Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

VII. Bestimmung der einer gegebenen Fläche mit gegebenem Spreizvektor entsprechenden Flächen.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt am 6. Februar 1948.

Bei der Untersuchung der Abbildungen einer reellen Fläche $\mathfrak{x}(u, v)$ des euklidischen Raumes auf eine andere $\mathfrak{y}(u, v)$ vermöge gleicher Parameterwerte hat es sich verschiedentlich gezeigt, daß der „Spreizvektor"[1] des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$

$$\mathfrak{J} = (\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u) : \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \tag{1}$$

– $\mathfrak{c}$ bedeutet den Einheitsvektor der positiven Normalen der ersten Fläche $\mathfrak{x}$ – eine beachtenswerte Rolle spielt.

Es liegt daher nahe, zu fragen: Wie kann man, wenn die Fläche $\mathfrak{x}$ gegeben ist, alle Flächen $\mathfrak{y}$ finden, die mit $\mathfrak{x}$ ein Paar bilden, dessen Spreizvektor einer gegebenen Vektorfunktion gleich ist?

Die Beantwortung dieser Frage erfordert die allgemeine Lösung einer partiellen Differentialgleichung 1. O. für die vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{y}$ auf $\mathfrak{x}$, eben der Gleichung (1).[2]

Die Bemerkung, daß der Spreizvektor sich mit Hilfe des schon bei früheren Gelegenheiten in die Differentialgeometrie eingeführten Operators $\mathfrak{D}$, der durch die Gleichung

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \cdot \mathfrak{D} = \mathfrak{x}_v \frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{x}_u \frac{\partial}{\partial v} \tag{2}$$

definiert ist, in der Form

$$\mathfrak{J} = -\mathfrak{D} \times \mathfrak{y} \tag{I}$$

ausdrücken läßt, legt es nahe, die Eigenschaften dieses Differentialoperators für die Behandlung der Gleichung (1), die mit (I)

[1] Vgl. SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1944, S. 122.

[2] Diese partielle Differentialgleichung tritt auch bei anderen Problemstellungen auf. Man vgl. z. B. Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 7 (1927), S. 463 ff., bes. S. 468, sowie die dort zitierte Literatur.

gleichbedeutend ist, zu verwerten. Sie lassen sich allerdings erst fruchtbar machen, wenn noch ein gewisser, ebenfalls schon vor längerer Zeit in die Flächentheorie eingeführter Tensor herangezogen wird. Dies soll in den folgenden Abschnitten A bis C geschehen, ehe in Abschnitt D die Differentialgleichung (I) selbst vorgenommen wird.

A. *Der Differentialoperator* $\mathfrak{D}$.

Es wird sich als günstig erweisen, wenn wir uns zunächst mit einigen Anwendungen des Operators $\mathfrak{D}$ beschäftigen, den wir mittels zweier senkrechter, die Fläche $\mathfrak{x}$ im Punkte (u, v) berührender Einheitsvektoren $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{c} \times \mathfrak{t}$ und der Ableitungen $\frac{\partial}{\partial s}$ und $\frac{\partial}{\partial s^*}$ nach den Bogenlängen in den Richtungen $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^*$, ähnlich wie schon bei anderer Gelegenheit,[3] folgendermaßen ausdrücken wollen:

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{t}^* \frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial}{\partial s^*}\,; \tag{2'}$$

im folgenden mögen alle auf die Richtung $\mathfrak{t}^*$ sich beziehenden Größen durch ein Sternchen gekennzeichnet werden.

Nachdem wir in einer früheren Note[3] den Operator $\mathfrak{D}$ skalar auf einen Normalvektor und auf einen berührenden Vektor von $\mathfrak{x}$ wirken ließen, wollen wir ihn jetzt durch vektorielle Multiplikation mit solchen Vektoren, zunächst mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{c}$ der Normalenkongruenz, dann mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{t}$ eines $\mathfrak{x}$ berührenden Vektorfeldes, verknüpfen.

