

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Die äquatoriale Beschleunigung bei Jupiter.

Von Erich Schoenberg, München.

Mit einer Tafel und einer Abbildung im Text.

Vorgelegt am 5. März 1948.

Übersicht.

- I. Einleitung.
- II. Die äquatoriale Strömung in der Jupiteratmosphäre.
- III. Der Aufstieg der Gasmassen innerhalb der Parallelkreise des NEB und SEB.
- IV. Die Abweichung der aufsteigenden Gasmassen nach Westen und der absteigenden nach Osten.
- V. Das Zuströmen der Gase vom Äquator längs der Oberfläche und das Zurückströmen im oberen Niveau der Atmosphäre ohne Rücksicht auf die Reibung.
- VI. Das Zurückströmen der Gasmasse im oberen Niveau der Atmosphäre und die Dauer eines Umlaufs.
- VII. Das Zuströmen der Gasmassen vom Äquator nach dem Breitenkreise des NEB mit Rücksicht auf die Reibung.
- VIII. Die bei dem Aufstieg der äquatorialen Zone zugeführte Energie.

Ausgehend von der Annahme einer halb festen oder flüssigen Oberfläche des Planeten, die in der Konstanz des GRF und der mittleren Breiten der fünf Hauptstreifen des Planeten ihre Stütze hat, wird eine Theorie der Beschleunigung der äquatorialen Zone als einer rein atmosphärischen Strömung entwickelt. Die innerhalb des NEB und des SEB aus dem Innern des Planeten aufsteigenden Ströme heißen Gases liefern die Energie, die notwendig ist, die äquatoriale gegen die Oberfläche beschleunigte Strömung zu unterhalten.

I. Einleitung.

Die äquatoriale Beschleunigung bei Jupiter hat bisher keine befriedigende Erklärung gefunden. Bei der Annahme einer rein gasförmigen Beschaffenheit des Planeten könnte die Emden-sche¹ Theorie der äquatorialen Beschleunigung der Sonne auf

¹ R. Emden, Beiträge zur Sonnentheorie. SitzBer. Bayer. Akad. Wiss. math. phys. Kl. 31, 339 (1902).

Jupiter übertragen werden. Dieser Annahme widersprechen aber zwei Beobachtungstatsachen. Einerseits die Konstanz der jovigraphischen Breiten der meisten der dunklen Streifen, die sich auch nach Perioden zeitweiliger Unsichtbarkeit bis auf scheinbar periodische Schwankungen immer wieder bestätigt, andererseits die lange Lebensdauer des sogenannten Roten Flecks. Derselbe zeigt seit über hundert Jahren wohl zeitweilige Veränderungen seiner Färbung und seiner Umriss, tritt aber doch immer wieder in der charakteristischen ovalen Form mit unveränderten Dimensionen hervor.

Die dauernde Veränderlichkeit der Umriss und der Breitenausdehnung der Streifen bedingt große Fehler in den Beobachtungen ihrer mittleren Breiten. Die Abweichungen verschiedener Beobachter mit verschiedenen Fernrohren zu nur wenig verschiedenen Zeiten derselben Opposition erreichen oft 10° . Es ist deshalb schwer, bei der Zusammenstellung des gesamten sich jetzt über 56 Jahre erstreckenden, übrigens sehr spärlichen, Beobachtungsmaterials die systematischen und persönlichen Fehler der Beobachter von wirklichen Breitenänderungen zu trennen. Da mir zur Zeit noch nicht alle Beobachtungen zugänglich sind, behalte ich mir die Behandlung dieser Aufgabe für eine spätere Arbeit vor und will hier nur die vorläufigen Ergebnisse der Mittelbildung über fünf zwölfjährige Beobachtungsperioden mitteilen, wobei aber drei dieser Perioden nur etwa zur Hälfte mit Beobachtungen belegt sind, so daß die entsprechenden Mittelwerte noch Veränderungen von 1 bis 2° erfahren können.

Tabelle 1. Jovigraphische Breiten der 5 Hauptstreifen

Hauptstreifen	Oppositionen				
	1891—1898	1903—1914	1915—1926	1927—1933	1939—1947
V	—28 ^o 58	—28 ^o 47	—28 ^o 51	—29 ^o 00	—26 ^o 84
IVb	—17.78	—18.72	—18.56	—18.40	—15.65
IVa	— 7.75	— 7.49	— 6.84	— 7.46	— 8.43
III	+ 9.31	+ 9.55	+11.67	+12.20	+ 9.98
II	+20.95	+22.92	+27.78	+25.80	+24.08
I	+30.35	+34.22	+36.54	+36.70	+37.68

Größere Abweichungen zeigen die Streifen I und II. Dieselben scheinen wirklich Veränderungen der Breite zu erfahren, wenn auch die angeführten Zahlen, die zum Teil nur von einem Beobachter herrühren, noch sehr unsicher sind. Diese Streifen verschwinden oft ganz und sind in den letzten Jahrzehnten überhaupt nur sehr schwer meßbar gewesen. Da die stärksten Streifen III und IV oft eine Ausdehnung von 15° in Breite besitzen, wobei ihre Begrenzungen unregelmäßig und stark veränderlich sind, ist die Festlegung der Mittellinie überhaupt nur bis auf $\pm 2^\circ$ möglich. Der Streifen IV zerfällt bekanntlich in zwei haarscharfe, dünne, parallele Linien in einem scheinbar etwas wechselnden Abstände von durchschnittlich 12° , kann aber jahrelang als ungeteilter, breiter Streifen erscheinen. Seine mittlere Breite ist bemerkenswert konstant. Daß die Streifen Wolkengebilde sind, kann bei den rapiden Veränderungen innerhalb derselben und den Geschwindigkeitsdifferenzen angrenzender Gebilde von 100 m/sec^{-1} keinerlei Zweifel unterliegen. Daß diese Wolkengebilde ihren Ursprung in einer festen oder halb-festen Oberfläche unter ihnen haben, kann andererseits bei der Konstanz ihrer Breiten und der Wiederkehr charakteristischer Bildungen auch nicht angezweifelt werden.

Für das Vorhandensein einer festen, teilweise flüssigen Oberfläche spricht auch die lange Lebensdauer des großen Roten Flecks. Freilich hat derselbe seit der Zeit seiner Entdeckung (1878) drei Umläufe auf der Planetenoberfläche vollführt, wenn man dieser die kleine Rotationsgeschwindigkeit von $870^\circ.27$ pro Tag zuschreibt. Doch ist kein Grund dafür vorhanden, für die feste oder flüssige Oberfläche diese aus der Bewegung von kleineren Flecken in höheren Breiten abgeleitete Geschwindigkeit anzunehmen. Dieselben verraten ja durch ihre kurze Lebensdauer und veränderliche Geschwindigkeit ihre Wolkenatur. Das beständigste Gebilde des Planeten ist sicher der GRF. Benutzt man die Längen desselben zwischen 1878 und 1925, gemessen gegen das System II, und verbindet die Endpunkte der Kurve durch eine Gerade, so erhält man als mittlere Geschwindigkeit $870^\circ.315$ täglich in der jovigraphischen Breite von -28° . Dann sind die größten Abweichungen von einer gleichmäßigen Rotation zu Beginn der achtziger Jahre (-60°)

und im ersten Jahrzehnt dieses Jahrhunderts ($+260^\circ$), d. h. der GRF hätte gegen diese gleichmäßige Rotation eine Schwankung von 320° bei nur einer ausgesprochenen Welle im Laufe von 47 Jahren vollführt. Diese Schwankung braucht der Annahme einer schwimmenden mächtigen Scholle in einem durch starke Strömungen bewegten Ozean nicht zu widersprechen, denn bei den großen Dimensionen und der großen Rotationsgeschwindigkeit des Planeten sind die an der Oberfläche wirksamen Kräfte wesentlich größer als auf der Erde, die Strömungen deshalb auch wesentlich heftiger. Wir errechnen leicht bei den oben angeführten Daten als maximale Strömungsgeschwindigkeit des GRF 12 m min^{-1} und Beschleunigungen derselben von $\frac{1}{2} \text{ mm}$ in derselben Zeit. Das sind für ozeanische Strömungen auf Jupiter durchaus vorstellbare Größen, hat doch der Golfstrom an der amerikanischen Küste eine Geschwindigkeit von 84 m pro Minute.

Die Veränderungen der sichtbaren Umrisse des GRF kann man durch teilweise Überdeckung durch Wolkengebilde erklären. Bei der Überholung des GRF durch den Schleier kann man ja eine teilweise Überdeckung der Ränder durch Wolken einer höheren, schneller bewegten Schicht direkt beobachten. Doch sollen uns diese Einzelheiten hier nicht beschäftigen. Wesentlich ist nur, daß der GRF nach Perioden teilweiser Bewölkung immer wieder in seiner charakteristischen ovalen Form und Ausdehnung sichtbar wird, was bei einer gasförmigen oder wolkenartigen Beschaffenheit nicht zu erklären wäre. Es ist naheliegend der festen oder flüssigen Oberfläche des Planeten die Rotationsgeschwindigkeit dieses konstantesten Gebildes zuzuschreiben. Dann erfordert die äquatoriale Beschleunigung des Planeten, die als atmosphärische Strömung von großer Geschwindigkeit (115 m/sec^{-1}) aufgefaßt werden muß, eine dynamische Erklärung. W. Fessenkow² hat versucht, sie als eine Resterscheinung früherer Entwicklungsstufen des Planeten zu erklären; dabei nahm er den Planeten als durchweg gasförmig an und stellte die ganze Erscheinung in Parallele zum Rotationsproblem der Sonne. Seine Theorie beruhte noch auf den alten Vorstellungen über den Koeffizienten der inneren Reibung der Gase.

² Publication de l'Observatoire Astron. Kharkow. Nr. 9 (1917).

Wollte man sie auf den Fall turbulenter Reibung anwenden, und das wäre bei den herrschenden Geschwindigkeiten notwendig, so würden sich für das Alter der Sonne und des Planeten ganz unzulässig kleine Werte ergeben.

Die hier entwickelte Theorie führt Konvektionsströme aus dem Inneren des Planeten als Energiequelle zur Erzeugung der äquatorialen Beschleunigung der Atmosphäre ein. Sie geht freilich von bestimmten Vorstellungen über eine abgrenzende, feste oder flüssige Schicht als Oberfläche des Planeten aus, so daß die aus den Rissen oder Spalten dieser Oberfläche austretenden, adiabatisch in die Atmosphäre aufsteigenden Gase den Motor bilden, der die Atmosphäre zwischen den Spalten und dem Äquator in Bewegung setzt. Wollte man von der abgrenzenden Oberfläche absehen, so könnten Konvektionsströme aus dem Inneren, das in einer gewissen Tiefe auch als starrer Körper rotiert, dieselbe Aufgabe erfüllen. Doch wäre es bei der Unbestimmtheit in bezug auf die Tiefe und die Temperatur jener Schicht konstanter Rotationsgeschwindigkeit unmöglich, konkrete Vorstellungen und Zahlenwerte über die Geschwindigkeiten der äußeren Schichten abzuleiten. Ich ziehe es deshalb vor, das durch die Beobachtungen der Oberfläche nahegelegte Bild einer zum mindesten teilweise festen, dünnen Oberflächenschicht zugrunde zu legen.

