Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1948

München 1949
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission beim Biederstein Verlag München

Betrachtungen über Flächenabbildungen.

IX. Flächen, die sich gegenseitig gleichmäßig entsprechen.

Von **Frank Löbell** in München.

Vorgelegt am 10. Dezember 1948.

Bei einer früheren Gelegenheit wurde die Frage gestreift, wann eine affine Abbildung einer Ebene ε auf eine andere ε' im euklidischen Raum zugleich mit ihrer inversen „gleichmäßig" ist.[1] Es ergab sich, daß dies dann und nur dann der Fall sein kann, wenn

entweder entsprechende Richtungen von ε und ε' stets zueinander senkrecht sind

oder eine Drehstreckung in ε verbunden mit einer Translation nach ε' vorliegt.

Die folgende Mitteilung möge die Antwort vervollständigen: Es sollen alle Flächenpaare $\mathfrak{x}(u, v) \rightleftarrows \mathfrak{y}(u, v)$ angegeben werden, deren Koppelung in doppeltem Sinne gleichmäßig ist.

1. Die erste Art dieser Paare besteht, wie gesagt, aus den Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, die einander durch Orthogonalität der Linienelemente zugeordnet sind.

Man weiß seit langem, daß es zu jeder Fläche $\mathfrak{x}$ unendlich viele Flächen $\mathfrak{y}$ gibt, die mit ihr in der genannten Beziehung stehen, und daß man ihre Bestimmung, sofern $\mathfrak{x}$ nicht abwickelbar ist, auf die Integration einer gewissen linearen partiellen Differentialgleichung 2.O., der sog. charakteristischen Gleichung, zurückführen kann, der die von Weingarten eingeführte „Verschiebungsfunktion" genügen muß.[2] Wenn das Krümmungsmaß von $\mathfrak{x}$ verschwindet, hängt die Lösung der Aufgabe von der Integration linearer partieller Differentialgleichungen 1.O. ab.

[1] SitzBer. der Bayer. Akademie der Wiss., Math.-nat. Kl., 1947 S. 25 ff., bes. S. 33.

[2] J. Weingarten, Über die Deformationen einer biegsamen unausdehnbaren Fläche, Crelles Journal 100, 1887, S. 296 ff.

Das Problem hängt bekanntlich aufs engste sowohl mit dem der Auffindung aller infinitesimalen Verbiegungen von $\mathfrak{x}$ als auch mit dem der Bestimmung aller Drehrisse von $\mathfrak{x}$ zusammen.[3] Aus diesem Grunde bietet auch die Lösung der Aufgabe in dem Falle der Abwickelbarkeit der Fläche $\mathfrak{x}$ keine grundsätzliche Schwierigkeit. Diese Zusammenhänge machen auch die Tatsache verständlich, daß Volterra eine kinematische Deutung für die Verschiebungsfunktion geben konnte.[4]

Hier sei aber noch darauf hingewiesen, daß die doppelte Verschiebungsfunktion gleich der Schiefe J des Flächenpaares ist.[5] Die oben betrachteten Abbildungen können, wie sich leicht direkt nachweisen läßt, nirgends „gerade" sein, wenn man nicht entartete Flächen zulassen will.[6]

2. Die zweite Art der in Rede stehenden Paare gehört zu den einander mit parallelen Berührebenen konform entsprechenden Flächen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, deren Ermittlung sich schon Christoffel zur Aufgabe gemacht hat.[7] Da aber in diesem Zusammenhang gewöhnlich nicht ausdrücklich zwischen den Fällen, in denen direkte Winkeltreue vorliegt, und denjenigen, in denen die Winkeltreue indirekt ist, unterschieden wird, sei hier der Fall der Erhaltung des Drehsinnes kurz erneut behandelt:

Dafür, daß $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ der gestellten Forderung genügen, ist notwendig und hinreichend, daß die Vektoren $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ durch eine

---

[3] Siehe G. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces, IV, Paris 1896, S. 15 ff. E. Cesaro, Lezioni di geometria intrinseca, Napoli 1896, S. 194 ff. L. Bianchi, Lezioni di geometria differenziale, II 1, Bologna 1923, S. 5. Vgl. auch diese SitzBer. 1948, S. 227 ff.