Dabei müssen wir auf die bekannte Grundformel der Flächentheorie

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q} \tag{3}$$

zurückgreifen, in der $\mathfrak{d}$ den Krümmungsvektor einer in $\mathfrak{x}$ verlaufenden Flächenkurve bedeutet, und die für jeden mit deren Begleitkörper $(\mathfrak{t}, \mathfrak{t}^*, \mathfrak{c})$ starr verbundenen Vektor $\mathfrak{q}$ gilt; $\mathfrak{d}$ aber drückt sich bekanntlich durch die Normalwindung T, die Normalkrümmung N und die geodätische Krümmung g folgendermaßen aus:

$$\mathfrak{d} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{t}^* + g\mathfrak{c}. \tag{4}$$

[3] SitzBer. d. Bayer. Ak. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 179 ff.

a) Wir finden wegen $\mathfrak{c}\mathfrak{t} = \mathfrak{c}\mathfrak{t}^* = 0$

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{c} = \mathfrak{t}^* \times \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} - \mathfrak{t} \times \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*} = \mathfrak{t}^* \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{c}) - \mathfrak{t} \times (\mathfrak{d}^* \times \mathfrak{c})$$

$= -\mathfrak{c} \cdot (\mathfrak{t}^*\mathfrak{d} - \mathfrak{t}\mathfrak{d}^*)$; es ist aber $\mathfrak{t}^*\mathfrak{d} = N$ und, wegen $\mathfrak{t}^{**} = -\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}\mathfrak{d}^* = -N^*$, folglich, da $N + N^* = 2H$ das Doppelte der mittleren Krümmung an der betrachteten Stelle von $\mathfrak{x}$ ist,

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{c} = -2H\mathfrak{c}. \tag{II}$$

Diese Formel kann man auf den Fall eines beliebigen, zu $\mathfrak{x}$ normalen Vektorensystems $\varphi\mathfrak{c}$ erweitern, wenn man die unmittelbar aus der Definition von $\mathfrak{D}$ fließende, für eine beliebige skalare Ortsfunktion f und eine beliebige vektorielle Ortsfunktion $\mathfrak{f}$ auf $\mathfrak{x}$ geltende Beziehung anwendet:

$$\mathfrak{D} \times f\mathfrak{f} = f\mathfrak{D} \times \mathfrak{f} - \mathfrak{f} \times \mathfrak{D}f. \tag{5}$$

Es ergibt sich

$$\mathfrak{D} \times \varphi\mathfrak{c} = -2H\varphi\mathfrak{c} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{D}\varphi. \tag{II'}$$

Man beachte, daß diese Gleichung die Zerlegung des links stehenden Vektors in seine normale und in seine tangentiale, d. h. in die Berührebene von $\mathfrak{x}$ fallende Komponente gibt.

b) Nun bestimmen wir

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{t} = \mathfrak{t}^* \times \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial s} - \mathfrak{t} \times \frac{\partial \mathfrak{t}}{\partial s^*} = \mathfrak{t}^* \times (\mathfrak{d} \times \mathfrak{t}) - \mathfrak{t} \times (\mathfrak{d}^* \times \mathfrak{t})$$
$$= -\mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t}^*\mathfrak{d} - \mathfrak{d}^* + \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{t}\mathfrak{d}^* = -N\mathfrak{t} - T^*\mathfrak{t}^* - g^*\mathfrak{c};$$

auf Grund der Bonnetschen Beziehung[4]

$$T + T^* = 0$$

ist nun $-N\mathfrak{t} - T^*\mathfrak{t}^* = -N\mathfrak{t} + T\mathfrak{t}^* = \mathfrak{c} \times \mathfrak{d}$, nach (3) aber $\mathfrak{c} \times \mathfrak{d} = -\frac{d\mathfrak{c}}{ds}$, folglich

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{t} = -\frac{d\mathfrak{c}}{ds} - g^*\mathfrak{c}. \tag{III}$$

Auch diese Formel können wir vermöge (5) auf ein beliebiges, $\mathfrak{x}$ berührendes Vektorfeld $\mathfrak{v} = \zeta\mathfrak{t}$ ausdehnen:

---

[4] Siehe O. Bonnet, Mémoire sur la théorie des surfaces. Journal de l'Ecole Polytechnique, XXXII^e cahier, p. 1, 1848. Vergl. auch J. Bertrand, Mémoire sur la théorie des surfaces. Journal de Liouville, 1^re série, t. IX, p. 133, 1844.