II. Die äquatoriale Strömung in der Jupiteratmosphäre.

Die Abnahme der Rotationsgeschwindigkeit der Wolkengebilde des Planeten vom Äquator nach den Polen ist zeitlich nicht ganz konstant, wie der Vergleich verschiedener Beobachtungsreihen lehrt. Die Prüfung der hierbei auftretenden, möglicherweise periodischen Veränderungen ist eine Aufgabe der Zukunft und soll uns hier nicht beschäftigen. Wenn ich hier eine kleine Tabelle der von H. E. Lau³ aus seinen und H. Struves Beobachtungen im Zeitraum von 17 Jahren abgeleiteten Rotationsgeschwindigkeiten anführe, so geschieht das nicht um ihr vor vielen anderen den Vorzug zu geben, sondern um den wesentlichen Verlauf der Geschwindigkeiten zu veranschau-

³ H. E. Lau, Über die Rotation des Planeten Jupiter. *Astron. Nachr.* 195, 314 (1913).

lichen. Nach dieser Tabelle wächst die R. G. kontinuierlich und monoton bis zum Maximum im Äquator. Nach St. Williams, der über eine wesentlich längere Beobachtungserfahrung verfügte, ist das aber nicht der Fall, sondern es gibt ein zeitweise auftretendes sekundäres Maximum in der N. Tr. Z. Nach meinen eigenen Beobachtungen aus dem letzten Jahrzehnt und nach einer kritischen Bearbeitung des älteren Materials von Belopolsky gibt es eigentlich nur zwei scharf getrennte R. G., die nahezu mit den von Marth eingeführten Systemen I und II der R. G. übereinstimmen. Die Grenze liegt meistens innerhalb der breiten, die äquatoriale Zone einsäumenden dunklen Streifen des NEB und SEB. Da die Zunahme der R. G. im Äquator

Tabelle 2. Die Geschwindigkeiten nach H. E. Lau.

Breite	Rotationszeit	Winkelgeschwindigkeit
+38°	9 ^h 55 ^m 40.6 ^s	870.3
+13	9 55 22.8	870.7
+ 6	9 50 43.8	877.6
0	9 48 51.1	880.3(?)
- 6	9 50 54.6	877.3
-12	9 53 44.9	873.1
-22	9 55 19.2	870.8
-28	9 55 19.9	870.8

bei Lau nur auf einer einzigen Beobachtung beruht und von anderen Beobachtern nicht bestätigt wird, nehmen wir für die ganze äquatoriale Zone mit den Grenzen $\pm 10^\circ$ eine durchschnittliche Geschwindigkeit von 878° täglich, für die übrige Atmosphäre die kleine R. G. von 870° an und behandeln die Aufgabe, die Beschleunigung der äquatorialen Zone dynamisch zu erklären. Auch die Grenzen der beiden Geschwindigkeiten sind etwas fließend und ihre Festlegung in den genannten Grenzen bedeutet eine Schematisierung des Problems. Ich habe bei meinen Beobachtungen die nördliche Grenze in der Mitte des dunklen NEB in der Breite $+10^\circ$ zeitweise deutlich feststellen können, wenn bei guter Sicht dieser Streifen in eine Reihe länglicher Wolken zerfiel, von denen die nördlichen die geringe, die südlichen die große Geschwindigkeit aufwiesen. Durch diese Beobachtung, die vielleicht nicht gerade genau die durchschnitt-

lichen Verhältnisse darstellte, bin ich bei der Wahl der Grenzen beeinflußt gewesen.

Die Ergebnisse zweier Arbeiten „Untersuchungen über die Jupiteratmosphäre“⁴ und „Zur Dynamik der Jupiteratmosphäre“⁵ liegen der weiteren Behandlung des Problems zugrunde. In der ersten Arbeit, die weiterhin mit I bezeichnet werden soll, habe ich aus einer photometrischen Analyse den Beweis erbracht, daß das Niveau des dunklen NEB über demjenigen der hellen äquatorialen Zone liegt und daß die Dichte der Jupiteratmosphäre über beiden Niveaus entgegen der Erwartung sehr gering ist. Aus dem Vergleich der Diffusionskonstanten der Jupiter- und der irdischen Atmosphäre ergab sich ein Dichteverhältnis von 1:11. Hierbei galt als Oberfläche die äußere Begrenzung der Wolkenschicht des dunklen Streifens und der äquatorialen Zone, wenn man über der letzteren auch undurchsichtige Wolken annehmen will. Diese geringe Dichte ist bei den heftigen Bewegungen der beobachteten Wolkengebilde nicht überraschend. Aus der Horizontalrefraktion, die eine Verminderung des Schattendurchmessers des Planeten herbeiführen müßte, wurde ein noch geringerer Wert der Dichte der Atmosphäre abgeleitet, wobei natürlich als untere Grenze derselben die undurchsichtige Schicht gemeint war, die den sichtbaren Durchmesser des Planeten bedingt, den man mikrometrisch messen kann. Hier ergab sich eine Dichte von nur 1/150 der irdischen Atmosphäre am Meeresniveau. Der Einfachheit halber habe ich im weiteren mit zwei im Verhältnis 1:10 stehenden Dichten $\rho_1 = 1/150$ und $\rho_2 = 1/15$ der irdischen Atmosphäre am Meeresniveau gerechnet; sie entsprechen $\rho_1^0 = 8.619 \times 10^{-6} \text{ g cm}^{-3}$ und $\rho_2^0 = 8.619 \times 10^{-5} \text{ g cm}^{-3}$.

In der zweiten Arbeit habe ich die Stabilitätsbedingungen aneinandergrenzender, relativ zueinander stark bewegter Atmosphärenschichten nach der Theorie der Helmholtzschen Luft-
ringe behandelt. Nachdem durch die Beobachtung festgestellt war, daß die dunklen Wolken des NEB sich zeitweise über die schneller bewegte äquatoriale Zone lagern, wobei hier die größte

⁴ E. Schoenberg, Festschrift für Elis Strömgren. S. 181. Kopenhagen 1940.

⁵ E. Schoenberg, Astron. Nachr. 273, 113 (1942).

und die kleinste auf Jupiter auftretende Geschwindigkeit von Atmosphärenschichten in Berührung waren, habe ich die Stabilitätsbedingung dieser Luftringe bei verschiedenen Annahmen über die Geschwindigkeit der festen Oberfläche untersucht. Solche Luftringe können nur in einem reibungslosen Luftmeer parallel zum Äquator stabil bestehen. Bei großen Geschwindigkeiten und turbulenter Reibung müssen sie nach den Erfahrungen in der irdischen Atmosphäre in eine Reihe von Zirkulationen zerfallen, was hier aber nicht näher ausgeführt werden soll. Jedenfalls ist das Bild aneinandergrenzender Luftringe verschiedener Geschwindigkeit mit gemeinsamer Rotationsachse in der Jupiteratmosphäre in weit vollkommenerer Weise verwirklicht als in der irdischen. Man beobachtet ja meridionale Verschiebungen der Wolken auf Jupiter nur sehr selten und die Parallelkreise zeigen überall dieselbe Rotationsgeschwindigkeit. Faßt man die äquatoriale Zone als einen gegen die Oberfläche vorauseilenden Atmosphärenring auf, an den sich ein langsamer bewegter in den Breiten des NEB und SEB anschließt, so folgt für den Äquator ein Druckmaximum und tiefere Temperatur.

Der Druckgradient innerhalb der äquatorialen Zone (zwischen den Breitenkreisen $\pm 10^\circ$ und dem Äquator selbst) hält der Resultierenden aus der Zentrifugalkraft und der Corioliskraft die Waage. Die Bahnen der Teilchen liegen dabei auf Parallelkreisen, auf denen sie sich in gleitender Bewegung mit verschiedener Geschwindigkeit aneinander vorbeibewegen. Diese Art Bewegung trägt heute den Namen eines kreisförmigen Wirbels. Sie ist dadurch charakterisiert, daß die Winkelgeschwindigkeit ω eine Funktion sowohl des Abstandes von der Rotationsachse als auch der Höhe h über einer zur Achse senkrechten Ebene ist. Damit ist auch die lineare Geschwindigkeit $v = R\omega$ und die Zirkulation $C = 2\pi Rv = 2\pi R^2\omega$ eine Funktion beider Größen:

$$\omega = \omega(R, h); \quad v = v(R, h); \quad C = C(R, h).$$

Die Theorie dieses kreisförmigen Wirbels, der in einer reibungslosen Flüssigkeit stabil bleiben müßte, ist in den neueren Arbeiten von V. Bjerknes⁶ und seiner Schüler durch Einführung des

⁶ V. Bjerknes, J. Bjerknes, H. Solberg, T. Bergeron, *Physikalische Hydrodynamik*. Springer, Berlin 1933.

Zirkulationsbegriffes weitgehend entwickelt. Sie hat in der dynamischen Meteorologie und auch in der Theorie der Sonnenflecke eine sehr fruchtbare Anwendung gefunden. Es ist nahelegend, von dieser Art Bewegung als erster Näherung in der Theorie der äquatorial beschleunigten Gasmassen der äquatorialen Zone bei Jupiter auszugehen und die Bewegungsformen zu untersuchen, die sich durch einen zusätzlichen Druckgradienten in meridionaler Richtung für ein bewegliches Teilchen ergeben. Als Ursache dieses zusätzlichen Druckgradienten nehmen wir das Emporschleudern der Teilchen aus dem Innern des Planeten in den Parallelkreisen des NEB und des SEB an. Die äußeren Teilchen des äquatorialen Luftringes werden hier durch Reibung mit hinaufgehoben und hinterlassen ein Druckminimum, das durch Hinzuströmen des Gases vom Äquator aufgefüllt wird. So entsteht mit Notwendigkeit eine meridionale Zirkulation, weil in der oberen Schicht der Atmosphäre die Teilchen wieder nach dem Äquator zur Auffüllung des dort entstehenden Minimums strömen müssen. Infolge der Corioliskraft artet aber diese Bewegung in eine schraubenartige aus, deren zum Äquator parallele Komponente dabei die äquatoriale Beschleunigung ergibt. Um über den ganzen Vorgang und die ungefähre Bahn der Teilchen ein Bild zu bekommen, ist es notwendig, die einzelnen Teile derselben, die Aufwärtsbewegung, das Zuströmen der Teilchen vom Äquator und ihr Zurückströmen, einzeln zu untersuchen, was in den folgenden Abschnitten geschehen wird.

