Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1949

München 1950

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden

Von **Robert Sauer** in München

Vorgelegt von F. Löbell am 4. Februar 1949

§ 1. Einleitung

Bei den Flächen 2. Ordnung kann man, wie schon G. Darboux[1] zeigte, die sämtlichen infinitesimalen Verbiegungen in geschlossener Form angeben. In der vorliegenden Arbeit wird eine weitere Flächenfamilie untersucht, bei der sich ebenfalls die sämtlichen infinitesimalen Verbiegungen in geschlossener Form durch Quadraturen darstellen lassen. Diese Flächen sind dadurch gekennzeichnet, daß die Asymptotenlinien zwar nicht im Raum, jedoch für eine gewisse Projektionsrichtung im Grundriß ein Rückungsnetz bilden; d. h. die Grundrisse der Asymptotenlinien sind zwei Scharen kongruenter Kurven und gehen jeweils durch Parallelverschiebung längs der Kurven der anderen Schar auseinander hervor.

Wir werden im folgenden kurz sagen, daß die Asymptotenlinien ein „Quasi-Rückungsnetz" bilden.

In § 2 wird gezeigt, daß jedes beliebig vorgegebene ebene Rückungsnetz als Grundriß der Asymptotenlinien einer bis auf affine Transformationen bestimmten Fläche betrachtet werden kann; die Parameterdarstellung dieser Flächen wird angegeben.

In § 3 werden die entsprechenden positiv gekrümmten Flächen ermittelt; hier sind die Asymptotenlinien und die von ihrem Grundriß erzeugten Rückungsnetze imaginär.

Nach Erörterung einiger Beispiele in § 4 folgt in § 5 die Bestimmung der infinitesimalen Verbiegungen der in den §§ 2, 3 eingeführten Flächen. In § 6 wird die Theorie auf die in § 4 betrachteten Beispiele angewandt. § 7 enthält einige Schlußbemerkungen.

---

[1] G. Darboux, Théorie des surfaces, Band IV S. 11/12, Paris 1896.

§ 2. Parameterdarstellung der negativ gekrümmten Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden

In der x, y-Ebene sei ein beliebiges Rückungsnetz

$$\boxed{x = U_1(u) + V_1(v), \;\; y = U_2(u) + V_2(v) \text{ mit } U_1' V_2' - U_2' V_1' \neq 0} \tag{1}$$

vorgegeben; U_1, U_2 und V_1, V_2 sind willkürliche zweimal stetig differenzierbare Funktionen von u bzw. v. Wir zeigen, daß Flächen $z = z(u, v)$ existieren, deren Asymptotenlinien $u =$ = const. und $v =$ const. das Rückungsnetz (1) als Grundriß haben, und werden die allgemeinsten Flächen dieser Art angeben.

Die Parameterkurven sind dann und nur dann Asymptotenlinien, wenn die beiden Bedingungen

$$\begin{vmatrix} U_1' & U_2' & z_u \\ V_1' & V_2' & z_v \\ U_1'' & U_2'' & z_{uu} \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} U_1' & U_2' & z_u \\ V_1' & V_2' & z_v \\ V_1'' & V_2'' & z_{vv} \end{vmatrix} = 0 \tag{2}$$

erfüllt sind; die Striche bezeichnen hierbei Ableitungen nach u bzw. v.

Aus den Gln. (2) folgt unter Berücksichtigung von

$$\Delta \equiv x_u y_v - x_v y_u = U_1' V_2' - U_2' V_1' \neq 0$$

die Existenz zweier durch $z(u, v)$ eindeutig bestimmten Funktionen $a(u, v)$ und $b(u, v)$, welche den Gleichungen

$$\begin{aligned} z_u &= a U_1' + b U_2', \qquad & z_v &= a V_1' + b V_2', \\ z_{uu} &= a U_1'' + b U_2'', \qquad & z_{vv} &= a V_1'' + b V_2'' \end{aligned} \tag{3}$$

genügen.