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{v} = -\zeta \frac{d\mathfrak{c}}{ds} - \zeta g^* \mathfrak{c} - \mathfrak{t} \times \mathfrak{D}\zeta. \tag{III'}$$

Hier ist der erste Vektor auf der rechten Seite wegen $\mathfrak{c}^2 = 1$ tangential, während die beiden anderen, da $\mathfrak{D}\zeta$ ein Berührvektor ist, normal zu $\mathfrak{x}$ sind und daher in $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}(\mathfrak{D} \times \mathfrak{v})$ zusammengefaßt werden können, so daß wir folgende Zerlegung in Tangential- und Normalkomponente erhalten:

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{v} = -\zeta \frac{d\mathfrak{c}}{ds} + \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}\mathfrak{D}\mathfrak{v}. \tag{III''}$$

Oft tritt wie in (III'') statt $\mathfrak{D}$ der an sich weniger geschmeidige Operator

$$\mathfrak{c} \times \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^* \tag{2''}$$

auf; mit ihm müssen wir uns deshalb später auch befassen.

B. *Der Tensor* Γ.

Wir gehen jetzt dazu über, unabhängig von dem Bisherigen den schon vor längerer Zeit in die kinematische Flächentheorie eingeführten symmetrischen Affinor Γ zu betrachten, mit dessen Hilfe man die gemeinsame Tangentialkomponente der Krümmungsvektoren $\mathfrak{b}$ aller $\mathfrak{t}$ berührenden Flächenkurven,

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{b} \times \mathfrak{c} = T\mathfrak{t} + N\mathfrak{t}^*, \tag{4'}$$

durch den Einheitsvektor des Berührlotes $\mathfrak{t}^*$ dieser Kurven ausdrücken kann:

$$\mathfrak{g} = \Gamma \mathfrak{t}^*. \tag{6}$$

Als Dyade kann man Γ, da nach (6) $\Gamma\mathfrak{t} = -\mathfrak{g}^*$ sein muß, so schreiben:[5]

$$\Gamma = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{t}^* - \mathfrak{g}^* \cdot \mathfrak{t}. \tag{6'}$$

Mit Hilfe von Γ muß man aber auch $\frac{d\mathfrak{c}}{ds}$ ausdrücken können. In der Tat wird, da nach der Grundformel (3) $\frac{d\mathfrak{c}}{ds} = \mathfrak{g} \times \mathfrak{c}$ ist,

[5] Vgl. Jahresber. d. DMV., 39 (1930), S. 179. – Die Symmetrie des Affinors Γ ist eine Folge der erwähnten Bonnetschen Relation, die man auch in der Form schreiben kann: $\mathfrak{g}\mathfrak{t} + \mathfrak{g}^*\mathfrak{t}^* = 0$; aus ihr fließt die bekannte Symmetriebedingung $\mathfrak{t}\,\Gamma\,\mathfrak{t}^* - \mathfrak{t}^*\,\Gamma\,\mathfrak{t} = 0$, zunächst für irgend zwei senkrechte Berührvektoren, dann aber für zwei beliebige tangentiale Vektoren.

$$\frac{d\mathfrak{c}}{ds} = -\mathfrak{c} \times (\Gamma \mathfrak{t}^*) = -\mathfrak{c} \times (\Gamma(\mathfrak{c} \times \mathfrak{t}));$$

macht man sich die Bedeutung dieses Ausdrucks an Hand der dyadischen Darstellung klar, so findet man

$$\frac{d\mathfrak{c}}{ds} = -(\mathfrak{c} \times \Gamma \times \mathfrak{c})\,\mathfrak{t}. \tag{IV}$$