[4] V. Volterra, Sulla deformazione delle superficie flessibili ed inestendibili. Rend. d. R. Acc. dei Lincei. Sitzung vom 6. April 1884. Vgl. auch Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech. 7 (1927), S. 463 ff., sowie die dort zitierte Literatur.

[5] Dies erkennt man sofort, wenn man einen Blick auf die in Bianchi-Lukat, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Leipzig 1899, S. 289, angegebene Definition der Verteilungsfunktion wirft, die dort mit φ bezeichnet ist. (Wegen der Definition der Schiefe vergleiche man diese SitzBer. 1944, S. 126, 107 und 122.)

[6] Vgl. diese SitzBer. 1943, S. 236, und 1947, S. 31 f.

[7] E. B. Christoffel, Über einige Eigenschaften der Minimumsflächen. Crelles Journal 67, 1867, S. 218 ff. (Ges. math. Abhandl., I, S. 259 ff.). Vgl. auch J. Knoblauch, Grundlagen der Differentialgeometrie. Leipzig und Berlin 1913, S. 601 ff.

in ihrer Ebene ε vor sich gehende Drehstreckung in $\mathfrak{y}_u$ bzw. $\mathfrak{y}_v$ transformiert werden können. Diese läßt sich aufs einfachste ausdrücken, wenn wir uns auf $\mathfrak{x}$ isotherme Parameter u, v eingeführt denken, so daß $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ aufeinander senkrechte Vektoren gleicher Länge w sind; wir setzen voraus, daß $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}\,(u, v)$ die nötigen Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsansprüche erfüllen. Dann muß nämlich, wie an anderer Stelle gezeigt wurde,[8] gelten:

$$\mathfrak{y}_u = n\,\mathfrak{x}_u + q\,\mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{y}_v = -q\,\mathfrak{x}_u + n\,\mathfrak{x}_v; \tag{1}$$

hier bedeutet n den Rißmaßstab, q den Querrißmaßstab der Abbildung[9] $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$. n und q sind Funktionen, die unter der Voraussetzung der Gleichmäßigkeit dieser Abbildung nur vom Ort (u, v), nicht aber von der Tangentenrichtung abhängen.[10]

Aus den Gleichungen (1) folgt unter den gemachten Annahmen die Integrabilitätsbedingung

$$\begin{aligned}\mathfrak{y}_{uv} &= n_v\mathfrak{x}_u + n\mathfrak{x}_{uv} + q_v\mathfrak{x}_v + q\,\mathfrak{x}_{vv} = \\ &= -q_u\mathfrak{x}_u - q\,\mathfrak{x}_{uu} + n_u\mathfrak{x}_v + n\,\mathfrak{x}_{uv}\end{aligned}$$

oder

$$(n_v + q_u)\,\mathfrak{x}_u - (n_u - q_v)\,\mathfrak{x}_v + q\,(\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv}) = 0.$$

Aus dieser Vektorbeziehung gewinnen wir durch skalare Multiplikation mit den linear unabhängigen Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$ und $\mathfrak{c} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v : w^2$ drei ihr äquivalente skalare Relationen für n und q; dabei ist zu berücksichtigen, daß wegen

$$\mathfrak{x}_u^2 = \mathfrak{x}_v^2 = w^2 \neq 0 \quad \text{und} \quad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v = 0$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_{uu} &= w\,w_u, \quad \mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_{vv} = -\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_v = -w\,w_u, \\ \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uu} &= -\mathfrak{x}_{uv}\mathfrak{x}_u = -w\,w_v, \quad \mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{vv} = w\,w_v\end{aligned}$$

wird, so daß wir finden:

$$n_u = q_v, \quad n_v = -q_u, \quad q\,(\mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_{vv}) = 0; \tag{2}$$

[8] Diese SitzBer. 1948, S. 228 f.

[9] Diese SitzBer. 1947, S. 16 und S. 21.