Durch Differentiation der Gl. (3_1) nach u und der Gl. (3_2) nach v und Vergleich mit den Gln. (3_3) und (3_4) ergibt sich

$$a_u U_1' + b_u U_2' = 0, \qquad a_v V_1' + b_v V_2' = 0 \tag{4}$$

und hierauf durch Differentiation dieser beiden Gleichungen nach v bzw. u

$$a_{uv} U_1' + b_{uv} U_2' = 0, \; a_{vu} V_1' + b_{vu} V_2' = 0.$$

Daraus folgt bei Voraussetzung stetiger zweiter Ableitungen von a und b und bei Berücksichtigung von $\Delta \neq 0$:

$$a_{uv} = b_{uv} = 0, \quad a = \Phi_1(u) + \Psi_1(v), \quad b = \Phi_2(u) + \Psi_2(v). \qquad (5)$$

Für die zunächst willkürlichen Funktionen Φ_1, Φ_2, Ψ_1, Ψ_2 erhält man aus den Gln. (4) die Bedingungen

$$\Phi_1' U_1' + \Phi_2' U_2' = 0, \quad \Psi_1' V_1' + \Psi_2' V_2' = 0,$$

woraus sogleich

$$\Phi_1' = \Lambda(u)\, U_2', \quad \Phi_2' = -\Lambda(u)\, U_1', \quad \Psi_1' = \mathrm{M}(v)\, V_2', \quad \Psi_2' = -\mathrm{M}(v)\, V_1'$$

folgt. Es ist dann nach Gl. (3) weiter

$$z_{uv} = a_v U_1' + b_v U_2' = \mathrm{M}(v) \cdot (V_2' U_1' - V_1' U_2'),$$
$$z_{vu} = a_u V_1' + b_u V_2' = \Lambda(u) \cdot (V_1' U_2' - V_2' U_1')$$

und bei Voraussetzung stetiger Funktionen

$$\Lambda(u) = -\mathrm{M}(v) = \text{const.} = k_1.$$

Somit hat man schließlich

$$a = k_1(U_2 - V_2) + k_2, \qquad b = -k_1(U_1 - V_1) + k_3$$

und nach Gl. (3_1) und (3_2)

$$z_u = k_1(U_1' U_2 - U_1 U_2') + k_1(U_2' V_1 - U_1' V_2) + k_2 U_1' + k_3 U_2',$$
$$z_v = k_1(V_2' V_1 - V_1' V_2) + k_1(V_1' U_2 - V_2' U_1) + k_2 V_1' + k_3 V_2'.$$

Die Integrierbarkeitsbedingung $z_{uv} = z_{vu}$ ist erfüllt und es ergibt sich durch Integration

$$z = k_1 \{ (U_2 V_1 - U_1 V_2) + \int (U_1' U_2 - U_1 U_2')\, du + \int (V_2' V_1 - V_1' V_2)\, dv \}$$
$$+ k_2(U_1 + V_1) + k_3(U_2 + V_2) + k_4. \qquad (6)$$

Die durch die Parameterdarstellung Gl. (1) und Gl. (6) gegebenen Flächen haben die Parameterkurven $u = \text{const.}$ und $v = \text{const.}$ als Asymptotenlinien und sind die allgemeinsten Flächen mit dem Rückungsnetz (1) als Grundriß der Asymptotenlinien.

Aus der durch $k_1=1$, $k_2=k_3=k_4=0$ gekennzeichneten Lösung (7)

$$\boxed{z=(U_2V_1-U_1V_2)+\int(U_1'U_2-U_1U_2')\,du+\int(V_2'V_1-V_1'V_2)\,dv}$$

erhält man die allgemeine Lösung (6) durch

$$z^* = k_1 z + k_2 x + k_3 y + k_4.$$

Hieraus folgt:

In dem trivialen Sonderfall $k_1 = 0$ entarten die Flächen (6) zu Ebenen. Abgesehen von diesem Sonderfall sind die sämtlichen Flächen, die zu einem als Grundriß der Asymptotenlinien willkürlich vorgegebenen Rückungsnetz (1) gehören, zueinander affin. Es gibt also im wesentlichen genau eine Fläche, Gl. (7), deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz über einem vorgegebenen Grundriß, Gl. (1), bilden.