Der hier auftretende Affinor ist, wie leicht zu sehen, ebenso wie Γ selbst symmetrisch. Wichtig ist es nun, zu wissen, daß dieser Tensor im wesentlichen mit dem reziproken von Γ übereinstimmt, für dessen Existenz es notwendig und hinreichend ist, daß der Vektor $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}^*$ und folglich das Krümmungsmaß $K = \mathfrak{c}\mathfrak{g}\mathfrak{g}^*$ der Fläche $\mathfrak{x}$ an der betrachteten Stelle[6] nicht verschwindet. Diese Tatsache ist in einem allgemeinen Satz enthalten, der für jeden in der zu $\mathfrak{c}$ senkrechten Ebene wirkenden, nicht ausgearteten Affinor Φ gilt: Es sei $\Phi = \mathfrak{a}_1 \cdot \mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2 \cdot \mathfrak{b}_2$, wo die $\mathfrak{a}_i$ und $\mathfrak{b}_i$ Vektoren dieser Ebene bedeuten, die den Bedingungen $\mathfrak{a}_1 \times \mathfrak{a}_2 \neq 0$ und $\mathfrak{b}_1 \times \mathfrak{b}_2 \neq 0$ genügen mögen. Sind $\mathfrak{a}^1$, $\mathfrak{a}^2$ und $\mathfrak{b}^1$, $\mathfrak{b}^2$ die in der Ebene zu den Vektorenpaaren $\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ und $\mathfrak{b}_1$, $\mathfrak{b}_2$ reziproken Paare, so daß $\mathfrak{a}^1 \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c} = \mathfrak{a}_2 \times \mathfrak{c}$, $\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c} = \mathfrak{c} \times \mathfrak{a}_1$ und das Entsprechende für $\mathfrak{b}_i$, $\mathfrak{b}^i$ gilt, so ist bekanntlich $\Phi^{-1} = \mathfrak{b}^1 \cdot \mathfrak{a}^1 + \mathfrak{b}^2 \cdot \mathfrak{a}^2$. Nun ist $\mathfrak{c} \times \Phi \times \mathfrak{c} = \mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c}\,(-\mathfrak{a}^2 \cdot \mathfrak{b}^2 - \mathfrak{a}^1 \cdot \mathfrak{b}^1)$, folglich, wenn $\overline{\Phi}$ den zu Φ konjugierten Affinor bezeichnet:

$$\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c} \cdot \Phi^{-1} = -\mathfrak{c} \times \overline{\Phi} \times \mathfrak{c}. \tag{7}$$

Im Falle des Affinors Γ ist nun $\mathfrak{a}_1\mathfrak{a}_2\mathfrak{c} = \mathfrak{g}\mathfrak{g}^*\mathfrak{c} = K$, $\mathfrak{b}_1\mathfrak{b}_2\mathfrak{c} = -\mathfrak{t}^*\mathfrak{t}\mathfrak{c} = 1$, mithin, sofern $K \neq 0$, wegen $\overline{\Gamma} = \Gamma$

$$-\mathfrak{c} \times \Gamma \times \mathfrak{c} = K\Gamma^{-1}. \tag{7'}$$

$\mathfrak{c} \times \Gamma \times \mathfrak{c}$ wirkt wie Γ in der Berührebene.

Aus (IV) und (7′) folgt also, falls K von Null verschieden ist:[6a]

$$\frac{d\mathfrak{c}}{ds} = K\Gamma^{-1}\mathfrak{t}. \tag{IV'}$$

---

[6] Siehe Jahresber. d. DMV., 39 (1930), S. 180, Fußnote 1.
[6a] In der Form $\mathfrak{c}'\Gamma = K\mathfrak{t}$ läßt sich dies unmittelbar aus (6′) ableiten.

C. *Verknüpfung von $\mathfrak{D}$ mit Γ.*

Wenn wir den Tensor Γ auf den am Schluß von Abschnitt A durch (2″) eingeführten Operator $\mathfrak{D}^*$ anwenden, so erhalten wir gemäß (2′) und (6′)

$$\Gamma\,\mathfrak{D}^* = (\mathfrak{g}\cdot\mathfrak{t}^* - \mathfrak{g}^*\cdot\mathfrak{t})\left(-\mathfrak{t}\frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{t}^*\frac{\partial}{\partial s^*}\right) = \mathfrak{g}^*\frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{g}\frac{\partial}{\partial s^*} \quad \text{oder}$$

$$\Gamma\mathfrak{D}^* = \mathfrak{c}\times\left(\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s^*}\frac{\partial}{\partial s} - \frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s}\frac{\partial}{\partial s^*}\right),$$

da nach (4′) und (3) $\mathfrak{g} = \mathfrak{c}\times\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s}$ und $\mathfrak{g}^* = \mathfrak{c}\times\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s^*}$ ist.

