3. Die Bestimmung der Ortszeit.
4. Die Auswahl der Sternpaare.
5. Das Instrument und die Art der Beobachtung.

Die Hauptschwierigkeit der astronomischen Ortsbestimmung im Flugzeug sind die Scheinlotschwankungen, die dadurch entstehen, daß das Flugzeug nicht mit konstanter Geschwindigkeit fliegt, sondern Beschleunigungen erfährt, wodurch die Lotrichtung aus der Richtung der Schwerkraft abgelenkt wird. Diese Ablenkungen betragen zeitweise bis zu 2^0. Auf das Scheinlot und den ihm entsprechenden Zenitpunkt am Himmel beziehen wir die vom Flugzeug gemessenen Zenitdistanzen. Nur durch Mittelung über Zeiträume, in denen sich die periodische Schwankung der Lotrichtung eliminieren läßt, kann man deshalb Zenitdistanzen von Gestirnen mit der Genauigkeit messen, die für die Ortsbestimmung vom Flugzeug aus gefordert wird. Die Dauer, über die gemittelt werden muß, ist bei verschiedenen Flugzeugtypen verschieden und müßte durch besondere Beobachtungen der Perioden der Scheinlotschwankungen ermittelt werden. Nach den bisherigen Erfahrungen bleiben auch bei Anwendung automatischer Mittelungsgeräte im Mittel über 3 Minuten in Einzelfällen Fehler von $8'$ übrig. Es ist erwünscht, eine Beobachtungsmethode zu entwickeln, in der die Zeitdauer der Beobachtung verkürzt wird. Auch die Auswertungszeit ist bei der jetzt üblichen Methode der Höhengleichen für die Geschwindigkeit, mit der das Flugzeug seinen Ort ändert, noch zu groß. Es wäre erwünscht, die Beobachtung und Auswertung in 3 bis 4 Minuten erledigen zu können.

Die hier vorgeschlagenen Methoden dürften beide Ziele, Befreiung vom Einfluß der Scheinlotschwankung und Verkürzung der Auswertungszeit, erreichen, wenn es gelingen sollte, ein für diese Beobachtungsart geeignetes Instrument zu konstruieren. Die Idee eines solchen Instruments soll am Schluß dieser Arbeit mitgeteilt werden.

Die Methoden der Koinzidenz zweier Sterne in Höhe sind mit den bekannten Methoden gleicher Zenitdistanzen symmetrisch zum ersten Vertikal von Pewzow und symmetrisch zum Meridian von Zinger verwandt. Die erste dient zur Bestimmung der Breite, die zweite zur Bestimmung der Ortszeit. Die Abänderung ist so wesentlich und für die Zwecke der Flug- und Seenavigation so bedeutungsvoll, daß wir sie unter einem eigenen Namen der „Methode der Koinzidenzen in Höhe" bekanntgeben. Bei den Methoden von Pewzow und Zinger werden zwei Sterne nacheinander (im Abstande von 5 bis 20 Minuten) beobachtet, wobei das Fernrohr im Azimut verstellt und die Gleichheit der Höhen durch eine Libelle kontrolliert wird. Bei den hier vorgeschlagenen Methoden wird nur ein Moment der wirklichen Koinzidenz in Höhe beobachtet, indem durch einen freihängenden Spiegel der zweite Stern des Paares gleichzeitig mit dem ersten, der direkt gesichtet wird, ins Gesichtsfeld gespiegelt wird und man den Moment der Überdeckung der Sternscheibchen beider Sterne beobachtet. Dieser Moment ist die einzige Größe, die außer den bekannten Koordinaten der Sterne in die Rechnung eingeht; irgendwelche Winkelmessungen sind nicht auszuführen. Die Achse des freihängenden Spiegels, um die derselbe im Azimut drehbar ist, stellt sich ins Scheinlot ein, so daß der Moment der Gleichheit der Höhen auch hier in bezug auf den Scheinhorizont gemessen wird. Eine andere Möglichkeit, gleiche Höhen festzustellen, wäre die Beobachtung durch ein Doppelfernrohr mit gemeinsamem Einblick, das kardanisch aufgehängt, sich automatisch im Scheinlot einstellt. Der Vorteil dieser Methoden gegenüber allen anderen auf wirklichen Höhenmessungen beruhenden für die Elimination der Fehler des Scheinlots besteht darin, daß bei geeigneter Wahl der Sterne diese Fehler das Ergebnis der Ortsbestimmung nur in sehr vermindertem Maße beeinflussen.

Ein anderer Vorteil wäre die Leichtigkeit der Reduktion. Wenn einmal die große Arbeit der Vorausberechnung geeigneter Sternpaare für alle Breitengrade und Sternzeiten ausgeführt wäre, dürfte die Auswertung der Beobachtung weniger als eine Minute beanspruchen.