III. Der Aufstieg der Gasmassen innerhalb der Parallelkreise des NEB und SEB.

Für die umgebende Atmosphäre nehmen wir einen konstanten Temperaturgradienten α° je km, für die aufsteigende Gasmasse den ebenfalls konstanten adiabatischen Temperaturgradienten

$$\gamma = - \frac{C_p - C_v}{R C_p} g = - \frac{A g}{C_p} \quad (\text{III, 1})$$

an, wo R die Gaskonstante, A das Wärmeäquivalent der Arbeit und C_p , C_v die Wärmekapazitäten bei konstantem Druck und konstantem Volumen sind. Die numerischen Werte für γ sind

bei $g = 0.025 \text{ km sec}^{-2}$ als Schwerebeschleunigung an der Jupiteroberfläche und zwei Annahmen über die Natur des aufsteigenden Gases folgende:

$$\begin{array}{ll} \text{für H}_2 & \text{für } 1/2 (\text{NH}_3 + \text{CH}_4) \\ \gamma = 1.8^\circ & \gamma = 12.5^\circ. \end{array}$$

Wenn an der Oberfläche des Planeten die Temperatur der Atmosphäre T'_0 , diejenige des aufsteigenden Gases T_0 ist, so gilt

$$T' = T'_0 - \alpha z \quad \text{und} \quad T = T_0 - \gamma z, \quad (\text{III, 2})$$

wo z die Höhe in km bedeutet. Der Auftrieb in vertikaler Richtung für die Masse 1 ist dann

$$\ddot{z} = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (\text{III, 3})$$

Hier ist ρ die Dichte der aufsteigenden Gasmasse; wenn ρ' diejenige der umgebenden Atmosphäre ist, so gilt für dieselbe

$$g = - \frac{1}{\rho'} \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Folglich kann man auch schreiben

$$\ddot{z} = -g + g \frac{\rho'}{\rho}, \quad (\text{III, 4})$$

denn p und $\frac{\partial p}{\partial z}$ müssen für beide Gasmassen identisch sein.

Bei gleichem Druck verhalten sich aber die Dichten, wenn ihre Molekulargewichte μ und μ' sind, wie

$$\frac{\rho'}{\rho} = \frac{\mu'}{\mu} \frac{T}{T'}. \quad (\text{III, 5})$$

Das Verhältnis $\frac{\mu'}{\mu}$ wird durch κ bezeichnet, dann wird aus (III, 4)

$$\ddot{z} = g \left(\kappa \frac{T}{T'} - 1 \right). \quad (\text{III, 6})$$

Das ist die Differentialgleichung des vertikalen Aufstiegs ohne Rücksicht auf die Reibung. Wir wollen sie für den Fall konstanter Temperaturgradienten integrieren, um einen Überblick über die Aufstiegsgeschwindigkeiten in diesem Idealfalle zu gewinnen. Aus der Differentialgleichung des adiabatischen Auf-

stiegs einer Gasmasse von der Temperatur T in einer Atmosphäre der Temperatur T' :

$$\frac{dT}{dz} = -\gamma \frac{T}{T'} \quad \text{oder} \quad \frac{dT}{T} = -\gamma \frac{dz}{T'_0 - \alpha z} \quad (\text{III, 7})$$

folgt

$$\frac{T}{T'_0} = \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \quad \text{oder} \quad \frac{T}{T'} = \frac{T'_0}{T'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma-\alpha}{\alpha}}. \quad (\text{III, 8})$$

Daher ist

$$(\text{III, 9})$$

$$\ddot{z} = \dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} = g \left[\kappa \frac{T'_0}{T'_0} \left(\frac{T'}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} - 1 \right] = g \left[\kappa \frac{T'_0}{T'_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}-1} - 1 \right].$$

Wir wollen diese Gleichung von der Oberfläche $z = 0$ bis zur Höhe z integrieren, wobei wir auch $\dot{z}_0 = 0$ setzen. Wir erhalten

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 = g \frac{\kappa T'_0}{\gamma} \left[1 - \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha}} \right] - g z. \quad (\text{III, 10})$$

Die Potenzreihenentwicklung ergibt:

$$(\text{III, 11})$$

$$\dot{z}^2 = 2 g z \left[\frac{\kappa T'_0}{T'_0} - 1 \right] - g \kappa T'_0 (\gamma - \alpha) \frac{z^2}{T'^2_0} + g \frac{\kappa T'_0}{3} (\gamma - \alpha) (\gamma - 2\alpha) \frac{z^3}{T'^3_0} \dots$$

Beim Aufstieg desselben Gases, aus dem die Atmosphäre gebildet ist, wird $\gamma = \alpha$ und $\kappa = 1$. Wir erhalten dann die bekannte Aufstiegsformel

$$\dot{z}^2 = 2 g z \frac{T'_0 - T'_0}{T'_0}. \quad (\text{III, 12})$$

Die Geschwindigkeit steigt hier mit der Höhe unbeschränkt an, wenn $T'_0 > T'_0$ ist. Für ein leichteres Gas ist der Aufstieg noch schneller, weil schon das erste Glied der Reihe durch den Faktor κ größer ist und die folgenden alle positiv sind.

Wir berechnen die Aufstiegs geschwindigkeit nach der strengen Formel (III, 10), also ohne Rücksicht auf die Reibung für zwei Fälle $\kappa = 1$ (gleichartiges Gas) und $\kappa = 8$, der dem Aufstieg von Wasserstoff in einer Atmosphäre aus NH_3 und CH_4 entspricht. Dabei ist für die Temperatur der Atmosphäre an der Oberfläche des Planeten einheitlich

$$T'_0 = 300^\circ K$$

angenommen, für die Temperatur des aufsteigenden Gases an der Oberfläche

$$T_0 = 500^\circ K \text{ und } T_0 = 800^\circ K.$$

Der Aufstieg des Gases erfolgt adiabatisch mit dem Gradienten γ ; die Atmosphäre innerhalb der Aufstiegshöhen soll die unteradiabatischen Gradienten

$$\alpha = 6^\circ, \alpha = 8^\circ \text{ und } \alpha = 10^\circ \text{ je km}$$

haben.

Die Schwerebeschleunigung an der Oberfläche des Planeten ist

$$g = 0.025 \text{ km sec}^{-2}.$$

Tabelle 3. Aufstiegsgeschwindigkeiten in km je Sekunde für gleichartiges Gas.

Höhe km	$T'_0 = 300^\circ K, T_0 = 500^\circ K$			$T'_0 = 300^\circ K, T_0 = 800^\circ K$		
	$\alpha = 6^\circ$	$\alpha = 8^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 6^\circ$	$\alpha = 8^\circ$	$\alpha = 10^\circ$
1	0.18	0.18	0.18	0.29	0.29	0.29
10	0.50	0.52	0.59	0.84	0.86	0.93
20	0.58	0.65	0.73	1.06	1.13	1.20

Tabelle 4. Aufstiegsgeschwindigkeiten von H_2 in einer Atmosphäre

$$\text{von } \frac{NH_3 + CH_4}{2}$$

Höhe km	$T'_0 = 300^\circ K, T_0 = 500^\circ K$			$T'_0 = 300^\circ K, T_0 = 800^\circ K$		
	$\alpha = 6^\circ$	$\alpha = 8^\circ$	$\alpha = 10^\circ$	$\alpha = 6^\circ$	$\alpha = 8^\circ$	$\alpha = 10^\circ$
1	0.62	0.64	0.62	1.02	1.05	1.02
10	6.67	6.97	7.29	10.97	11.45	11.96
20	14.65	16.35	18.75	24.44	26.76	30.60

Diese ungeheuren Geschwindigkeiten werden in Wirklichkeit niemals erreicht. Ohne im einzelnen die Einflüsse chemischer Verbindungen, der Sublimation und der Reibung auf die Aufstiegsgeschwindigkeit übersehen zu können, müssen wir in Analogie mit den Vorgängen in der irdischen Troposphäre annehmen, daß der Aufstieg in einer bestimmten Höhe sein Ende findet, über der eine nahezu isotherme Schicht, ähnlich unserer

Stratosphäre, beginnt. Diese ist jedenfalls durchsichtig und liegt über den sichtbaren Wolkengebilden, deren Geschwindigkeit gemessen werden kann. Da wir in dem schnellen Aufstieg der Gasmassen in der Troposphäre den Motor sehen, der die äquatoriale Beschleunigung der Troposphäre zwischen den Breitenkreisen des NEB und SEB bedingt, so müssen wir die ihnen durch den Aufstieg zugeführte Energie abschätzen und dazu einen Näherungswert der wahren Geschwindigkeit berechnen. Dazu gehen wir jetzt von der strengen Differentialgleichung des Aufstiegs mit Berücksichtigung des Reibungsgliedes aus. Was das letztere anbetrifft, so setzen wir die Reibungskraft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit, da die Verwendung des Austauschkoefizienten nur für horizontale Bewegungen von Gasmassen angebracht ist. Für die Widerstandskraft bei einem zum Stillstand kommenden Aufstieg ergaben verschiedene Versuche beim quadratischen Gesetz die besten Ergebnisse. Wir vervollständigen daher die Gleichung (III, 9) durch das Reibungsglied und erhalten

$$\dot{z} \frac{d\dot{z}}{dz} = g \left[\kappa \frac{T_0}{T'_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha} - 1} - 1 \right] - \frac{\mu}{\rho} \dot{z}^2. \quad (\text{III, 13})$$