Denken wir uns der Einfachheit halber, nur für den Augenblick, unter $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^*$ Hauptkrümmungsrichtungen und bezeichnen mit s' und s'^* die Bogenlängen der den Krümmungslinien durch parallele Normalen auf der Einheitskugel $\mathfrak{c}$ entsprechenden Kurven, so wird wegen

$$\frac{\partial}{\partial s} = N\frac{\partial}{\partial s'} \quad\text{und}\quad \frac{\partial}{\partial s^*} = N^*\frac{\partial}{\partial s'^*}$$

$$\Gamma\mathfrak{D}^* = NN^*\cdot\mathfrak{c}\times\left(\frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s'^*}\frac{\partial}{\partial s'} - \frac{\partial\mathfrak{c}}{\partial s'}\frac{\partial}{\partial s'^*}\right);$$

hier sind N und N^* die Hauptkrümmungen, folglich ist $NN^* = K$. Der Ausdruck in der Klammer aber ist der für die Kugelfläche $\mathfrak{c}$ gebildete, wie $\mathfrak{D}$ gegenüber der Gruppe der Parametertransformationen invariante $\mathfrak{D}$-Operator, den wir mit $\mathfrak{D}'$ bezeichnen wollen und für den gilt:

$$\mathfrak{c}\,\mathfrak{c}_u\,\mathfrak{c}_v\cdot\mathfrak{D}' = \mathfrak{c}_v\frac{\partial}{\partial u} - \mathfrak{c}_u\frac{\partial}{\partial v}. \tag{8}$$

Es wird also, wenn wir $\mathfrak{c}\times\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}'^*$ setzen,

$$\Gamma\mathfrak{D}^* = K\mathfrak{D}'^*. \tag{V}$$

Daraus finden wir, falls das Krümmungsmaß nicht verschwindet:

$$\mathfrak{D}^* = K\,\Gamma^{-1}\,\mathfrak{D}'^*. \tag{V′}$$

Auf dem gleichen Wege würden wir zu den unter der Voraussetzung $K \neq 0$ geltenden Beziehungen gelangen:

$$\mathfrak{D} = \Gamma\mathfrak{D}' \quad\text{und}\quad \mathfrak{D}' = \Gamma^{-1}\,\mathfrak{D}. \tag{VI}$$

Manchmal sind zwei der Operatoren $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{D}^*$, $\mathfrak{D}'^*$ nacheinander anzuwenden. Es kann dann gut sein, wenn man weiß, daß z. B.

$$\mathfrak{D}^*\mathfrak{D}'^* = \mathfrak{D}\mathfrak{D}' \tag{VII}$$

ist. Zunächst ist nämlich, wie man auf Grund der Definition der Operatoren einsieht, $(\mathfrak{c} \times \mathfrak{D})(\mathfrak{c} \times \mathfrak{D}') = (\mathfrak{c} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{c})\,\mathfrak{D}'$. Weiter kann man sich überlegen, daß $\mathfrak{c} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{c}$ formal nach der Zerlegungsformel der Vektorrechnung umgewandelt werden darf, wobei zu beachten ist, daß $\mathfrak{D}$ nicht nur auf die hinter $\mathfrak{c} \times \mathfrak{D} \times \mathfrak{c}$ stehende Größe, sondern auch auf den auf $\mathfrak{D}$ folgenden Vektor $\mathfrak{c}$ angewendet werden muß: Es wird $\mathfrak{c} \times \left(\mathfrak{t}^* \frac{\partial}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial}{\partial s^*}\right) \times \mathfrak{c} =$ $= (\mathfrak{c} \times \mathfrak{t}^*) \times \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} - (\mathfrak{c} \times \mathfrak{t}) \times \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*} - \mathfrak{c} \times (\mathfrak{c} \times \mathfrak{D}) = \mathfrak{t}^* \cdot \mathfrak{c} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} -$ $- \mathfrak{t} \cdot \mathfrak{c} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*} - \mathfrak{c} \cdot \left(\mathfrak{t}^* \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*}\right) - \mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c}\mathfrak{D} + \mathfrak{D} = \mathfrak{D}$, weil $\mathfrak{c} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} =$ $= \mathfrak{c} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*} = 0$ und $\mathfrak{t}^* \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s} - \mathfrak{t} \frac{\partial \mathfrak{c}}{\partial s^*} = \mathfrak{t}^* \mathfrak{d}\, \mathfrak{c} - \mathfrak{t}\, \mathfrak{d}^* \mathfrak{c} = -\, \mathfrak{t}\mathfrak{d} - \mathfrak{t}^* \mathfrak{d}^* =$ $= -T - T^*$ ist, diese Größe aber nach Bonnet verschwindet. Damit ist (VII) bewiesen.