1. Die Theorie der Methoden der Koinzidenz in Höhe.

Die gemeinsame Zenitdistanz beider Sterne eines Paares sei z, die Azimute a_1 und a_2, die geographische Breite sei φ, die der veränderten Lotrichtung entsprechende Breite φ', die Stundenwinkel seien t_1 und t_2, die lokale Sternzeit gleicher Zenitdistanz sei τ. Es ist dann

$$t_1 = \tau - \alpha_1, \quad t_2 = \tau - \alpha_2.$$

Das nautische Dreieck gibt als Bedingung der Gleichheit der Zenitdistanzen

$$\sin\varphi \sin\delta_1 + \cos\varphi \cos\delta_1 \cos t_1 = \sin\varphi \sin\delta_2 + \cos\varphi \cos\delta_2 \cos t_2,$$

woraus folgt

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}\varphi\,(\sin\delta_1 - \sin\delta_2) &= \cos\delta_2 \cos t_2 - \cos\delta_1 \cos t_1 = \\ &= \cos\delta_2\,(\cos\tau \cos\alpha_2 + \sin\tau \sin\alpha_2) - \\ &- \cos\delta_1\,(\cos\tau \cos\alpha_1 + \sin\tau \sin\alpha_1) = \\ &= \cos\tau\,(\cos\delta_2 \cos\alpha_2 - \cos\delta_1 \cos\alpha_1) + \\ &+ \sin\tau\,(\cos\delta_2 \sin\alpha_2 - \cos\delta_1 \sin\alpha_1). \end{aligned}$$

Bezeichnet man

$$\cos\delta_2 \sin\alpha_2 - \cos\delta_1 \sin\alpha_1 = m \sin M$$

$$\cos\delta_2 \cos\alpha_2 - \cos\delta_1 \cos\alpha_1 = m \cos M,$$

wo m immer > 0 gemeint ist, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} M = \frac{\cos\delta_2 \sin\alpha_2 - \cos\delta_1 \sin\alpha_1}{\cos\delta_2 \cos\alpha_2 - \cos\delta_1 \cos\alpha_1}.$$

Bezeichnet man noch

$$\sin\delta_1 - \sin\delta_2 = D,$$

so erhält man die Grundgleichung der Methoden der Koinzidenzen in Höhe:

$$D \operatorname{tg} \varphi = m \cos(\tau - M). \qquad \mathrm{I}$$

Die Größen m, M und D hängen nur von den Koordinaten der Sterne ab, gelten also für die ganze Erde und für so große Zeiträume unverändert, als man die Präzession vernachlässigen kann. Bezeichnet man noch

$$\frac{m}{D} = m',$$

so enthält die Grundgleichung der Methode der Koinzidenzen nur zwei, ausschließlich von den Koordinaten der Sterne abhängige Größen m' und M, außer dem zu bestimmenden φ oder τ:

$$\operatorname{tg} \varphi = m' \cos(\tau - M). \qquad \text{(A)}$$

Bei der Bestimmung der Breite ist τ die aus dem Uhrstande und der gegißten Länge bestimmte Ortssternzeit. Bei der Bestimmung der Ortssternzeit τ aus der gegißten Breite φ benutzt man die Gleichung

$$\cos(\tau - M) = \frac{1}{m'} \operatorname{tg} \varphi. \qquad \text{(B)}$$

Die Länge λ findet man aus der Gleichung

$$\lambda = \text{Greenw. Sternzeit} - \text{Ortssternzeit}.$$

Da das Tafelwerk die für jede Breite und Sternzeit gültigen Sternpaare und außerdem für jedes derselben die Größen m' und M enthalten muß, so kann es auch die Auflösung der Gleichungen (A) oder (B) in Form eines Täfelchens enthalten, aus dem man die Breite φ oder die Ortszeit τ direkt entnehmen könnte. Die Auswertung der Beobachtung dürfte dann jedenfalls nicht länger als eine Minute beanspruchen.

Die einfache Grundgleichung (A) hat eine doppelte Lösung für zwei Werte $\tau - M$, deren Summe 2π ist. Wir lernen daraus die der Anschauung nicht unmittelbar selbstverständliche und in der Literatur über sphärische und praktische Astronomie m. W. nirgends erwähnte Tatsache kennen, daß, wenn zwei Sterne für einen gegebenen Ort einmal die gleiche Höhe über dem Horizonte erreichen, sie es innerhalb von 24 Sternstunden noch einmal tun. Manchmal liegen dann freilich die gleichen Höhen unterhalb des Horizontes, aber meistens können beide Momente gleicher Höhen bei der Methode der Koinzidenzen benutzt werden.