§ 3. Parameterdarstellung der entsprechenden positiv gekrümmten Flächen

Die durch Gl. (6) bzw. (7) definierten Flächen haben reelle Asymptotenlinien, sind also negativ gekrümmt. Durch die Transformation

$$u=\tau,\ v=\hat{\tau};\ U_1=T_1(\tau),\ V_1=\hat{T}_1(\hat{\tau}),\ U_2=T_2(\tau),\ V_2=\hat{T}_2(\hat{\tau}) \qquad (8)$$

($T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ analytische Funktionen des komplexen Parameters τ; τ, $\hat{\tau}$; $T_1 \hat{T}_1$; T_2, $\hat{T}_2$ konjugiert komplex) ergeben sich aus den Gln. (1) und (7) nach Hinzufügung des Faktors $\frac{1}{2i}$ entsprechende positiv gekrümmte reelle Flächen, nämlich

$$\boxed{\begin{aligned} &x=2\,Rl\,\{T_1(\tau)\}, \qquad y=2\,Rl\,\{T_2(\tau)\},\\ &z=Jm\,\{\hat{T}_1T_2+\int(T_2\,dT_1-T_1\,dT_2)\}.\end{aligned}} \qquad (9)$$

Die konjugiert komplexen Parameterkuven $\tau=$ const. und $\hat{\tau}=$ const. sind die Asymptotenlinien; der Grundriß der Asymptotenlinien ist ein Rückungsnetz konjugiert komplexer Kurven. An Stelle der 4 reellen Funktionen $U_1(u)$, $U_2(u)$, $V_1(v)$, $V_2(v)$ der Gln. (1) und (7) treten in Gl. (9) die beiden analytischen Funktionen $T_1(\tau)$, $T_2(\tau)$ der komplexen Veränderlichen τ.

§ 4. Beispiele

Wir geben zunächst Beispiele der in § 2 behandelten negativ gekrümmten Flächen Gl. (7) an. Das Rückungsnetz in der x, y-Ebene erzeugen wir

a) durch ein System kongruenter Kreise durch einen festen Punkt; sie umhüllen einen Kreis doppelter Größe,

b) durch ein System kongruenter Hyperbeln durch einen (außerhalb des Netzes liegenden) festen Punkt; sie umhüllen eine Hyperbel doppelter Größe;

c) durch ein System kongruenter Parabeln, die eine Parabel doppelter Größe umhüllen.

Diese Rückungsnetze stellen wir dar durch

$$\begin{aligned} &(a)\ x = \cos u + \cos v, && y = \sin u + \sin v, \\ &(b)\ x = \mathfrak{Cos}\, u + \mathfrak{Cos}\, v, && y = \mathfrak{Sin}\, u + \mathfrak{Sin}\, v, \\ &(c)\ x = u^2 + v^2, && y = u + v. \end{aligned} \tag{10}$$

Aus Gl. (7) erhält man hierzu folgende Flächen:

$$\begin{aligned} &(a)\ z = \sin(u-v) - (u-v), \\ &(b)\ z = \mathfrak{Sin}(u-v) - (u-v), \\ &(c)\ z = \frac{1}{3}(u-v)^3. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen

(a) $x^2 + y^2 = 4 \cos^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)$, (b) $x^2 - y^2 = 4\, \mathfrak{Cos}^2 \left(\frac{u-v}{2}\right)$,

(c) $2x - y^2 = (u-v)^2$

sind die Schnitte $z = \text{const.}$ $(u-v = \text{const.})$ dieser Flächen (a) konzentrische Kreise, (b) Hyperbeln mit demselben Asymptotenpaar, (c) kongruente und parallele Parabeln. Die Flächen (a) sind also Drehflächen, die Flächen (c) Parabel-Rückungsflächen. Die Ebene $y = 0$ $(u + v = 0)$ schneidet die Flächen nach den Kurven

(a) $x = 2\cos u,\quad z = \sin 2u - 2u = \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} - 2 \arccos\left(\frac{x}{2}\right)$,

(b) $x = 2\,\mathfrak{Cos}\, u,\quad z = \mathfrak{Sin}\, 2u - 2u = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-4} - 2\,\mathfrak{Ar\,Cos}\left(\frac{x}{2}\right)$,

(c) $x = 2u^2,\quad z = \frac{8}{3}u^3 = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$.