D. *Die Differentialgleichung* $\mathfrak{D} \times \mathfrak{y} + \mathfrak{J} = 0$.

Die in den Abschnitten A bis C entwickelten Formeln ermöglichen es uns nun, die Gleichung (I), die in der Überschrift wiederholt ist, folgendermaßen zu behandeln:

Wir zerlegen den Vektor $\mathfrak{y}$ in seine Tangential- und Normalkomponente:

$$\mathfrak{y} = \mathfrak{v} + \varphi\, \mathfrak{c}; \tag{VIII}$$

dabei sei $\mathfrak{v} = \zeta\, \mathfrak{t}$. Dann wird nach (II′) aus (I)

$$\mathfrak{D} \times \mathfrak{v} - 2H\, \varphi\, \mathfrak{c} - \mathfrak{c} \times \mathfrak{D}\varphi + \mathfrak{J} = 0. \tag{9}$$

Zerlegung in die Normal- und in die Tangentialkomponente führt nach (III″) und (2″) auf das mit (I) gleichbedeutende Paar von Gleichungen:

$$\mathfrak{D}^*\mathfrak{v} - 2H\varphi + \mathfrak{J}\mathfrak{c} = 0, \tag{9a}$$

$$-\zeta \frac{d\mathfrak{c}}{ds} - \mathfrak{D}^*\varphi + \mathfrak{c} \times \mathfrak{J} \times \mathfrak{c} = 0. \tag{9b}$$

Falls $K \neq 0$ ist, wird also nach (IV′) und (V′)

$$K\,\Gamma^{-1}(\zeta\,\mathfrak{t} + \mathfrak{D}'^*\varphi) - \mathfrak{c} \times \mathfrak{J} \times \mathfrak{c} = 0,$$

folglich, da, wegen $\Gamma\mathfrak{c} = 0$, $\Gamma(\mathfrak{c} \times \mathfrak{J} \times \mathfrak{c}) = \Gamma(\mathfrak{J} - \mathfrak{c}\cdot\mathfrak{c}\mathfrak{J}) = \Gamma\mathfrak{J}$ ist,

$$\zeta\mathfrak{t} = \mathfrak{v} = -\mathfrak{D}'^*\varphi + \Gamma\mathfrak{J} : K. \tag{9c}$$

Setzen wir diesen Ausdruck für $\mathfrak{v}$ in (9a) ein, so erhalten wir nach (VII)

$$\mathfrak{D}\mathfrak{D}'\varphi + 2H\varphi = \mathfrak{c}\mathfrak{J} + \mathfrak{D}^*\Gamma\mathfrak{J} : K. \tag{IX}$$

Dies ist eine partielle Differentialgleichung 2.O. für φ, die einzige unbekannte Funktion, die in ihr vorkommt, und zwar ist es die erweiterte charakteristische Gleichung von Weingarten,[7] der man mit Hilfe von (2) und von (8) leicht die übliche Form geben könnte.

Sobald die skalare Ortsfunktion φ bekannt ist, liefert (9c) $\mathfrak{v}$, und damit kennt man nach (VIII) $\mathfrak{y}$.

Wenn aber $K = 0$ ist, haben alle Vektoren $\frac{d\mathfrak{c}}{ds} = \mathfrak{c}'$ in einem Punkte dieselbe Richtung, die sich aus $\mathfrak{x}$ berechnen läßt; dann erhält man also aus (9b) durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}'$

$$\mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{D}^*\varphi - (\mathfrak{c} \times \mathfrak{c}')(\mathfrak{c} \times \mathfrak{J} \times \mathfrak{c}) = 0$$

oder

$$\mathfrak{c}'\mathfrak{D}\varphi - \mathfrak{c}\mathfrak{c}'\mathfrak{J} = 0; \tag{IX′}$$