Die Auswahl der Sternpaare muß so getroffen werden, daß der Einfluß der Lotabweichung möglichst gering wird. Wir brauchen dazu eine Differentialformel, die die Fehler $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ zueinander in Beziehung setzt. Hierbei verstehen wir unter $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ zunächst die Fehler in Breite und Ortszeit, die durch die Verlagerung des Zenitpunktes und damit der Richtung des Meridians entstehen. Die erhaltene Schlußformel wird dann aber auch gelten für den Fehler, der aus der unrichtig angenommenen gegißten Länge oder Breite in der anderen Koordinate entsteht.

Die Verlagerung des Zenitpunktes von Z nach Z' hat eine neue scheinbare Breite φ' und eine scheinbare Ortszeit τ' des Moments gleicher Höhen in bezug auf den Scheinhorizont zur Folge. Auch die gemeinsame Zenitdistanz erfährt eine Veränderung. Die Stundenwinkel der beiden Sterne im Moment τ' seien t_1' und t_2'.

$$\Delta\tau = t_1' - t_1 = t_2' - t_2$$

Es gelten dann die aus der Gleichheit der wahren und der scheinbaren Zenitdistanzen der beiden Sterne folgenden Gleichungen

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\cos\delta_2\cos t_2 - \cos\delta_1\cos t_1}{\sin\delta_1 - \sin\delta_2}, \quad \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\cos\delta_2\cos t_2' - \cos\delta_1\cos t_1'}{\sin\delta_1 - \sin\delta_2}. \quad \text{(C)}$$

Setzt man

$$\varphi' = \varphi + \Delta\varphi, \quad t_1' = t_1 + \Delta t_1; \quad t_2' = t_2 + \Delta t_2$$

und wendet auf die zweite Gleichung (C) die Taylor-Entwicklung für

$$\operatorname{tg}(\varphi + \Delta\varphi), \quad \cos(t_2 + \Delta t_2) \text{ und } \cos(t_1 + \Delta t_1)$$

an, wobei man sich auf erste Potenzen von $\Delta\varphi, \Delta t_1, \Delta t_2$ beschränkt, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\varphi + \frac{\Delta\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{D}\,[\cos\delta_2(\cos t_2 - \sin t_2\,\Delta t_2) -$$
$$- \cos\delta_1(\cos t_1 - \sin t_1\,\Delta t_1)].$$

Nach Subtraktion der ersten Gleichung (C) bleibt

$$\Delta \varphi = -\frac{1}{D} \cos^2 \varphi \, [\cos \delta_2 \sin t_2 \, \Delta t_2 - \cos \delta_1 \sin t_1 \, \Delta t_1] =$$
$$= -\frac{1}{D} \cos^2 \varphi \, [\sin a_2 \sin z_2 \, \Delta t_2 - \sin a_1 \sin z_1 \, \Delta t_1].$$

Nun ist aber

$$\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta \tau \qquad (\alpha)$$

und daher haben wir endgültig

$$\Delta \varphi = \frac{1}{D} \cos^2 \varphi \sin z \, [\sin a_1 - \sin a_2] \, \Delta \tau. \qquad \text{(D)}$$

Diese Gleichung läßt sich noch wesentlich vereinfachen. Aus den Gleichungen

$$\sin \delta_1 = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos a_1$$
$$\sin \delta_2 = \sin \varphi \cos z + \cos \varphi \sin z \cos a_2$$

folgt

$$D = \sin \delta_1 - \sin \delta_2 = \cos \varphi \sin z \, (\cos a_1 - \cos a_2)$$

und dieses in (D) eingesetzt, ergibt

$$\Delta \varphi = \cos \varphi \operatorname{cotg} \frac{a_1 + a_2}{2} \, \Delta \tau. \qquad \text{(E)}$$

Die Gleichungen (D) und (E) geben die gesuchte Beziehung zwischen $\Delta \varphi$ und $\Delta \tau$. Man ersieht aus (D), daß der Einfluß des Fehlers $\Delta \tau$, verursacht durch die Lotschwankung, oder auch durch eine falsch angesetzte Ortszeit, auf die Polhöhe verschwindet, wenn

$$\sin a_1 = \sin a_2$$

und da die Gleichung I lehrt, daß $D = \sin \delta_1 - \sin \delta_2$, nicht Null sein darf, wenn man sie zur Bestimmung der Breite anwenden will, so folgt, daß die günstigste Lage der Sterne für die Bestimmung der Polhöhe durch die Bedingung

$$a_2 = \pi - a_1 \qquad \text{(F)}$$

gegeben ist, d. h. die beiden Sterne des Breitenpaares müssen symmetrisch zum ersten Vertikal auf der Ost- oder Westseite des Himmels liegen. Völlige Gleichheit der Zenitdistanzen und Azimute (letztere hier für den nördlichen Stern von der Nordseite, für den südlichen von der Südseite des Meridians gerechnet) wird nur in seltenen Ausnahmefällen erreichbar sein. Wie groß die zulässige Differenz der in oben definierter Weise gerechneten Azimute sein darf, um den Einfluß der Lotabweichung in gewünschtem Grade abzuschwächen, wird weiter erörtert werden.