Für die nach § 3 entsprechenden positiv gekrümmten Flächen Gl. (9), erhält man mit

$$u=\tau=p+iq, \quad v=\hat{\tau}=p-iq$$
$$(p, q \text{ reelle Parameter})$$

an Stelle der Gln. (10) und (11)

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ x=2\cos p\,\operatorname{Cof} q, && y=2\sin p\,\operatorname{Cof} q, && z=\operatorname{Sin} 2q-2q,\\
&\text{(b)}\ x=2\operatorname{Cof} p\cos q, && y=2\operatorname{Sin} p\cos q, && z=\sin 2q-2q, \qquad (12)\\
&\text{(c)}\ x=2(p^2-p^2), && y=2p, && z=\frac{8}{3}q^3.
\end{aligned}
$$

Die Schnitte $z=\text{const}$ $(q=\text{const})$ dieser Flächen sind wegen

$$\text{(a)}\ x^2+y^2=4\operatorname{Cof}^2 q. \quad \text{(b)}\ x^2-y^2=4\cos^2 q. \quad \text{(c)}\ 2x-y^2=-4q^2$$

ebenso wie im Fall der negativ gekrümmten Flächen (a) konzentrische Kreise, (b) Hyperbeln mit demselben Asymptotenpaar, (c) kongruente und parallele Parabeln. Die Flächen (a) sind also wieder Drehflächen und die Flächen (c) Parabel-Rückungsflächen.

Für die Schnittkurven mit der Ebene $y=0$ $(p=0)$ erhält man

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)}\ x=2\operatorname{Cof} q, && z=\operatorname{Sin} 2q-2q=\frac{x}{2}\sqrt{x^2-4}-2\operatorname{Ar}\operatorname{Cof}\left(\frac{x}{2}\right),\\
&\text{(b)}\ x=2\cos q, && z=\sin 2q-2q=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}-2\arccos\left(\frac{x}{2}\right),\\
&\text{(c)}\ x=-2q^2, && z=\frac{8}{3}q^3=\frac{1}{3}(-x)^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Dies sind im wesentlichen dieselben Schnittkurven wie bei den negativ gekrümmten Flächen, jedoch sind die Fälle (a) und (b) vertauscht und bei Fall (c) ist x durch $(-x)$ zu ersetzen.

§ 5. Bestimmung der infinitesimalen Verbiegungen

Die durch Gl. (7) und (9) gegebenen Flächen, deren reelle bzw. imaginären Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden, haben die bemerkenswerte Eigenschaft, daß ihre sämtlichen infinitesimalen Verbiegungen sich in geschlossener Form durch Quadraturen darstellen lassen.

Wir erinnern zunächst an folgende bekannte Beziehungen aus der Theorie der infinitesimalen Flächenverbiegung:[2]

Die Biegungsflächen $\mathfrak{x}(u, v) + \varepsilon \bar{\mathfrak{x}}(u, v)$ mit $\varepsilon = \text{const} \to 0$ einer Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ sind durch den „Drehriß" $\mathfrak{y}(u,v)$ bestimmt vermöge der Beziehung

$$d\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{y} \times d\mathfrak{x}, \text{ also } \bar{\mathfrak{x}}_u = \mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_u, \quad \bar{\mathfrak{x}}_v = \mathfrak{y} \times \mathfrak{x}_v. \tag{13}$$

Der Vektor $\varepsilon\mathfrak{y}(u,v)$ stellt die Drehung um eine durch den Nullpunkt des Koordinatensystems gehende Achse dar, welche das betreffende Flächenelement der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ bei der Verbiegung erfährt. Das Problem der infinitesimalen Flächenbiegung reduziert sich auf die Aufgabe, alle Drehrisse $\mathfrak{y}(u,v)$ zu ermitteln; denn wenn $\mathfrak{y}(u,v)$ bekannt ist, erhält man $\bar{\mathfrak{x}}(u,v)$ aus den Gln. (13) durch Quadraturen.