Hier ist noch die Dichte ρ als Funktion der Höhe einzusetzen. Bei konstantem Temperaturgradienten haben wir für den Druck p und die Dichte die Beziehungen

$$p = p_0 \left(\frac{T'}{T'_0} \right)^{\frac{g}{\alpha R}} \quad \text{und} \quad \rho = \rho_0 \left(\frac{T'}{T'_0} \right)^{\frac{g}{\alpha R} - 1},$$

wo $T' = T'_0 - \alpha z$ die Temperatur in der Höhe z bedeutet. R ist die Gaskonstante, die für ein Gemisch aus NH_3 und CH_4 mit dem Molekulargewicht 16.54 den Wert hat

$$R = 0.51793 \times 10^7 \text{ c} \cdot g \cdot s.$$

Die Integration der Differentialgleichung (III, 14)

$$\frac{1}{2} \frac{d(\dot{z}^2)}{dz} = g \left[\kappa \frac{T_0}{T'_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0} \right)^{\frac{\gamma}{\alpha} - 1} - 1 \right] - \frac{\mu}{\rho_0} \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0} \right)^{1 - \frac{g}{\alpha R}} \dot{z}^2 \dots$$

nach der Substitution $w = \dot{z}^2$ ist in geschlossener Form möglich. Die Darstellung der Konstanten $\frac{\mu}{\rho_0}$ in expliziter Form als Funk-

tion der Höhe der Troposphäre H und der übrigen Konstanten ist aber nicht möglich. Die Schwierigkeit des Problems ist zum Teil dadurch bedingt, daß die Differentialgleichung ohne Reibungsglied auch nur unter gewissen Bedingungen, nämlich, daß

$$\frac{T'_0}{\alpha} \geq \frac{\kappa T_0}{\gamma}$$

ist, eine endliche Lösung für die Aufstiegshöhe besitzt. Ich habe es deshalb vorgezogen, die Lösung der Differentialgleichung in Form einer Potenzreihe anzusetzen, bei der eine endliche Aufstiegshöhe gesichert ist. Bei Mitnahme von nur zwei Gliedern einer solchen Reihe kann die Lösung natürlich nur eine genäherte sein, aber auch das quadratische Widerstandsgesetz ist nur eine Näherung, weshalb dieses Verfahren berechtigt erscheint. Es wurde also eine parabolische Lösung angesetzt:

$$\dot{z} = \lambda z - \nu z^2$$

oder wegen $\dot{z}_H = 0$

$$\dot{z} = \lambda z - \frac{\lambda}{H} z^2. \quad (\text{III, 15})$$

Nach Einsetzen dieses Wertes von \dot{z} in (III, 14) und Integration erhält man

$$\frac{\dot{z}^2}{2} \Big|_0^H = 0 = g \frac{T_0}{\gamma} \left[1 - \left(\frac{T'_H}{T'_0} \right)^{\gamma/\alpha} \right] - gH - \frac{\mu \lambda^2}{30 \rho_0} H^3 \left(1 - \frac{\alpha H}{2 T'_0} \right)^{1 - \frac{g}{\alpha R}} \quad (\text{III, 16})$$

wobei zur Vereinfachung der Rechnung bei Anwendung des Mittelwertsatzes gesetzt wurde:

$$\int_0^H \left(1 - \frac{\alpha z}{T'_0} \right)^{1 - \frac{g}{\alpha R}} dz = \left(1 - \frac{\alpha H}{2 T'_0} \right)^{1 - \frac{g}{\alpha R}} H.$$

Damit erhält man

$$\frac{\mu \lambda^2 H^2}{\rho_0} = \frac{30 g \left\{ \frac{T_0}{g} \left[1 - \left(\frac{T'_H}{T'_0} \right)^{\gamma/\alpha} \right] - H \right\}}{H \left(1 - \frac{\alpha H}{2 T'_0} \right)^{1 - g/\alpha R}} \quad (\text{III, 17})$$

und hieraus können Zahlenwerte für die Kombination der konstanten $\frac{\mu \lambda^2 H^2}{\rho_0}$ berechnet werden. Zur Trennung der Kon-

stanten kann dann die Differentialgleichung (III, 14) selbst hinzugezogen werden, indem die Gleichung (III, 15) in dieselbe für \dot{z} eingesetzt wird. Mit dem oben abgeleiteten Wert von $\frac{\mu \lambda^2}{\rho_0}$ konnte die Genauigkeit der Lösung dadurch geprüft werden, daß der Wert der linken Seite der Differentialgleichung für zwei zum Scheitelpunkt der Parabel symmetrisch gelegene Punkte (z. B. $z = \frac{1}{4}H$ und $z = \frac{3}{4}H$) sich gleich oder nahezu gleich ergeben mußte.

Die Rechnung wurde für drei verschiedene Höhen, $H = 10, 20$ und 30 km, sowie drei Werte von α , $\alpha = 6^\circ, 8^\circ$ und 10° je km durchgeführt. Dabei war die Temperatur an der oberen Grenze der Troposphäre für das aufsteigende und das ruhende Gas gleich, entsprechend der Beobachtung zu -100° C angenommen.

$$T'_H = T_H = 173^\circ K.$$

Die beste Übereinstimmung ergab sich für $H = 10$ km, doch war sie auch bei 20 km noch genügend. Aus den Werten von $\lambda^2 H$ ergaben sich dann die Werte für λ und für die mittlere Aufstiegs geschwindigkeit

$$\bar{z} = \frac{\lambda}{H} \int_0^H \left(z - \frac{z^2}{H} \right) dz = \frac{\lambda H}{6}. \quad (\text{III, 18})$$

Folgende Tabelle enthält die Werte von λ und \bar{z} für zwei Werte des Gradienten und zwei Höhen der Troposphäre.

Tabelle 5. Die Werte für λ und \bar{z} .

H km	$\alpha = 6^\circ$		$\alpha = 8^\circ$	
	λ	\bar{z}	λ	\bar{z}
10	60.6×10^{-3}	101 m/sec	46.8×10^{-3}	78 m/sec
20	61.6×10^{-3}	205 m/sec	47.1×10^{-3}	157 m/sec

Die Geschwindigkeiten sind den angenommenen Höhen nahezu proportional, weil die Werte von λ für denselben Gradienten nur wenig verschieden sind. Da es sich nur um eine Abschätzung der Größenordnung der Geschwindigkeit zur Berechnung der der Atmosphäre zugeführten mechanischen Energie handelt,

wollen wir mit dem Durchschnittswerte von 135 m je sec rechnen. Würde man als aufsteigendes Gas Wasserstoff angenommen haben, so wären die mittleren Geschwindigkeiten allerdings größer ausgefallen. Doch müßte man damit rechnen, daß er während des Aufstiegs in chemische Verbindungen mit der umgebenden Atmosphäre eintreten und daß für den übrigbleibenden freien Wasserstoff es keine Troposphärengrenze geben würde. Die Dauer des Aufstiegs ergibt sich bei den angenommenen mittleren Werten zu 110 sec.

IV. Die Abweichung der aufsteigenden Gasmassen nach Westen und der absteigenden nach Osten.

Der Satz für die Konstanz des Rotationsmoments erfordert Abweichungen der vertikal aufsteigenden Gasmassen nach Westen, der absteigenden nach Osten. Es ist bekannt, daß dieselben gegenüber denen, die sich aus demselben Satze für die Bewegungen auf der Oberfläche eines Planeten ergeben, sehr klein sind. Für Jupiter habe ich diese Wirkungen (I Seite 216) in einer Tabelle veranschaulicht. Bei den hier benutzten Bezeichnungen gilt für vertikalen Aufstieg

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{2H}{r} \omega, \quad (\text{IV, 1})$$

wo $\frac{d\lambda}{dt}$ die Längenänderung, H die Höhe über der Jupiteroberfläche, r ihren Halbmesser und ω die Winkelgeschwindigkeit bedeuten. Hieraus folgt, bei dem angenommenen Werte von $\omega = 870^\circ$ täglich

$$\lambda - \lambda_0 = - \frac{2H}{r} \frac{870}{86400} (t - t_0). \quad (\text{IV, 2})$$

Bei $r = 71 \times 10^3$ km, einer Aufstiegshöhe von 15 km und einer Aufstiegszeit $t - t_0 = 110$ sec ergibt sich eine Abweichung nach Westen $\lambda - \lambda_0 = 1.5'$. Das ist ein so kleiner Wert, daß er für unsere Betrachtungen über die Bahn der Teilchen vernachlässigt und der Aufstieg als längs der Vertikalen erfolgend angesehen werden kann. Dasselbe gilt natürlich auch für den Abstieg der Teilchen innerhalb der Troposphäre.

Diese kleine Abweichung aufsteigender Gase nach Westen kann aber sehr wohl zur Ausbildung der öfters beobachteten „Rauchfahnen“ oder der Verlängerung anfänglich runder Flecke nach Westen führen, wenn der Aufstieg der Gase aus einem Herde sich über Stunden erstreckt.

V. Das Zuströmen der Gase vom Äquator längs der Oberfläche und das Zurückströmen im oberen Niveau der Atmosphäre ohne Rücksicht auf die Reibung.

Wir untersuchen jetzt die Bahn eines Teilchens längs der Oberfläche des Planeten vom Äquator nach dem Breitenkreise des NEB, in welchem infolge des heftigen Aufstiegs ein Druckminimum entsteht. Dieselben Betrachtungen gelten für den Zustrom vom Äquator nach dem Breitenparallel des SEB. Dazu schreiben wir die Differentialgleichungen der Bewegung im rotierenden Koordinatensystem mit dem Ursprung im Zentrum des Planeten

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 - r \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + 2\omega) \dot{\lambda} &= -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\rho} F_r \\ r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\lambda} + 2\omega) \dot{\lambda} &= -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} F_\varphi \quad (\text{V}, 1) \\ r\ddot{\lambda} \cos \varphi + 2(\dot{r} \cos \varphi - r \sin \varphi \dot{\varphi}) (\dot{\lambda} + \omega) &= -\frac{1}{\rho r \cos \varphi} \frac{\partial p}{\partial \lambda} + \frac{1}{\rho} F_\lambda. \end{aligned}$$

Hier sind r und φ die jovizentrischen Koordinaten, g die Schwerebeschleunigung, ω die Rotationsgeschwindigkeit der festen Oberfläche, ρ und p Dichte und Druck des Gases, $\dot{\lambda}$ die Längenänderung oder der Wind gegen die feste Oberfläche, positiv nach Westen, F mit den Komponenten F_r , F_φ und F_λ die Reibungskraft. Wir haben dann für die stabile Bewegung in einem Helmholtzschen Luftringe

$$F_r = F_\varphi = F_\lambda = 0 \quad (\text{V}, 2)$$

und

$$\dot{r} = 0 \quad \ddot{r} = 0 \quad \dot{\varphi} = 0 \quad \ddot{\varphi} = 0 \quad \dot{\lambda} \neq 0 \quad \ddot{\lambda} = 0. \quad (\text{V}, 3)$$

Wir wollen zunächst die Bahn eines Teilchens ohne Rücksicht auf das Reibungsglied verfolgen, indem wir von der Bewegung

im Helmholtz'schen Luftringe als der ungestörten Bewegung ausgehen. Für die Stabilität einer solchen Bewegung muß ein Druckgradient $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ bestehen, $\frac{\partial p}{\partial \varphi} \neq 0$, der der Resultierenden aus der Zentrifugal- und der Corioliskraft die Waage hält. Dieser Wert des meridionalen Druckgradienten im Helmholtz'schen Ringe soll unser Ausgangswert sein, den wir durch ein Zusatzglied variieren wollen. Dieses Zusatzglied soll dem Zuströmen des Gases vom Äquator zum Parallelkreise des NEB Rechnung tragen. Die dritte Gleichung (V, 1) enthält links das Differential des Rotationsmoments der absoluten Bewegung und gibt bei $\frac{\partial p}{\partial \lambda} = 0$ nach der Integration das Gesetz der Konstanz dieses Moments in der Form

$$\Omega = r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \omega) = \text{konst.} \quad (\text{V, 4})$$