Bei der Auflösung der Gleichung (B) zur Bestimmung der Ortszeit bei vorgegebener Breite gilt als Beziehung zwischen $\Delta\varphi$ und $\Delta\tau$ die Gleichung

$$\Delta\tau = \sec\varphi \, tg \, \frac{a_1 + a_2}{2} \, \Delta\varphi, \tag{G}$$

aus der man ersieht, daß der Fehler $\Delta\tau$ verschwindet, wenn

$$a_1 + a_2 = 0 \text{ oder } 2\pi \tag{H}$$

ist, d. h. wenn die beiden Sterne des Paares symmetrisch zum Meridian liegen. Gleiche Höhen und gleiche Azimute symmetrisch zum Meridian im gleichen Zeitpunkte können nur Sterne haben mit gleicher Deklination, für die $D = 0$ ist. Das folgt auch aus der Gleichung (D), wenn wir sie in bezug auf $\Delta\tau$ auflösen, denn der Klammerausdruck $(\sin a_1 - \sin a_2)$ ist in diesem Falle $2 \sin a_1$, also eine endliche Größe. Die Bestimmung der Ortszeit wird deshalb unabhängig vom Fehler in der Breite, wenn die Sterne des Sternpaares gleiche Deklinationen haben und symmetrisch zum Meridian in gleichen Azimuten liegen.

2. Die Bestimmung der Breite.

Die Formel (E) transformieren wir noch, indem wir die Azimutdifferenz der beiden Sterne des Paares Δa einführen

$$a_2 = \pi - a_1 + \Delta a.$$

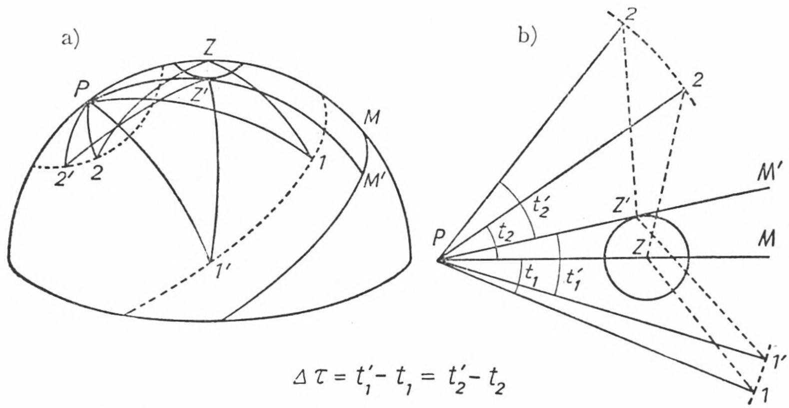
Dann wird

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\Delta a}{2}$$

und wenn wir noch $\Delta\tau$ in Zeitminuten ausdrücken, erhalten wir statt (E)

$$\Delta\varphi = -15 \cos\varphi \, \mathrm{tg} \, \frac{\Delta a}{2} \, \Delta\tau^m. \tag{I}$$

Es fragt sich jetzt, wie groß muß man $\Delta\tau$ annehmen, um den möglichen Scheinlotschwankungen Rechnung zu tragen, und wie groß ist der Einfluß dieses $\Delta\tau$ auf die Breitenbestimmung bei gegebenem Δa. Dazu betrachten wir die Figur 1. Der ver-



a) Bestimmung der Breite b) Bestimmung der Ortszeit

Figur 1

lagerte Zenitpunkt Z' kann einen beliebigen Ort in der Umgebung des wahren Zenits Z innerhalb eines Kreises von 1^0 Abstand einnehmen. Wir definieren seine Lage durch diesen Abstand $ZZ' = \alpha$, sein Azimut β und den Stundenwinkel $\Delta\tau_1$; dann ist:

$$\sin\Delta\tau_1 = \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\varphi'}, \text{ oder } \Delta\tau_1 = \frac{\alpha\sin\beta}{\cos\varphi'}.$$