[10] Diese SitzBer. 1947, S. 25 f.

hier treten zwei der Fundamentalgrößen 2.O. des Netzes $\mathfrak{x}(u, v)$ auf:

$$\mathfrak{c}\mathfrak{x}_{uu} = L \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{c}\mathfrak{x}_{vv} = N.$$

a) Wird $q \neq 0$ angenommen, so muß $L + N = 0$ sein. Nach einer bekannten Formel[11] hat aber die Fläche $\mathfrak{x}$ die mittlere Krümmung $H = (L + N) : 2w^2$. Diese verschwindet also: $\mathfrak{x}$ muß eine Minimalfläche sein. Dem Sinn unserer Fragestellung gemäß ist das Gleiche für $\mathfrak{y}$ zu erwarten, da auch die Abbildung $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ einen von Null verschiedenen Querrißmaßstab $\mathfrak{c}\mathfrak{y}_u\mathfrak{x}_u : \mathfrak{y}_u^2 = -q\mathfrak{x}_u^2 : \mathfrak{y}_u^2 = -q : (n^2 + q^2)$ hat; in der Tat läßt sich dies auch durch Berechnung der Fundamentalgrößen des Netzes $\mathfrak{y}(u, v)$ nach (1) verifizieren.

Die beiden ersten der Relationen (2), die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für die Funktionen $n(u, v)$ und $q(u, v)$, besagen, daß $n + iq$ eine analytische Funktion von $u + iv$ ist, und zwar eine willkürliche:

$$n + iq = f(u + iv). \tag{3}$$

Zu den gefundenen Flächenpaaren gehören speziell die assoziierten Minimalflächen.

Daß umgekehrt zwei parallel aufeinander bezogene Minimalflächen immer in der Beziehung der direkten Winkeltreue zueinander stehen, folgt bekanntlich daraus, daß sie beide der Einheitskugel nach dem Prinzip gleichgerichteter Normalen indirekt winkeltreu entsprechen.

b) Wir haben noch die Annahme $q \equiv 0$ zu prüfen: sie führt nach (2) auf $n_u = n_v = 0$ oder $n = \text{const}$, folglich nach (1)

---

[11] Es sei daran erinnert, daß allgemein $2H = (EN - 2FM + GL) : (EG - F^2)$ ist. Übrigens ist hier, wie etwa aus den Gaußschen Ableitungsgleichungen für $\mathfrak{x}_{uu}$ und $\mathfrak{x}_{vv}$ und aus dem Verschwinden von H folgt, bekanntlich sogar $\mathfrak{x}_{uu} + \mathfrak{x}_{vv} = 0$.

[12] Allgemein gilt für jede gleichmäßige Abbildung (diese SitzBer. 1947, S. 22 (17))

$$J = -2q$$

und (diese SitzBer. 1948, S. 229 Fußnote 3 u. S. 231)

$$\mathfrak{J} = 2n\mathfrak{c} + \mathfrak{z} \times \mathfrak{c} = 2n\mathfrak{c} + \mathfrak{v} \times \mathfrak{c},$$

wobei in den hier im Text unter 2) behandelten Fällen $\mathfrak{v} = 0$ ist, während im Falle 1) gilt: $\mathfrak{J} = \mathfrak{v} \times \mathfrak{c}$; ferner ist $\mathfrak{J}_2 = (n^2 + q^2)\mathfrak{c} + n\mathfrak{v} \times \mathfrak{c} + q\mathfrak{v}$.

auf $\mathfrak{y} = n\mathfrak{x} + \mathfrak{const}$, d. h. auf beliebige Paare ähnlich gelegener Flächen.

Von Interesse sind die unmittelbar aus (1) zu berechnenden Werte der Invarianten des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$:[12]

$$\mathfrak{J} = 2n\mathfrak{c} \qquad \text{und} \qquad J = -2q. \tag{4}$$

Nur in dem erwähnten trivialen Fall ähnlicher Lage der Flächen $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ ist sonach die Abbildung überall „gerade".

Schließlich sei noch bemerkt, daß es eine Menge von Flächenpaaren gibt, die den beiden besprochenen Hauptarten sich gegenseitig gleichmäßig entsprechender Paare von Flächen zugleich angehören: das sind die adjungierten Minimalflächen.