Wenn nun die vorgegebene Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ negativ gekrümmt ist und die Parameterkurven $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ die Asymptotenlinien sind, liefern die Integrabilitätsbedingungen der Gln. (13) die bekannten Beziehungen

$$\mathfrak{y}_u = \lambda \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{y}_v = \nu \mathfrak{x}_u. \tag{14}$$

Hiernach bilden die Parameterkurven der Flächen $\mathfrak{x}(u,v)$ und $\mathfrak{y}(u,v)$ parallel-reziproke Netze, d. h. die „Längstangenten" des einen Netzes sind parallel zu den „Quertangenten" des anderen Netzes und umgekehrt. Jede Fläche $\mathfrak{y}(u,v)$, die mit der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ in dieser parallel-reziproken Beziehung steht, ist ein Drehriß und bestimmt daher eine Verbiegung der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$. Die Flächen $\mathfrak{y}(u,v)$ können auch in Kurven entarten; dann ist die Fläche eine Regelfläche und die betreffenden Drehrisse $\mathfrak{y}(u,v)$ liefern diejenigen Verbiegungen, bei denen die Erzeugenden der Regelfläche $\mathfrak{x}(u,v)$ gradlinig bleiben.

Wenn die Parameterkurven der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ wie vorausgesetzt die Asymptotenlinien sind, d. h. wenn $(\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{uu}) = (\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v\mathfrak{x}_{vv}) = 0$ ist, folgt aus den Gln. (14) sofort $(\mathfrak{y}_u\mathfrak{y}_v\mathfrak{y}_{uv}) = 0$, d. h. die beiden Scharen der Parameterkurven der Fläche $\mathfrak{y}(u,v)$ sind zueinander konjugiert.

---

[2] Vgl. z. B. R. Sauer, Projektive Liniengeometrie, §§ 30–33; Göschens Lehrbücherei Bd. 23, 1937.

Wir fassen zusammen: Die Ermittlung sämtlicher infinitesimaler Verbiegungen einer negativ gekrümmten Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ ist gleichbedeutend mit der Ermittlung sämtlicher zum Asymptotenliniennetz der Fläche $\mathfrak{x}(u,v)$ parallel-reziproken Kurvennetze $\mathfrak{y}(u,v)$; diese Kurvennetze bestehen aus 2 konjugierten Kurvenscharen.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man die infinitesimalen Verbiegungen unserer durch Gl. (7) gegebenen Flächen, auf denen die Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden, fast unmittelbar angeben:

Ebenso wie die Parameterkurvennetze der Flächen $\mathfrak{x}(u,v)$ und $\mathfrak{y}(u,v)$ im Raum parallel-reziprok bezogen sind, besteht auch zwischen ihren Grundrissen eine parallel-reziproke Zuordnung. Da nun der Grundriß des gegebenen Netzes $\mathfrak{x}(u,v)$ ein Rückungsnetz ist, müssen wegen der parallel-reziproken Beziehung die Grundrisse der gesuchten Netze $\mathfrak{y}(u,v)$ Geradennetze sein. Bezeichnen wir wie vorher mit x, y, z die Koordinaten der Fläche $\mathfrak{x}$ und außerdem mit ξ, η, ζ die Koordinaten der Flächen $\mathfrak{y}$, so erhalten wir für die zum Rückungsnetz Gl. (1) der x, y-Ebene parallel-reziproken Geradennetze der ξ, η-Ebene

$$\boxed{\begin{aligned} \xi U_2'(u) - \eta U_1'(u) &= \varphi(u), \\ \xi V_2'(v) - \eta V_1'(v) &= \psi(v) \end{aligned}} \tag{15}$$

mit den beiden willkürlichen stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi(u)$ und $\psi(v)$. Die Bedingungen der parallel-reziproken Beziehung sind wegen