Bei $\varphi' = 50^0$ und dem maximalen Werte von $\sin\beta = 1$ wird $\Delta\tau_1 = 6.2$ Minuten. Damit ist aber der Einfluß der Lotschwankung auf $\Delta\tau$ noch nicht erschöpft. Beobachtet wird der Moment der Gleichheit der scheinbaren Zenitdistanzen $Z'\,1'$ und $Z'\,2'$, die mit den wahren, für die Sternzeit τ gültigen $Z\,1$ und $Z\,2$ nicht identisch sind. Der Wert von $\Delta\tau$ setzt sich deshalb zusammen aus der oben en definiert Verlagerung des Meridians $\Delta\tau_1$ und dem Winkel $1\,P\,1' = 2\,P\,2' = \Delta\tau_2$. Es ist aber geometrisch leicht einzusehen, daß der Maximalwert von $\Delta\tau_1$ mit dem Nullwert von $\Delta\tau_2$ zusammenfällt und umgekehrt.*) Wir dürfen des-

*) Die Lotabweichungen erfolgen im Wesentlichen in dem Vertikal der Flugrichtung, d. h. bei Bestimmung der Breite im ersten Vertikal, bei der

halb als maximalen Wert von $\Delta\tau$ bei einer Lotabweichung von 1^0 in der Breite $\varphi = 50^0$ 6.2 Minuten annehmen. Es wird dann

$$\Delta\varphi = 58'.9 \operatorname{tg} \frac{\Delta a}{2}, \tag{J}$$

was bei $\Delta a = 12^0$ $6'.2$ ergibt. Bei direkten Höhenmessungen der Sonne oder eines einzelnen Sterns könnte der durch die Lotabweichung von 1^0 verursachte Fehler in seinem vollen Betrage eingehen, während die Methode der Koinzidenzen bei um 12^0 verschiedenen Azimuten der beiden Sterne die Breite im Höchstfalle um $^1/_{10}$ dieses Wertes verfälschen würde. Da bei der ständigen Bewegung der beiden Sterne gegeneinander in Höhe, verursacht durch Lotschwankung, der Moment der Koinzidenz nicht so eindeutig festzustellen sein wird, wie beim Beobachten von der festen Erde aus, so wird es natürlich sein, etwa drei Momente innerhalb von 20^s zu notieren, wodurch der Fehler sicher auf ein Drittel des berechneten Maximalwertes reduziert werden könnte.

Dieselbe Gleichung (E) gilt auch für den Fehler in Breite, der bei der Auswertung der Beobachtung mit unrichtiger Länge oder Ortszeit entsteht. Hier wird der Fehler in $\Delta\tau$ wohl niemals 6^m erreichen, und sein Einfluß entsprechend kleiner sein.

Leider gibt es nicht helle Sterne in genügender Anzahl, um für jede 6–8^m in jeder Breite ein Sternpaar mit kleiner Azimutdifferenz für die Breitenbestimmung auswählen zu können. Beschränkt man sich auf Sterne bis zur Größe 3.5 m, so ist man schon gezwungen, um den Beobachtern eine genügende Anzahl Breitenpaare zur Verfügung zu stellen, größere Azimutdifferenzen zuzulassen, wodurch der Fehler der Lotschwankung mit dem Tangens der halben Azimutdifferenz anwächst. Über die Auswahl der Sternpaare wird am Schluß dieser Arbeit weiter eingehend berichtet werden.

Es entsteht die Frage, ob Sternpaare mit sehr nahe gleichen Azimuten für die Beobachtung gleicher Höhen geeignet sind, da doch beide Sterne eines Breitenpaares auf der Ostseite des

Zeitbestimmung nahezu im Meridian. Das ergibt im Wesentlichen den Fehler $\Delta\tau_1$. Bei zufälligen Abweichungen senkrecht dazu müssen die Bilder der Sterne, die zur Koinzidenz gebracht werden sollen, sich stark trennen und können deshalb niemals in dieser Lage beobachtet werden.

Meridians steigen, auf der Westseite sinken, und die Annäherung der Sterne in Höhe, die der Beobachter verfolgen muß, nur sehr langsam erfolgen kann.

Die relative Geschwindigkeit in Höhe ist

$$\frac{d h_1}{d t} - \frac{d h_2}{d t} = \pm 15 \cos \varphi (\sin a_1 - \sin a_2).$$

Bei genau gleichen Azimuten im Momente der Koinzidenz dürften die Sterne gegeneinander in Höhe keine Bewegung zeigen. Da die Geschwindigkeit im Azimut aber verschieden ist, die sin a deshalb in der Umgebung der Koinzidenz schon verschieden sind, so muß eine Trennung der Sterne in Höhe natürlich eintreten. Sie geht aber sehr langsam vor sich und könnte nur sehr ungenau festgestellt werden. Wir wollen an einem Beispiel sehr nahe gleicher Azimute eines Breitenpaares zeigen, daß diese Ungenauigkeit sich vollkommen heraushebt und die Paare mit nahezu gleichen Azimuten die für die Beobachtung günstigsten sind.