Diese Gleichung kann als Differentialgleichung für λ in der Form geschrieben werden

$$\dot{\lambda} = -\omega + (\dot{\lambda}_0 + \omega) \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi}, \quad (\text{V, 5})$$

wo $\dot{\lambda}_0$ die Windgeschwindigkeit im Ausgangspunkte der Bewegung mit den Koordinaten λ_0 und φ_0 bedeutet. Setzen wir $\dot{\lambda}$ in die zweite Differentialgleichung (V, 1) ein und nehmen außerdem im Ergebnis $\dot{r} = 0$ an, d. h. betrachten wir allein die Projektion der Bahn auf die Planetenoberfläche, so wird

$$r\ddot{\varphi} + r \sin \varphi \cos \varphi \left[(\dot{\lambda}_0 + \omega)^2 \frac{\cos^4 \varphi_0}{\cos^4 \varphi} + \omega^2 \right] = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}. \quad (\text{V, 6})$$

Eliminiert man dt^2 , so ergibt sich die bis auf das letzte Glied integrierbare Gleichung

$$r\dot{\varphi} d\varphi + r \frac{\sin \varphi}{\cos^3 \varphi} \left[(\dot{\lambda}_0 + \omega)^2 \cos^4 \varphi_0 - \omega^2 \cos^4 \varphi \right] d\varphi = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (\text{V, 7})$$

Nach Ausführung der Integration, wobei noch $\dot{\varphi}_0 = 0$ gesetzt ist, folgt

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = r^2 \cos^2 \varphi_0 \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} \right) \left[(\dot{\lambda}_0 + \omega)^2 - \omega^2 \frac{\cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi_0} \right] - 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi. \quad (\text{V, 8})$$

Im Helmholtzschen Ringe gibt es keine Bewegung in Breite. Es muß daher die rechte Seite gleich Null sein. Dadurch ergibt sich die Möglichkeit, das Integral über den Helmholtzschen Druckgradienten einfach zu berechnen. Derselbe kann aber auch aus der zweiten Differentialgleichung (V, 1) selbst gefunden werden, wenn man die Helmholtzschen Bedingungen berücksichtigt:

$$r^2 \sin \varphi \cos \varphi (\dot{\lambda} + 2 \omega) \dot{\lambda} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi} \quad (\text{V, 9})$$

und $\dot{\lambda}$ aus der Gleichung (V, 5) eliminiert:

$$\frac{r^2}{2} \sin 2 \varphi \left[(\dot{\lambda}_0 + \omega)^2 \frac{\cos^4 \varphi_0}{\cos^4 \varphi} - \omega^2 \right] = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}. \quad (\text{V, 10})$$

Ist eine Bewegung in Breite vorhanden, dann hat $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}$ einen Zusatz erhalten und, wenn wir diesen Zusatz durch $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial \varphi}$ bezeichnen, und den Zuwachs des Integrals über denselben durch

$$\Delta \pi_i = 2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}_i}{\partial \varphi} d\varphi, \quad (\text{V, 11})$$

so ist die Bewegung in Breite nach (V, 8) durch die Gleichung bestimmt

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = \Delta \pi_i. \quad (\text{V, 12})$$

Bei fünf Annahmen über den Betrag des zusätzlichen Druckgradienten, den man als Sog vom Äquator nach dem Breitenkreise des Aufstiegs bezeichnen kann, ist auf diese Weise $\Delta \pi_i$ und dann die Geschwindigkeit in Breite $r \dot{\varphi}$ berechnet worden. Der erste Wert entspricht einem Druckgradienten, der dem Betrage nach dem Gleichgewichtsgradienten gleich ist, nach (V, 11) berechnet wird und den resultierenden Gradienten somit verdoppelt; die folgenden betragen Bruchteile dieses Wertes:

$$\Delta \pi_2 = 0.70 \Delta \pi_1; \quad \Delta \pi_3 = 0.50 \Delta \pi_1; \quad \Delta \pi_4 = 0.30 \Delta \pi_1; \quad \Delta \pi_5 = 0.10 \Delta \pi_1.$$

Die Gleichung (V, 10), die zur Berechnung von $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \varphi}$ dient, zeigt, daß das Ergebnis von der Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\lambda}_0$ am Äquator abhängig sein muß. Wir haben für dieselbe den

Wert $\dot{\lambda}_0 = -5^\circ$ angenommen. Die resultierenden Geschwindigkeiten in Breite für alle Breitengrade bis zur Grenze* des NEB ($\varphi = 8.0^\circ$) stehen in der folgenden Tabelle.

Tabelle 6. Die Geschwindigkeiten in Breite $r\dot{\varphi}$ in m je Sekunde bei 5 Hypothesen über den Betrag des Soges in Einheiten des Gleichgewichtsgradienten.

$\varphi \backslash$ Sog	100%	70%	50%	30%	10%
0.0	0	0	0	0	0
1.0	30	25	21	16	10
2.0	61	51	43	34	19
3.0	96	80	68	52	29
4.0	134	112	94	64	41
5.0	176	148	125	97	56
6.0	225	188	159	124	75
7.0	279	234	197	153	99
8.0	340	284	240	188	129

Die Geschwindigkeiten in Länge $r \cos \varphi \dot{\lambda}$ sind nach der Formel

$$r \cos \varphi \dot{\lambda} = r \cos \varphi \left[-\omega + (\dot{\lambda}_0 + \omega) \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} \right] \quad (\text{V, } 13)$$

bei drei Annahmen über die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{\lambda}_0$ in der folgenden Tabelle berechnet.

Tabelle 7. Die Geschwindigkeiten in Länge $r \cos \varphi \dot{\lambda}$ in m je Sekunde bei 3 Annahmen über $\dot{\lambda}_0$.

$\varphi \backslash$	$\dot{\lambda}_0 = 0^\circ$	$\dot{\lambda}_0 = -5^\circ$	$\dot{\lambda}_0 = -8^\circ$
0.0	0	72	115
1.0	4	77	120
2.0	15	87	130
3.0	35	108	150
4.0	62	132	176
5.0	96	167	210
6.0	138	211	254
7.0	187	260	303
8.0	244	317	360

* Die innere Grenze des NEB wird hier bei $\zeta = 8^\circ$ angenommen.

Wir sehen, daß ohne Rücksicht auf die Reibung die Geschwindigkeiten in Länge, d. h. der Westwind schon in der Breite von 8° bei Jupiter kolossale Beträge erreicht. Aber auch die Nord-Süd-Komponente des Windes ist bei geringen zusätzlichen Druckgradienten sehr groß (Tabelle 6).

Die Zahlen beider Tabellen lassen sich durch Potenzreihen mit drei bzw. zwei Gliedern als Funktionen der Breite sehr genau darstellen. Diese Potenzreihen, die für die weitere Rechnung bequem sind, sollen hier angeführt werden (φ in absolutem Maß):

$$\begin{aligned} (1) \quad r\dot{\varphi} &= 1651 \varphi + 1820 \varphi^2 + 27184 \varphi^3 \\ (2) \quad r\dot{\varphi} &= 1369 \varphi + 1987 \varphi^2 + 18810 \varphi^3 \\ \lambda_0 = -5^\circ \quad (3) \quad r\dot{\varphi} &= 1146 \varphi + 1913 \varphi^2 + 15675 \varphi^3 \quad (V, 14) \\ (4) \quad r\dot{\varphi} &= 1914 \varphi + 1860 \varphi^2 + 15871 \varphi^3 \\ (5) \quad r\dot{\varphi} &= 1611 \varphi - 2859 \varphi^2 + 36641 \varphi^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_0 = 0^\circ \quad r\dot{\lambda} \cos \varphi &= -3.8006 \varphi^2 \\ \dot{\lambda}_0 = -5^\circ \quad r\dot{\lambda} \cos \varphi &= -72 - 3.8223 \varphi^2 \quad (V, 15) \\ \dot{\lambda}_0 = -8^\circ \quad r\dot{\lambda} \cos \varphi &= -115 - 3.8355 \varphi^2. \end{aligned}$$

Will man den Verlauf der Kurven in der äquatorialen Zone des Planeten anschaulich machen, so ist es bequem $\frac{d\lambda}{d\varphi}$ zu berechnen, wobei sich wegen des hyperbolischen Verlaufs derselben die Form

$$\cos \varphi \frac{d\lambda}{d\varphi} = a_i + b_i \varphi^{c_i} \quad (V, 16)$$

als angemessen erweist. Die Werte der Konstanten für die fünf Hypothesen stehen in der folgenden Tabelle.

Tabelle 8. Die Werte der Konstanten in der Formel (V, 16).

i	a_i	b_i	c_i
1	-0.932	-1.614	-2.443
2	-1.114	-1.808	-2.469
3	-1.320	-2.251	-2.528
4	-1.700	-4.355	-2.798
5	-2.900	-6.839	-2.623

Die Integration der Gleichung (V, 16) von der unteren Grenze $\lambda_0 = 0$ und $\varphi_0 = 0.5^\circ$ bis $\varphi = 8^\circ$ ergibt folgende Werte der Längen für äquidistante Breiten.

Tabelle 9. Die Bahnen der Teilchen.

φ	λ				
	I	II	III	IV	V
0.5°	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00	-0.00
1.0	-2.39	-2.74	-3.43	-6.85	-10.20
2.0	-4.03	-4.63	-5.71	-10.27	-15.94
3.0	-5.14	-5.95	-7.26	-12.33	-19.50
4.0	-6.15	-7.25	-8.75	-14.17	-22.67
5.0	-7.16	-8.32	-10.05	-15.94	-25.71
6.0	-8.08	-9.45	-11.40	-17.67	-28.68
7.0	-9.03	-10.57	-12.75	-19.40	-31.63
8.0	-9.95	-11.70	-14.08	-21.11	-34.57

Die Bewegung in Breite ist anfangs gering entsprechend dem kleinen Werte des Druckgradienten und steigt dann stark an, so daß der Einfall in den Breitenkreis von 8° recht steil verläuft. Diese Kurven sind rein hypothetisch, weil für den Sog oder den zusätzlichen Druckgradienten auf der ganzen Strecke derselbe Bruchteil des Gleichgewichtsgradienten angenommen ist. Freilich müßte es der Wirklichkeit entsprechen, daß der Sog

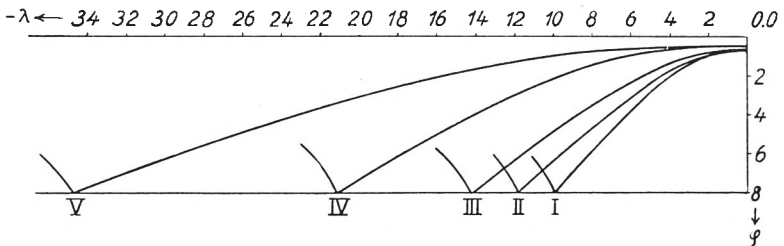


Abb. 1.

mit der Breite wächst, da das der Annäherung an das durch den rapiden Aufstieg bedingte Druckminimum in der Umgebung des Breitenkreises des NEB entspricht. Abb. 1 stellt die Bahnen der Teilchen entsprechend der Tabelle 9 dar.