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{u=\mathrm{const}} = \frac{V_1'}{V_2'} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{v=\mathrm{const}},$$
$$\left(\frac{dx}{dy}\right)_{v=\mathrm{const}} = \frac{U_1'}{U_2'} = \left(\frac{d\xi}{d\eta}\right)_{u=\mathrm{const}}$$

offenbar erfüllt.

Die Gln. (15) und (1) liefern nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} \xi_u &= \lambda x_v = \lambda V_1', \quad & \eta_u &= \lambda y_v = \lambda V_2', \\ \xi_v &= \nu x_u = \nu U_1', \quad & \eta_v &= \nu x_u = \nu U_2' \end{aligned} \tag{16}$$

mit

$$\left.\begin{aligned}\lambda &= -(U_1'V_2'-U_2'V_1')^{-2}\begin{vmatrix} U_1' & U_2' & \varphi(u) \\ V_1' & V_2' & \varphi(v) \\ U_1'' & U_2'' & \varphi'(u)\end{vmatrix}, \\ \nu &= +(U_1'V_2'-U_2'V_1')^{-2}\begin{vmatrix} U_1' & U_2' & \varphi(u) \\ V_1' & V_2' & \varphi(v) \\ V_1'' & V_2'' & \psi'(v)\end{vmatrix}.\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Dadurch sind die den Drehriß $\mathfrak{y}(u, v)$ kennzeichnenden Funktionen $\lambda(u,v)$, $\nu(u,v)$ festgelegt und aus den Gln. (14) und (7) folgt schließlich

$$\boxed{\begin{aligned}\zeta_u &= \begin{vmatrix} U_1' & U_2' & \varphi(u) \\ V_1' & V_2' & \varphi(v) \\ U_1'' & U_2'' & \varphi'(u)\end{vmatrix}\frac{(U_1V_2'-U_2V_1')+(V_1'V_2-V_2'V_1)}{(U_1'V_2'-U_2'V_1')^2} \\ \zeta_v &= \begin{vmatrix} U_1' & U_2' & \varphi(u) \\ V_1' & V_2' & \varphi(v) \\ V_1'' & V_2'' & \psi'(v)\end{vmatrix}\frac{(V_1U_2'-V_2U_1')+(U_1'U_2-U_2'U_1)}{(U_1'V_2'-U_2'V_1')^2}\end{aligned}}\,. \tag{18}$$

Durch die Gln. (15) und (18) sind die sämtlichen Drehrisse, also auch die sämtlichen infinitesimalen Verbiegungen gegeben für die durch Gl. (7) dargestellten negativ gekrümmten Flächen. Hierbei treten zwei willkürliche, einmal stetig differenzierbare Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$ auf.

Das Ergebnis läßt sich im Anschluß an § 3 leicht auf die entsprechenden positiv gekrümmten Flächen (Gl. 9) übertragen:

Wir ergänzen die Transformationsgleichungen (8) durch

$$\varphi = \Omega(\tau), \quad \psi = \hat{\Omega}(\hat{\tau}), \tag{19}$$

d. h. wir führen an Stelle der beiden willkürlichen reellen Funktionen $\varphi(u)$, $\psi(v)$ die analytische Funktion $\Omega(\tau)$ des komplexen Parameters τ ein. Man erhält dann aus den Gln. (15) wieder reelle ξ, η und aus den Gln. (18), wenn wir auf den reellen Seiten den Faktor $\frac{1}{2i}$ hinzufügen, auch reelle ζ. An Stelle der Gln. (15) und (18) treten die Gleichungen