Wir berechnen somit den zufälligen Fehler der Beobachtung der Koinzidenz in Höhe, wobei wir annehmen, die Trennung der Sternscheibchen ist merkbar, wenn sie sich um 1′ in Höhe voneinander entfernt haben. Die Azimute seien $a_1 = 30^0\, 0'$, $a_2 = 150^0\, 30'$, so daß

$$\frac{\Delta a}{2} = 15'.$$

Die Polhöhe sei $51^0\, 0'$, die Geschwindigkeit der beiden Sterne relativ zueinander in Höhe

$$d h_1 - d h_2 = 15 \cos \varphi\, 0.0076\, \Delta \tau$$

und für

$$d h_1 - d h_2 = 1'$$

erhält man

$$1' = 0.072\, \Delta \tau,$$

woraus folgt

$$\Delta \tau = 13\overset{\mathrm{m}}{.}8.$$

Die Zeit bis zur Trennung der beiden Sterne ist also außerordentlich groß. Sie braucht aber vom Beobachter nicht abgewartet zu werden, denn bei einem Fehler $\Delta\tau = 13\overset{m}{.}8$ im notierten Momente der Koinzidenz beträgt der Fehler in der Breite nach (E) nur

$$\Delta\varphi = 0\overset{\prime}{.}57;$$

die zufälligen Fehler in der Beobachtung des Moments der Koinzidenz haben deshalb einen verschwindenden Einfluß.

Nehmen wir einen anderen Extremfall sehr großer Azimutdifferenzen

$$a_1 = 30^0; \; a_2 = 100^0$$

$$\sin a_2 - \sin a_1 \quad = 0.4848.$$

Für die Trennung der Sterne auf 1′ Abstand erhalten wir

$$\Delta\tau = 0\overset{m}{.}218$$

und mit diesem Werte ergibt sich als zufälliger Fehler in der Breite

$$\Delta\varphi = 0\overset{\prime}{.}96.$$

3. Die Bestimmung der Ortszeit (Fig. 1 b).

Bei der Bestimmung der Ortszeit nach der Formel (B)

$$\cos(\tau - M) = \frac{1}{m'}\operatorname{tg}\varphi$$

entsteht der Fehler

$$\Delta\tau = \sec\varphi \operatorname{tg}\frac{a_1 + a_2}{2}\,\Delta\varphi. \tag{K}$$

Wir bezeichen die Differenz der Azimute, die hier immer symmetrisch zum Meridian liegen und umgekehrte Vorzeichen haben, durch Δa:

$$a_2 = -a_1 + \Delta a$$

und

$$\frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{\Delta a}{2},$$

daher ist

$$\Delta\tau = \sec\varphi \operatorname{tg}\frac{\Delta a}{2}\,\Delta\varphi.$$

Da es sich hier nicht um die Bestimmung der Längendifferenz, sondern des Abstandes längs dem großen Kreise in Ost-West-

Richtung handelt, so ist es angemessen, den Fehler $\Delta\,\tau \cos\varphi$ zu berechnen, der durch den Fehler in der Breite $\Delta\,\varphi$ verursacht ist. Von diesem nehmen wir an, daß er durch die Lotschwankung bedingt ist und im Moment der Beobachtung den Wert $\Delta\,\varphi = 60'$ hat. Dann erhalten wir wieder eine ganz ähnliche Formel wie die Formel (J)

$$\Delta\,\tau \cos\varphi = \operatorname{tg}\frac{\Delta\,a}{2}\,60' \tag{L}$$

und ersehen aus ihr, daß auch die Genauigkeit der Ortung in der Ost-West-Richtung dem Tangens von $\frac{\Delta\,a}{2}$ proportional ist und bei $\Delta\,a = 12^0$ den Fehler der direkten Höhenmessung auf $^1/_{10}$ reduziert. Die Formel (D) in bezug auf $\Delta\,\tau$ aufgelöst

$$\Delta\,\tau = \frac{D \sec^2\varphi\,\Delta\,\varphi}{\sin z\,(\sin a_1 - \sin a_2)}$$

zeigt noch, daß die wenig unterschiedlichen Azimute, deren Sinus von umgekehrten Vorzeichen sind, möglichst nahe bei $\pm 90^0$ liegen müssen bei kleinen D, um den Fehler von $\Delta\varphi$ herabzudrücken.