VI. Das Zurückströmen der Gasmasse im oberen Niveau der Atmosphäre und die Dauer eines Umlaufs.

In der Breite des NEB erfolgt der schnelle Aufstieg der herangeströmten Gasmasse, die dabei nur eine kleine Abweichung nach Westen erfährt. Die große Beschleunigung gegen die feste Oberfläche nach Osten hätte sie bei Vernachlässigung der Reibung dabei beibehalten. In der oberen Grenze der Troposphäre erfolgt jetzt ein Zurückströmen des Gases nach dem Äquator infolge eines hier herrschenden, durch das Abströmen des Gases gebildeten Minimums. Die Bahn des Teilchens ohne Rücksicht auf die Reibung könnte nach den Formeln

$$r \cos \varphi \dot{\lambda} = r \cos \varphi \left[-\omega + \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} (\dot{\lambda}_8 + \omega) \right] \quad (\text{VI, 1})$$

$$r^2 \dot{\varphi}^2 = r^2 \cos^2 \varphi_8 \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi_8}{\cos^2 \varphi} \right) \left[(\dot{\lambda}_8 + \omega)^2 - \frac{\omega^2 \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi_8} \right] \\ - 2 \int_{\varphi_8}^{\varphi} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi} d\varphi \quad (\text{VI, 2})$$

berechnet werden, in denen der Index 8 sich auf die Ausgangsbreite bezieht. Das Ergebnis wäre, wie aus den Gleichungen zu ersehen, eine zum Meridian des Aufstiegs spiegelbildlich symmetrische Kurve, wenn $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$, der resultierende Druckgradient, in symmetrischen Punkten gleich große Werte mit umgekehrtem Vorzeichen haben würde, was aber mit Sicherheit nicht zu erwarten ist. Das für das Gleichgewicht eines Helmholtzschen Ringes notwendige allgemeine Anwachsen des Druckes nach dem Äquator zu ist durch die störende Wirkung der Meridional Komponente abgeschwächt aber nicht aufgehoben. Der Zufluß der Gasmassen vom Äquator zum Parallelkreise des NEB in der unteren Schicht der Atmosphäre bedingt mit Notwendigkeit eine Zirkulation, d. h. ein Zurückströmen derselben nach dem Äquator in der oberen Schicht, um das durch den Abfluß der Gase am Äquator entstehende Minimum aufzufüllen. Über den Betrag des Druckgradienten in der oberen Schicht läßt sich aber schwer etwas aussagen. Der Rücklauf in der oberen Schicht kann deshalb nicht berechnet werden. In der Abb. 1 ist der Rückweg der Teilchen nur angedeutet.

Die ganze Bahn eines Teilchens zu verfolgen ist somit nicht möglich. Wie wir aus der Einleitung wissen, wäre auch die schraubenartige Bewegung, die sich ohne Rücksicht auf die Reibung ergibt, nicht stabil.

Die Dauer des Durchlaufens einer halben Windung im reibungslosen Falle ergibt sich durch Integration der Gleichungen (V, 14), deren Koeffizienten wir hier durch α_i , β_i und γ_i bezeichnen wollen, in der Form

$$r \int_0^{8^\circ} \frac{d\varphi}{\alpha_i \varphi + \beta_i \varphi^2 + \gamma_i \varphi^3} = t - t_0. \quad (\text{VI, 3})$$

Das Integral wurde numerisch ausgewertet und ergab in den fünf Fällen als Laufzeiten vom Äquator bis zum Breitenkreise von 8° die Werte im Falle $i = 1 : 27^{\text{h}}75$, $i = 2 : 32^{\text{h}}75$, $i = 3 : 38^{\text{h}}59$, $i = 4 : 49^{\text{h}}30$, $i = 5 : 83^{\text{h}}15$. Die Zeiten des Auf- und Abstiegs brauchen natürlich dabei nicht berücksichtigt zu werden.

Doch werden diese Zeiten in der wirklichen Bewegung wesentlich verändert. Die ganze Rechnung für den reibungslosen Fall ist nur zur ersten Orientierung durchgeführt, schon um zu zeigen, daß die sich ergebenden Geschwindigkeiten die Berücksichtigung einer turbulenten Reibung erfordern. Diese ändert aber sogar den Charakter der Bewegung. Die resultierende Geschwindigkeit der Luftmassen nach Osten (äquatoriale Beschleunigung) wäre, wie die Tabelle 7 zeigt, auch viel zu groß gegenüber dem beobachteten Durchschnittswerte von -115 m/sec in der ganzen äquatorialen Zone. Die Beobachtungen erlauben bisher keine Differenzierung der Geschwindigkeiten innerhalb der Zone. Wir müssen deshalb auch für die Äquatorpunkte $\lambda_0 = -8^\circ$ annehmen, wobei dann im Breitenkreise von 8° schon Geschwindigkeiten von 360 m/sec resultieren würden. Dieser Zuwachs wird augenscheinlich durch die Reibung ausgeglichen, wobei sich dann eine ziemlich gleichmäßige Geschwindigkeit in Länge von 115 m/sec für die ganze Strecke des Hin- und Rückweges ergibt. Diese ist nicht wesentlich von der Aufstiegs geschwindigkeit im Breitenkreise des NEB verschieden, denn wir erhielten für dieselbe bei Berücksichtigung

der Reibung 135 m/sec. Die Berechnung der Turbulenzreibung, die diesen Ausgleich der Geschwindigkeiten bewirkt, wird im folgenden Kapitel behandelt.

VII. Das Zuströmen der Gasmassen vom Äquator nach dem Breitenkreise des NEB mit Rücksicht auf die Reibung.

In den Gleichungen (V, 1) für die Bewegung eines Gasteilchens von der Masse Eins im rotierenden Koordinatensystem sind rechts als letzte Glieder die Komponenten der Reibungskraft F_r , F_φ und F_λ enthalten, aber bisher nicht berücksichtigt. Nach Einführung linearer kartesischer Koordinaten mit dem Ursprung im Punkte der festen Oberfläche, der z -Achse vertikal nach außen, der x -Achse längs dem Parallel nach Westen und der y -Achse längs dem Meridian nach dem Äquator, so daß

(VII, 1)

$$u = \frac{dx}{dt} = r \cos \varphi \dot{\lambda}; \quad v = \frac{dy}{dt} = r \dot{\varphi}; \quad w = \frac{dz}{dt} = \dot{r}$$

wird, erhalten die Gleichungen (V, 1) die Form

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dt} - \underbrace{\frac{v^2}{r} - \frac{u^2}{r}}_{\text{Zentrifugalkraft}} - 2u\omega \cos \varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial z} + \frac{1}{\rho} F_z - g \\ \frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{vw}{r} + \operatorname{tg} \varphi \frac{u^2}{r}}_{\text{Zentrifugalkraft}} + 2u\omega \sin \varphi &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{1}{\rho} F_y \quad (\text{VII, 2}) \\ \frac{du}{dt} + \underbrace{\frac{uw}{r} - \frac{uv}{r} \operatorname{tg} \varphi}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \underbrace{2\omega w \cos \varphi - 2\omega v \sin \varphi}_{\text{Corioliskraft}} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_x, \end{aligned}$$

wo F_x , F_y , F_z die Komponenten der Reibungskraft in linearen Koordinaten sind. Hier interessiert nur die dritte Gleichung, deren linke Seite das Differential des Rotationsmoments darstellt (siehe Formel (V, 4)). Schreibt man dasselbe wieder in sphärischen Koordinaten aus, so ergibt die dritte Gleichung:

$$\frac{1}{r \cos \varphi} \frac{d[r^2 \cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \omega)]}{dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_x. \quad (\text{VII, 3})$$

Bei stationärer Bewegung längs dem Parallel dürfen wir den Durchschnittswert von $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0$ setzen, wenn auch für die innere Bewegung innerhalb des Luftringes der Druckgradient nicht verschwindet. Für die Reibungskraft parallel zur Oberfläche haben wir bei turbulenter Bewegung den Schmidtschen Ansatz

$$\frac{1}{\rho} F_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial z} \left(A \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad (\text{VII, 4})$$

wo A der Austauschkoefizient ist. Da wir über die Abnahme der Geschwindigkeit mit der Höhe nichts wissen, setzen wir $\frac{\partial}{\partial z} \sim \frac{1}{H}$. Im weiteren werden wir statt des Proportionalitäts- das Gleichheitszeichen schreiben, indem wir uns dabei bewußt bleiben, nicht den wahren Austauschkoefizienten, sondern eine ihm proportionale Größe eingeführt zu haben. Es wird dann

$$\frac{1}{\rho} F_x = \frac{1}{\rho} A \frac{u}{H^2} = \frac{A}{\rho H^2} r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$$

und nach der Integration

$$\begin{aligned} r^2 [\cos^2 \varphi (\dot{\lambda} + \omega) - \cos^2 \varphi_0 (\dot{\lambda}_0 + \omega)] &= \frac{A r^2}{\rho H^2} \int_0^\varphi \cos^2 \varphi \frac{d\lambda}{d\varphi} d\varphi \\ &= \frac{A}{\rho H^2} \int_0^\varphi \cos \varphi (a + b \varphi^c) d\varphi, \end{aligned} \quad (\text{VII, 5})$$

wo für $\frac{d\lambda}{d\varphi}$ sein Ausdruck aus (V, 16) eingesetzt ist. Durch die Integration der rechten Seite und geeignete Umformung der linken erhalten wir dann

$$r \cos \varphi \left[\dot{\lambda} - \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} (\dot{\lambda}_0 + \omega) + \omega \right] = \frac{A r}{\rho H^2} \left(a \varphi + \frac{b}{1+c} \varphi^{1+c} \right). \quad (\text{VII, 6})$$

Hier ist noch der wenig veränderliche Faktor $\cos \varphi$ nach dem Mittelwertsatz aus dem Integral herausgenommen und mit $\frac{1}{\cos \varphi}$ vor dem Integral gekürzt. Links stehen jetzt die Geschwindigkeitsdifferenzen der reibungslosen Bewegung gegen diejenige am Äquator von 115 m/sec, die dem Anfangswert $\dot{\lambda}_0 = -8^\circ$ täglich und der beobachteten durchschnittlichen äquatorialen

Beschleunigung entspricht. Die Gleichung stellt die Bedingung dar, daß diese mit der Breite anwachsenden Differenzen durch das rechts stehende Reibungsglied dargestellt werden. Die Rechnung wurde für den Zustrom der Gasmassen vom Äquator in der unteren Schicht der Atmosphäre durchgeführt, wobei die Dichte ρ_0 als konstant angesehen werden durfte. Die Rechnung wurde für 5 Werte des zusätzlichen Druckgradienten $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$ durchgeführt. Die linke Seite der Gleichung war deshalb immer dieselbe und hatte für die einzelnen Breitengrade die Werte in m/sec, die links in der Tabelle 10 stehen. Die resultierenden Werte von $\frac{A}{\rho_0} \frac{r}{H^2}$ stehen unter I bis V rechts.