$$\boxed{\xi = \frac{\Omega \widehat{T}_1' - \widehat{\Omega} T_1'}{T_2' \widehat{T}_1' - \widehat{T}_2' T_1'}, \qquad \eta = \frac{\Omega \widehat{T}_2' - \widehat{\Omega} T_2'}{T_2' \widehat{T}_1' - \widehat{T}_2' T_1'}} \tag{20}$$

und

$$\boxed{\zeta = i \int \begin{vmatrix} T_1' & T_2' & \Omega \\ \widehat{T}_1' & \widehat{T}_2' & \widehat{\Omega} \\ T_1'' & T_2'' & \Omega' \end{vmatrix} \frac{(T_1 \widehat{T}_2' - T_2 \widehat{T}_1') + (\widehat{T}_1' \widehat{T}_2 - \widehat{T}_2' \widehat{T}_1)}{T_1' \widehat{T}_2' - \widehat{T}_2' T_1'} \, d\tau} . \tag{21}$$

Sie stellen die allgemeinen infinitesimalen Verbiegungen der durch Gl. (9) gegebenen, positiv gekrümmten Flächen dar.

§ 6. Beispiele

Wir wenden die in § 5 entwickelte Theorie auf die speziellen, in § 4 betrachteten Flächenfamilien an. Dabei erhält man nach elementaren Rechnungen folgende Ergebnisse:

1. Verbiegung der negativ gekrümmten Flächen, Gl. (10), (11)

Fall a:

$$\begin{aligned} &\xi \cos u + \eta \sin u = \varphi(u), \qquad \xi \cos v + \eta \sin v = \psi(v), \\ &\zeta = \operatorname{tg} \frac{u-v}{2} (\varphi(u) + \psi(v)) - \int \varphi(u)\, du + \int \psi(v)\, dv; \end{aligned} \tag{22a}$$

Fall b:

$$\begin{aligned} &\xi \operatorname{Cof} u - \eta \operatorname{Sin} u = \varphi(u), \quad \xi \operatorname{Cof} v - \eta \operatorname{Sin} v = \psi(v), \\ &\zeta = \operatorname{Tg} \frac{u-v}{2} (\varphi(u) + \psi(v)) - \int \varphi(u)\, du + \int \psi(v)\, dv; \end{aligned} \tag{22b}$$

Fall c:

$$\begin{aligned} &\xi - 2\eta u = \varphi(u), \qquad \xi - 2\eta v = \psi(v), \\ &\zeta = \frac{u-v}{2} (\varphi(u) + \psi(v)) - \int \varphi(u)\, du + \int \psi(v)\, dv. \end{aligned} \tag{22c}$$

2. Verbiegung der positiv gekrümmten Flächen, Gl. (12)

Wir setzen wieder $u = p + iq$, $v = p - iq$ und erhalten:

Fall a:

$$\begin{aligned} \xi \cos p\, \mathfrak{Cos}\, q + \eta \sin p\, \mathfrak{Cos}\, q &= Rl\,\{\Omega(\tau)\}, \\ -\xi \sin p\, \mathfrak{Sin}\, q + \eta \cos p\, \mathfrak{Sin}\, q &= Jm\,\{\Omega(\tau)\}, \\ \zeta = \mathfrak{Tg}\, q \cdot Rl\,\{\Omega(\tau)\} - Jm\,&\{\textstyle\int \Omega(\tau)\, d\tau\}; \end{aligned} \tag{23a}$$

Fall b:

$$\begin{aligned} \xi\, \mathfrak{Cos}\, p \cos q - \eta\, \mathfrak{Sin}\, p \cos q &= Rl\,\{\Omega(\tau)\}, \\ \xi\, \mathfrak{Sin}\, p \sin q - \eta\, \mathfrak{Cos}\, p \sin q &= Jm\,\{\Omega(\tau)\}, \\ \zeta = \operatorname{tg} q \cdot Rl\,\{\Omega(\tau)\} - Jm\,&\{\textstyle\int \Omega(\tau)\, d\tau\}; \end{aligned} \tag{23b}$$