Da der eine Stern des Paares steigt, während der andere sinkt, ist die relative Geschwindigkeit in Höhe bei den Zeitpaaren sehr groß und die Koinzidenz ist deshalb viel genauer festzustellen. Die Geschwindigkeit ist am größten in der Nähe des ersten Vertikals und beträgt im Vertikal selbst in der Breite $\varphi = 51^0$ pro Minute 19′. Sie wird im Durchschnitt bei den verwendbaren Sternpaaren 15′ pro Minute ausmachen, so daß der Fehler der Beobachtung der Trennung der Sterne um 1′ 4 Sekunden ausmachen würde. Bei der ständigen Bewegung der Sterne infolge der Lotschwankung werden auch hier einige Momente der Koinzidenz in Höhe kurz nacheinander festgestellt werden können, und der Durchschnittswert müßte sich auf zwei Sekunden genau festlegen lassen. Für die Ortung in der Ost-West-Richtung ist das Produkt $\Delta\,\tau \cos\varphi$ von Bedeutung, was in unseren Breiten einer Verminderung im Verhältnis 0.6 entspricht.

Man kann deshalb sagen, daß der *zufällige Fehler* der Beobachtung eines Zeitpaares innerhalb der gewünschten Grenzen der Genauigkeit liegen und gegenüber dem Fehler der Lotschwankung klein sein wird.

Der Fehler in der angenommenen Breite beeinflußt das Ergebnis in demselben Grade wie der Fehler der Lotschwankung.

4. Die Auswahl der Sternpaare.

Der Beobachter muß einen fertigen Katalog von Sternpaaren für jeden Breitengrad und alle Stunden des Sterntages zur Verfügung haben. Die Fertigstellung eines solchen Katalogs erfordert einen großen Arbeitsaufwand. Seine Gültigkeit für die ganze Erde wäre aber für ein Jahrzehnt gesichert, in welcher Zeit die Präzessionsbewegungen der Sterne Korrekturen erforderlich machen würden. Die Methoden der zweckmäßigsten Berechnung eines solchen Katalogs der Breiten- und Zeitpaare, mit den für jedes Paar gültigen Konstanten m' und M, sollen hier nicht erörtert werden. An der Universitäts-Sternwarte München wird ein solcher Katalog vorbereitet. Nur die bei diesen Rechnungen gemachten Erfahrungen, die für die Anwendbarkeit der Methode der Koinzidenz von entscheidender Wichtigkeit sind, müssen erwähnt werden.

Die Auswahl der Sternpaare, die für eine gegebene Breite die gleiche Höhe erreichen, unterliegt folgenden Einschränkungen:

1) Die Sterne müssen hell sein, damit sie mit einem kleinen Instrument unter den Bedingungen der Beobachtung im Flugzeug oder im Schiff im Gesichtsfelde deutlich sichtbar sind.

2) Die Azimutdifferenz der beiden Sterne des Paares, in dem oben definiertem Sinne verstanden, muß möglichst klein sein, um den Vorteil der Methode, möglichste Elimination der Lotschwankung, zu gewährleisten.

3) Die Sternpaare müssen so dicht aufeinander folgen, daß der Beobachter jederzeit und in jeder Breite durchschnittlich jede 6–8 Minuten ein Sternpaar zur Verfügung hat.

Als Grenzgröße der Sterne hat sich dabei 4.0 m für Breitenpaare, und 3.5 m für Zeitpaare ergeben, wenn man den Reduktionsfaktor in den Formeln (J) und (L) bei den Breitenpaaren in den Grenzen 0.00—0.22, bei den Zeitpaaren zwischen 0.00 und 0.18 hält. Der Durchschnittswert dieses Faktors ergibt sich für Breitenpaare zu 0.12 für Zeitpaare zu 0.087.

Es wäre ein Leichtes, noch engere Grenzen für den Reduktionsfaktor und damit eine größere Genauigkeit der Ortsbestimmung zu erreichen, wenn man die Grenzgröße der Sternhelligkeit erhöhen würde. Die Zeitpaare sind leichter in genügender Anzahl zu finden, darum liegen die obigen Grenzwerte bei ihnen auch günstiger als bei den Breitenpaaren. Der Grund dafür ist leicht einzusehen. Bei entgegengesetzter Bewegungsrichtung der Sterne in Höhe ist eine Koinzidenz wahrscheinlicher als bei gleichgerichteter Bewegung.

Eine eingangs erwähnte bemerkenswerte Beziehung, die bei der Auswahl der Sternpaare von Bedeutung ist, soll hier noch bewiesen werden. Die Gleichung

$$\cos(\tau - M) = \frac{1}{m'} \operatorname{tg} \varphi \tag{B}$$

hat, wie schon eingangs erwähnt, eine doppelte Lösung, deren Sinn wie auch die Gleichung selbst m. W. bisher unbekannt war. Sie besagt, daß, wenn zwei Sterne für eine vorgegebene Breite einmal die gleiche Höhe erreichen, sie es innerhalb von 24 Stunden ein zweites Mal tun. Die Sternzeiten dieser beiden Begegnungen in Höhe sind