Tabelle 10. Die Werte von $\frac{A}{\rho} \frac{r}{H^2}$.

φ	Linke Seite von (VII, 6) in m/sec	Hypothesen				
		I	II	III	IV	V
2.0	15	10.33	8.42	7.05	5.55	3.39
3.0	35	13.64	11.30	9.50	7.35	4.38
4.0	61	17.05	14.14	12.35	9.24	5.47
5.0	95	21.09	17.42	14.68	11.27	6.69
6.0	139	25.23	21.08	17.76	13.76	8.10
7.0	188	29.11	24.33	20.51	15.90	9.24
8.0	245	33.10	27.66	23.34	18.09	10.62

Für jede der fünf Hypothesen ergeben sich so 7 Werte der Konstanten $\frac{A r}{\rho H^2}$, wenn wir den ersten für $\varphi = 1^\circ$, der wegen der Nähe der Singularitätsstelle $\varphi = 0$ unsinnige Werte ergibt, fortlassen. Der Mittelwert ist

$$\frac{A}{H^2} = 1452 \frac{\rho_0}{r}.$$

Mit den Werten $r = 71 \times 10^8$ cm und 2 Werten für ρ_0 , die den auf Seite 121 angeführten entsprechen, nämlich $\rho_1^0 = 8.619 \times 10^{-6}$ g cm $^{-3}$ und $\rho_2^0 = 8.619 \times 10^{-5}$ g cm $^{-3}$, folgt bei $H = 15 \times 10^5$ cm für A der Wert

$$A_1 = 4.0 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-1} \text{ und } A_2 = 40 \text{ g cm}^{-1} \text{ sec}^{-1}.$$

Wenn auch diese Werte des turbulenten Austauschkoefizienten die Geschwindigkeiten in der äquatorialen Zone im wesentlichen ausgleichen und damit auf den beobachteten Wert zurückführen, so dürfen sie bei dem hypothetischen Charakter der zugrunde gelegten Druckgradienten und den Unsicherheiten in den Werten der Dichte und der Höhe der Troposphäre nicht als eine Bestätigung der ganzen Theorie angesehen werden. Auch im Falle ihrer prinzipiellen Richtigkeit sind sie nur als rohe Näherungswerte anzusehen.

Es ist deshalb von Bedeutung, daß sich noch ein anderer Weg zur Ableitung des Austauschkoefizienten als Maß der inneren Reibung darbietet. Er beruht auf der Überlegung, daß die dem Kreislauf der Gasmasse zugeführte mechanische Energie, als Hebearbeit beim Aufstieg bekannter Geschwindigkeit berechnet werden kann und daß diese Arbeit der turbulenten Reibung auf dem ganzen Wege zwischen dem NEB und dem Äquator gleich sein muß, damit eine stationäre Beschleunigung der Atmosphäre in der äquatorialen Zone bestehen kann.

Wir greifen auf die Gleichungen (VII, 2) für die Bewegung eines Teilchens von der Masse Eins im rotierenden Koordinatensystem zurück und verfahren mit ihnen so, wie es bei der Ableitung der Bjerknes-Bernoullischen Energiegleichung üblich ist, mit dem Unterschiede, daß wir auch die Arbeit der Reibungskraft F berücksichtigen. Die Multiplikation dieser Gleichungen mit w , v , u und nachfolgende Addition ergibt

$$\frac{d(u^2 + v^2 + w^2)}{2} = -\frac{1}{\rho} \left(u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + w \frac{\partial p}{\partial z} \right) + \frac{1}{\rho} (uF_x + vF_y + wF_z) - g dz \quad (\text{VII, 8})$$

oder, wenn c die Geschwindigkeit, ds ein Bahnelement und F_s die Projektion der Reibungskraft auf die Bahnkurve bedeuten:

$$d \left(\frac{c^2}{2} + gz \right) = -\frac{1}{\rho} c \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{c}{\rho} F_s. \quad (\text{VII, 9})$$

Addiert man hierzu die Gleichung des ersten Hauptsatzes, nachdem dieselbe in mechanischen Einheiten ausgedrückt ist

$$J \frac{dq}{dt} = J c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d \left(\frac{1}{\rho} \right)}{dt}, \quad (\text{VII, 10})$$

wo J das Arbeitsäquivalent einer Kalorie der von außen zugeführten Wärme q bedeutet ($J = 4.186 \times 10^7$ erg cal⁻¹), c_v die Wärmekapazität bei konstantem Volumen und T die absolute Temperatur bedeuten, so erhält man

(VII, 11)

$$J \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{c^2}{2} + gz + Jc_v T \right) + p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} + \frac{c}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{c}{\rho} F_s.$$

Diese Gleichung bedeutet, daß die der Masseneinheit von außen zugeführte Wärmeenergie sich auf den Zuwachs der kinetischen, potentiellen und inneren Energie einerseits und dann auf die Ausdehnungsarbeit, die Arbeit, die das Teilchen gegen die Gradientkraft $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s}$ und endlich die Arbeit der inneren Reibung verteilt. Bei der üblichen Transformation

$$c \frac{\partial p}{\partial s} = \frac{dp}{dt} - \frac{\partial p}{\partial t}$$

erhält man noch die andere Form der Energiegleichung

(VII, 12)

$$Jdq = d\left(\frac{c^2}{2} + gz + Jc_v T + \frac{p}{\rho}\right) - \frac{c}{\rho} \frac{\partial p}{\partial t} dt - \frac{c}{\rho} F_s dt.$$

Statt der zugeführten Wärme können wir links die mechanische Energie des Emporschleuderns der Gasteilchen an der Grenze des NEB verstehen, die für den Kreislauf in der äquatorialen Zone natürlich auch als von außen wirksame Energie aufzufassen ist. Integrieren wir diese Gleichung längs einer geschlossenen Stromröhre und fordern die Einstellung stationärer Verhältnisse, so fallen das erste Glied rechts als vollständiges Differential, das zweite wegen $\frac{\partial p}{\partial t} = 0$ fort. Das Integral über die linke Seite ist nur über die kurze Aufstiegsstrecke von $H = 15$ km auszudehnen, weil nur auf ihr mechanische Energie zugeführt wird und es verbleibt

$$\int_0^H w dw = - \oint \frac{F_s ds}{\rho}. \quad (\text{VII, 13})$$

Wir haben hierbei den geschlossenen Weg einer Zirkulation im Meridian als Bahnkurve des Teilchens eingeführt statt des schraubenartigen wahren Weges. Das ist aber berechtigt, da

die Abweichung vom Meridian durch die Corioliskraft bedingt ist und diese als eine Scheinkraft keine Arbeit leisten kann. Sie kann wohl die Richtung der Bewegung, nicht aber ihre Energie ändern. Für die Projektion der Reibungskraft auf die Bahnkurve führen wir wieder den Austauschkoefizienten A (oder eine ihm proportionale Größe, siehe S. 140) ein durch die Gleichung

$$F_s = \frac{\partial}{\partial z} A \left(\frac{\partial c}{\partial z} \right) = \frac{A}{H^2} c \quad (\text{VII, 14})$$

und erhalten dann nach der Integration

$$\frac{1}{2} W^2 = \frac{A}{\rho H^2} \oint c ds = \frac{A}{\rho H^2} \bar{c} S, \quad (\text{VII, 15})$$

wo wir die mittlere Geschwindigkeit \bar{c} außerhalb des Integrals gesetzt haben. S ist dann die Gesamtlänge des Integrationsweges. Bei der Berechnung desselben müssen wir berücksichtigen, daß die wahre Bahn aus zwei Zweigen im unteren und im oberen Teil der Troposphäre zum Meridian geneigt verläuft. Nur ihre Komponente parallel zum Äquator ist uns als die beobachtete äquatoriale Beschleunigung von 115 m/sec bekannt. Wir begehen nur einen kleinen Fehler, wenn wir die beiden Zweige der wahren Bahn durch Gerade mit 45° Neigung zum Meridian ersetzen und ihre Projektionen auf den Meridian im Verhältnis $\sec 45^\circ : 1$ vergrößern. Dasselbe gilt dann auch für die Geschwindigkeit \bar{c} , so daß das Produkt $\bar{c} S$ im Verhältnis $2 : 1$ zu vergrößern ist. Damit wird

$$2\bar{c} S = 4r \text{ arc } 8^\circ \times 11500 = 45.60 \times 10^{12} \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Bei einer Aufstiegsgeschwindigkeit von 135 m/sec ergibt sich für die zugeführte Energie der Masseneinheit

$$\frac{W^2}{2} = 9.1125 \times 10^7 \text{ g cm}^2 \text{ sec}^{-2},$$

daraus folgt bei $H = 15 \text{ km}$

$$\frac{A}{\rho} = 4.4962 \times 10^6 \text{ cm}^2 \text{ sec}^{-1}.$$

Als Dichte für den gesamten Zirkulationsweg können wir nur einen Mittelwert für die ganze Troposphäre einsetzen. Dieser ist

$$\bar{\rho} = \frac{\rho_0}{H} \int_0^H \left(\frac{T'_0 - \alpha z}{T'_0} \right)^{\frac{g}{\alpha R}} dz = \frac{\rho_0}{H} \frac{R T'_0}{g} \left[1 - \left(\frac{T'_H}{T'_0} \right)^{\frac{g}{\alpha R}} \right],$$

wo wir entsprechend unseren Annahmen ($\alpha = 7^\circ$ je km, $\rho_0^1 = 8.619 \times 10^{-6}$ und $\rho_0^2 = 8.619 \times 10^{-5}$, $H = 15$ km) zu setzen haben. Wir erhalten $\bar{\rho} = 0.37 \rho_0$. Dann ergibt sich

$$A_1 = 14.3 \text{ und } A_2 = 143.$$

Die Übereinstimmung mit dem aus der Erhaltung des Impulsatzes abgeleiteten Werte ist größenordnungsmäßig genügend, wenn man berücksichtigt, daß der Austauschkoefizient stark von der Höhe abhängig ist und in der irdischen Atmosphäre zwischen der Erdoberfläche und 500 m Höhe im Verhältnis 50:1 zunimmt. Ein Vergleich mit den Werten in der irdischen Atmosphäre ist natürlich nicht möglich, weil uns der Absolutwert für die Jupiteratmosphäre unbekannt bleibt.