Fall c:

$$\begin{aligned} \xi - 2\eta p = Rl\,\{\Omega(\tau)\},\quad 2\eta q &= Jm\,\{\Omega(\tau)\}, \\ \zeta = q\, Rl\,\{\Omega(\tau)\} - Jm\,&\{\textstyle\int \Omega(\tau)\, d\tau\}. \end{aligned} \tag{23c}$$

Natürlich lassen sich die Gln. (22) und (23) auch integrallos darstellen, wenn man an Stelle von φ, ψ bzw. $\Omega(\tau)$ als willkürliche Funktionen $\int \varphi(u)\, du$, $\int \psi(v)\, dv$ bzw. $\int \Omega(\tau)\, d\tau$ benützt.

§ 7. Schlußbemerkungen

1. Verbiegung der Flächen zweiter Ordnung

Der naheliegende Versuch, analoge Überlegungen für Flächen anzustellen, bei denen die Asymptotenlinien nicht nur ein Quasi-Rückungsnetz, sondern ein Rückungsnetz schlechthin bilden, führt zu einem trivialen Ergebnis; denn man kann leicht zeigen, daß die einzigen Flächen dieser Art die Ebenen sind.

Dagegen lassen sich analoge Überlegungen durchführen für die Flächen mit geraden Asymptotenlinien, also für die Flächen zweiter Ordnung. Die dem Asymptotenliniennetz parallel-reziprok entsprechenden Kurvennetze der Drehrisse sind dann Rückungsnetze. Man kann hierdurch in ähnlicher Weise wie in § 5 die allgemeinen infinitesimalen Verbiegungen der Flächen zweiter Ordnung, die sich bereits bei Darboux[1] finden, unmittelbar angeben.

2. Schränkungsfeste Netze konjugierter Kurvenscharen

Die zu einem Asymptotenliniennetz parallel-reziproken Netze konjugierter Kurvenscharen lassen sich auch als „schränkungsfeste" Netze kennzeichnen, d. h. als Netze zweier Kurvenscharen, die bei den betrachteten infinitesimalen Verbiegungen konjugiert bleiben.[2] Die Parameterkurven der Drehrißflächen, Gl. (7), bilden daher schränkungsfeste Netze, und zwar sind dies die allgemeinsten schränkungsfesten Netze zweier konjugierter Scharen, deren erzeugende Kurven ebene Kurven sind und in Ebenen senkrecht zur ξ, η-Ebene liegen.

3. Projektive Flächen

Nach einem bekannten Satz der Flächentheorie lassen sich aus den infinitesimalen Verbiegungen einer Fläche die infinitesimalen Verbiegungen aller zu der gegebenen Fläche projektiven Flächen durch Quadraturen herleiten.[2] Man kann also die infinitesimalen Verbiegungen auch aller zu den Flächen, Gl. (7) und Gl. (9), projektiven Flächen durch Quadraturen darstellen.

4. Beziehungen zur Theorie der Strömung kompressibler Medien

Das Problem der infinitesimalen Verbiegung der Drehflächen (bzw. der Parabelrückungsflächen) ist äquivalent mit dem Problem der stationären zweidimensionalen (bzw. der nichtstationären eindimensionalen) Strömung kompressibler Medien.[3] Unsere speziellen Drehflächen Gl. (11 a) und (12 a) und unsere speziellen Parabel-Rückungsflächen Gl. (11 c) führen auf die Strömungen der kompressiblen Medien mit der Druck-Dichte-Beziehung $p = A - \frac{B}{\rho}$. Die Strömungen dieser Medien, bei denen die Mach-Linien (= Ausbreitungslinien kleiner Störungen) geradlinig sind, spielen in der Strömungslehre eine erhebliche Rolle.[3]

---

[3] Vgl. z. B. R. Sauer, Math. Archiv Bd. 1, S. 263–269, 1948/49, und R. Sauer, Méthodes analytiques de la théorie des fluides compressibles. Béranger-Paris 1949 (im Druck).