$$\tau_1 \text{ und } \tau_2.$$

Die Azimute, in denen die beiden Begegnungen stattfinden, seien a_1, a_2 und a_1', a_2'. Dann ist

$$\Delta\tau_1 = \sec\varphi \, tg \frac{a_1 + a_2}{2} \Delta\varphi$$

$$\Delta\tau_2 = \sec\varphi \, tg \frac{a_1' + a_2'}{2} \Delta\varphi.$$

Da aber aus (B) folgt, daß

$$-\sin(\tau_1 - M)\, d\tau_1 = -\sin(\tau_2 - M)\, d\tau_2$$

oder

$$d\tau_1 = -d\tau_2,$$

so ist

$$\operatorname{tg}\frac{a_1 + a_2}{2} = -\operatorname{tg}\frac{a_1' + a_2'}{2}$$

oder

$$a_1 + a_2 + a_1' + a_2' = 2\pi k, \tag{II}$$

wo k eine ganze Zahl ist. Diese Beziehung der Azimute ist bei der Auswahl der Sternpaare als Kontrolle von Bedeutung.

5. Das Instrument und die Art der Beobachtung.

Für das für diese Beobachtungsart geeignete Instrument können nur die Bedingungen genannt werden, die in ihm erfüllt sein müssen. Es wäre die Sache eines Optikers und einer mechanischen Firma, dasselbe zu entwickeln.

1. Das Instrument muß sich im Scheinlot einstellen, damit die Gleichheit der scheinbaren Zenitdistanzen beobachtet werden kann. Das wäre z. B. durch Aufhängung in einem kardanischen Gehänge mit großem Übergewicht unterhalb der Achsen zu erreichen. Dabei könnte ein Doppelfernrohr mit gemeinsamem Einblick oder ein einfaches Fernrohr mit einem freihängenden sich im Scheinlot einstellenden Spiegel, der das Bild des zweiten Sterns ins Gesichtsfeld reflektiert, benutzt werden.

2. Das Gesichtsfeld des Fernrohrs muß etwa 10^0 betragen, die Vergrößerung drei- bis vierfach sein. Die Lichtstärke muß genügen, um Sterne 4.0 m auch beim Vollmond deutlich zu sehen.

3. Bei der Bewegung des Fernrohrs im Azimut werden die zur Deckung gelangenden Gesichtsfelder sich in entgegengesetzter Richtung bewegen, so daß der Beobachter die Koinzidenz der in der Mitte der Felder sichtbaren Sterne des Paares im voraus zeitlich abschätzen kann, indem er durch Anwendung der Azimutschraube dieselben aneinander vorbeiführt. Diese entgegengesetzte Bewegung der beiden Gesichtsfelder wäre bei Anwendung des Prinzips der Spiegelung eo ipso erfüllt.

4. Da sowohl die Breiten als auch die Zeitpaare zur Elimination der Scheinlotschwankung im Azimut nahezu entgegengesetzt liegen (die Breitenpaare in der Nähe des Meridians, die Zeitpaare in der Nähe des ersten Vertikals), kann die Beobachtung durch zwei gegenüberliegende Fenster des Flugzeugs erfolgen. Dabei muß dasselbe im mittleren Azimut der beiden Sterne gesteuert sein. Dann liegen beide Gesichtsfelder genau symmetrisch zur Kursrichtung mit einer Abweichung von höchstens 19^0 von der Senkrechten zu derselben. Die Kursrichtung, die in den Tabellen der Sternpaare vorausberechnet sein müßte, muß mit einer Genauigkeit von $\pm 3^0$ eingehalten sein, damit nach Einstellung des Fernrohrs in Azimut und Höhe beide Sterne in der Nähe der Gesichtsfeldmitte erscheinen. Da sie in der Regel auch die

hellsten Sterne ihrer Umgebung sein werden, wäre eine Identifizierung nach Sternkarten nicht notwendig und eine Verwechslung nicht möglich.

5. Der Beobachter hat bei ständiger Bewegung im Azimut mehrere Momente der Koinzidenz der infolge der Lotschwankungen und der Erschütterungen in Höhe unruhigen Sternscheibchen zu notieren und nach dem mittleren Moment der Koinzidenz in Höhe aus den Tafeln die zugehörige Breite oder Ortszeit zu entnehmen.

6. Sollte es gelingen, ein stabiles, bequem zu handhabendes Instrument für diese Beobachtungsart zu entwickeln und das zugehörige Tafelwerk der Sternpaare zu veröffentlichen, so könnte man erwarten, daß die Methode der Koinzidenzen auch zur See Anwendung finden würde. Sie hätte vor den jetzt üblichen Methoden der Höhenmessung jedenfalls den Vorzug der schnelleren Beobachtung und Reduktion.