VIII. Die bei dem Aufstieg der äquatorialen Zone zugeführte Energie.

Wenn auch die Übereinstimmung der auf verschiedenem Wege abgeleiteten Austauschkoefizienten unser Bild von der Ursache der Beschleunigung der äquatorialen Zone zu stützen scheint und die Dynamik des ganzen Vorganges damit klargelegt ist, so ist es doch nicht überflüssig, die Energie dieser inneren Bewegung mit der von der Sonne herrührenden zu vergleichen, um damit dem möglichen Einwände zu begegnen, daß vielleicht die Sonnenstrahlung ähnliche Bewegungen in der Jupiteratmosphäre hervorrufen könnte.

Wir begrenzen den beschleunigten Teil der Atmosphäre durch die Ebenen des Jupiteräquators und des Parallelkreises bei 8° nördlicher Breite, indem wir für die Zone südlich des Äquators bis zum SEB ähnliche Verhältnisse voraussetzen. Die Oberfläche der ganzen Zone zwischen 0 und 8° ist, wenn wir von der Abplattung absehen,

(VIII, 1)

$$Z = r^2 \int_0^8 \cos^2 \varphi d\varphi \int_{-\pi}^{+\pi} d\lambda = \pi r^2 \left[\text{arc } 8^\circ + \frac{1}{2} \sin 16^\circ \right] = \pi r^2 F.$$

Über ihr lastet die Masse der in Bewegung befindlichen Troposphäre. Über einem cm^2 ist Masse

$$\bar{\rho}H = 0.37 \rho_0 H = 4.77 \text{ bzw. } 47.7 \text{ g.}$$

Entsprechend ist die Gesamtmasse der Troposphäre über der Zone

$$M_1 = Z 4.77 \text{ g}; M_2 = Z 47.7 \text{ g}. \quad (\text{VIII, 2})$$

Wenn durch S die Solarkonstante für Jupiter bezeichnet wird, so ist die der halben Zone je Minute zugeführte Sonnenenergie

$$Q = S r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos \lambda d\lambda \int_0^8 \cos^2 \varphi d\varphi = S r^2 \left(\text{arc } 8^\circ + \frac{1}{2} \sin 16^\circ \right) = S r^2 F. \quad (\text{VIII 3})$$

Von derselben wird aber der Bruchteil A in den Raum zurückgestrahlt, wo A die Albedo bedeutet; der übrige Teil kommt nach mancherlei Umwandlungen an der Jupiteroberfläche oder auch direkt durch Absorption in der Atmosphäre dieser zugute. Damit wird der von der Sonne je Minute einem g Masse der Jupiteratmosphäre in der gesamten Zone zugeführte Energie gleich

$$\frac{Q(I-A)}{Z \bar{\rho} H}. \quad (\text{VIII 4})$$

Der Wert der Solarkonstante für Jupiter ist

$$S = \frac{1.94}{27.1} = 0.07159 \text{ cal min}^{-1} \text{ cm}^{-2},$$

der Wert der Albedo A ist 0.44. Damit ergibt sich für die je Gramm und Minute der Atmosphärenzone zugeführte Energie

$$\frac{S(1-A)}{\pi \bar{\rho}} = 1.12 \times 10^5 \text{ resp. } 1.12 \times 10^4 \text{ erg.}$$

Dieselbe ist gleichmäßig über die im allgemeinen gleichmäßig helle Zone verteilt und könnte daher keine Bewegung der ganzen Atmosphärenmasse hervorrufen. Für eine solche kämen nur die Unterschiede der Bestrahlung am Äquator und am Rande der Zone in Betracht, die eine meridionale Bewegung hervorrufen könnten. Diese Unterschiede betragen aber höchstens $1 - \cos 8^\circ = 0.01$ des äquatorialen Wertes, d. h. 10^3 bzw. 10^2 erg.

Wenn wir die der Zone durch Emporschleudern der Gasmassen an der Grenze des NEB zugeführte Energie berechnen wollen, müssen wir, wenn wir sie wieder auf ein Gramm Masse

beziehen, die Voraussetzung machen, daß dasselbe nach Durchlaufen des ganzen Zirkulationsweges irgendwie zum Parallelkreise des NEB zurückkehrt, um hier wieder emporgeschleudert zu werden. Wir setzen den Zirkulationsweg wieder aus zwei Ästen im unteren und im oberen Teil der Atmosphäre zusammen, die wir der Einfachheit halber als gradlinig und unter 45° zum Meridian geneigt annehmen. Die durchschnittliche Geschwindigkeit soll der äquatorialen Beschleunigung von 115 m/sec entsprechen. Dann ist die Aufstiegsenergie, die in 110 sec zugeführt wird, auf die Dauer der ganzen Zirkulation zu verteilen. Das ergibt dann die durchschnittliche jedem Gramm Masse je Minute zugeführte Energie. Wir erhalten also die je Minute einem g Masse durch Aufstieg zugeführte Energie

$$\frac{W^2}{2} = \frac{(13500)^2}{2} = 3.28 \times 10^{11} \text{ erg min}^{-1}.$$

Der Reduktionsfaktor ist

$$110^5: \text{Zirkulationsdauer in sec} = 110: \frac{2 \times 71 \times 10^8 \text{ arc } 8^\circ}{11500} = 84 \times 10^{-5},$$

somit als Energiezufuhr pro Gramm der bewegten Atmosphärenmasse $2.8 \times 10^8 \text{ erg min}^{-1}$. Damit ergibt sich, wie zu erwarten war, eine Energiezufuhr, die 10^3 mal größer ist als die gesamte von der Sonne herrührende und 10^5 mal größer als die für die Erzeugung von Meridionalströmungen in Betracht kommende Sonnenenergie.

Die Abb. 2 und 3 enthalten Zeichnungen der Jupiteroberfläche von Herrn E. Mädlow in Treptow, die geeignet sind, die Bahnen der Teilchen zwischen dem Äquator und dem NEB zu veranschaulichen.

Die Abb. 4 und 5 von Herrn Ph. Fauth in Grünwald zeigen, daß beide Komponenten der äquatorialen Strömung zwischen dem Äquator und dem NEB, sowie dem Äquator und dem SEB, in eine Reihe oval begrenzter Wirbel zerfallen. Beide Formen können als typische Formationen der äquatorialen atmosphärischen Zone angesehen werden, wie sie allen geübten Jupiterbeobachtern wohl bekannt sind.

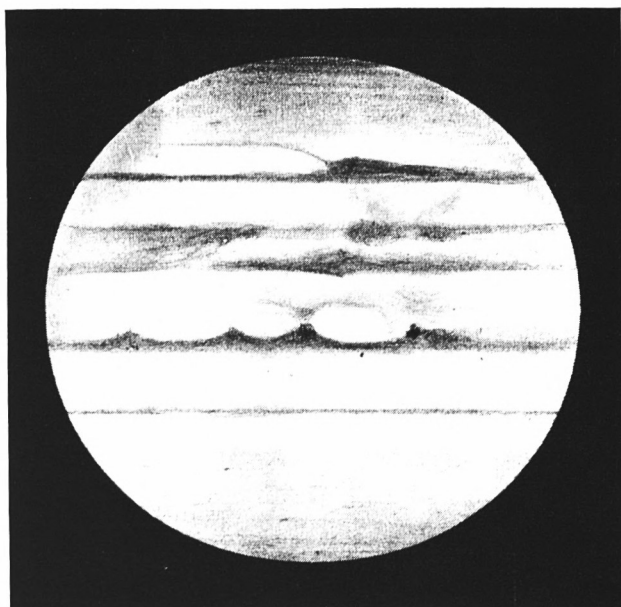


Abb. 2



Abb. 3

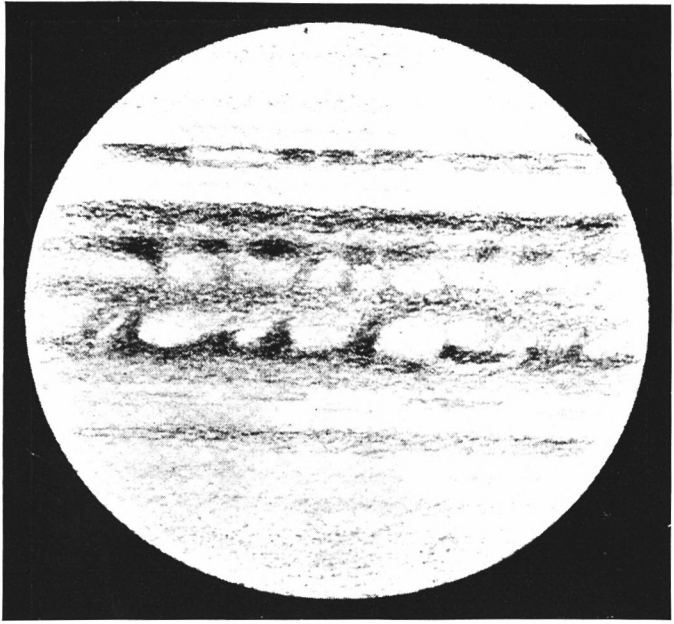


Abb. 4

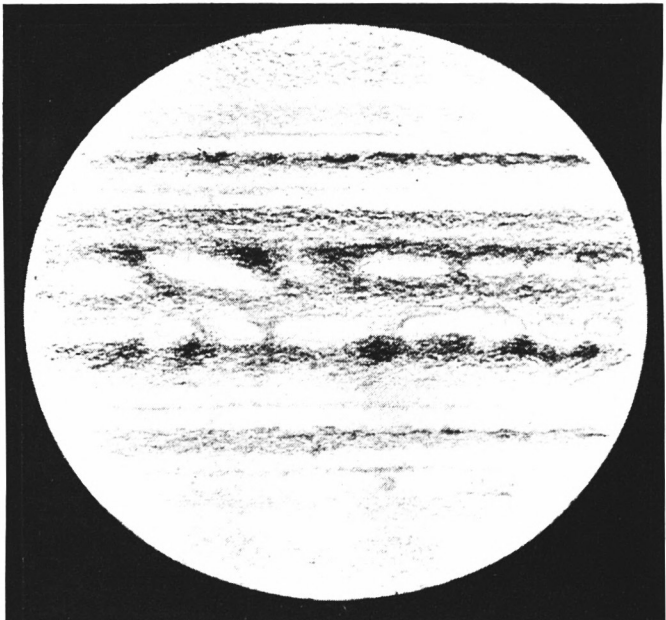


Abb. 5

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1949

Band/Volume: [1948](#)

Autor(en)/Author(s): Schoenberg Erich

Artikel/Article: [Die äquatoriale Beschleunigung bei Jupiter 115-147](#)