das ist eine partielle Differentialgleichung 1.O. für φ, die ebenfalls schon Weingarten aufgestellt hat, ohne in diesem Fall einen für die Bestimmung von $\mathfrak{v}$ dienlichen Hinweis zu geben. Diese kann so erfolgen: Wenn $\mathfrak{x}$ keine Ebene ist, werde $\mathfrak{t}$ in jedem Punkt senkrecht zu der durch ihn gehenden Erzeugenden von $\mathfrak{x}$ angenommen. Dann ist $\mathfrak{d} = N\mathfrak{t}^* + g\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{d}^* = 0$. Wird hier $\mathfrak{v} = \chi\mathfrak{t} + \psi\mathfrak{t}^*$ gesetzt, so folgt, weil bekanntlich

$$\frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial s} = \frac{\partial\chi}{\partial s}\mathfrak{t} + \frac{\partial\psi}{\partial s}\mathfrak{t}^* + \mathfrak{d} \times \mathfrak{v}, \quad \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial s^*} = \frac{\partial\chi}{\partial s^*}\mathfrak{t} + \frac{\partial\psi}{\partial s^*}\mathfrak{t}^* + \mathfrak{d}^* \times \mathfrak{v}$$

---

[7] Vgl. Crelles Journal 100 (1887), S. 296 ff. – Wenn man will, kann man noch $\mathfrak{D}^*\Gamma$ umformen: man findet, wenn man die in eine vektorielle Gleichung zusammengefaßten Codazzi-Mainardischen Gleichungen berücksichtigt, nach (V)

$$\mathfrak{D}^*\Gamma = 2\mathfrak{c}K + \Gamma\mathfrak{D}^* = 2\mathfrak{c}K + K\mathfrak{D}'^*.$$

ist, aus (9) nach Zerlegung in die Komponenten nach den Richtungen $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}^*$ und $\mathfrak{c}$:

$$\left.\begin{aligned} &-\chi N + \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \mathfrak{J}\mathfrak{t} = 0, \\ &\frac{\partial \varphi}{\partial s^*} + \mathfrak{J}\mathfrak{t}^* = 0, \\ &-\frac{\partial \chi}{\partial s} + g\psi - \frac{\partial \psi}{\partial s^*} - N\varphi + \mathfrak{J}\mathfrak{c} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9\text{d})$$

Durch die zweite dieser Gleichungen, die wegen $\mathfrak{c}' = N\mathfrak{t} \neq 0$ mit (IX′) identisch ist, wird φ bestimmbar, durch die erste dann χ, durch die dritte schließlich ψ. Ist aber $\mathfrak{x}$ eine Ebene, so kann man außer $\mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{t}$ und $\mathfrak{t}^*$ als konstant annehmen; dann wird auch $\mathfrak{d} = 0$, und es vereinfachen sich die Gleichungen (9d), deren beide ersten zeigen, daß in diesem Falle $\mathfrak{J}$ der Bedingung genügen muß: $\mathfrak{D}\mathfrak{J} = 0$.

Es könnte Bedenken erregen, daß hier zur Umformung der Differentialgleichung (I) ein so großer Apparat in Bewegung gesetzt wurde (in den Abschnitten A bis C). Man möge jedoch berücksichtigen, daß die dabei erzielten Ergebnisse auch in anderen Zusammenhängen von Bedeutung sind, und daß es auf diese Weise möglich ist, die einzelnen Schritte bei der Behandlung der Gleichung (I) ohne Nebenwerk klar und deutlich hervortreten zu lassen (im Abschnitt D): 1. Die Einführung der charakteristischen Funktion φ als Normalkomponente der gesuchten Vektorfunktion $\mathfrak{y}$ durch (VIII), 2. die Zerlegung der Gleichung (I) in den normalen Bestandteil (9a) und den tangentialen Bestandteil (9b), 3. die Darstellung der Tangentialkomponente $\mathfrak{v}$ von $\mathfrak{y}$ durch φ in (9c) (im Falle $K \neq 0$), 4. die Aufstellung der charakteristischen Gleichung (IX) durch Einsetzen des durch (9c) gegebenen Vektors $\mathfrak{v}$ in (9a) (falls $K \neq 0$) und schließlich 5. die Bestimmung von $\mathfrak{v}$ durch nochmaliges Zurückgreifen auf (9c).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1949

Band/Volume: 1948

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Betrachtungen über Flächenabbildungen. Bestimmung der einer gegebenen Fläche mit gegebenem Spreizvektor entsprechenden Flächen 71-79