Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1949

München 1950

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkungen zum Beweise des Gauß-Bonnetschen Satzes

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 8. Juli 1949

In einer kürzlich in diesen Sitzungsberichten erschienenen Arbeit[1] wurde eine vektorielle Integralformel, die vor zwanzig Jahren – zusammen mit einer ähnlichen Beziehung – auf Grund eines allgemeinen Integralsatzes als Ausdruck der Codazzi-Mainardischen Gleichung der Flächentheorie aufgestellt worden war,[2] ohne Benützung von Integrabilitätsbedingungen als ein Satz der reinen Streifentheorie von neuem bewiesen.

Das gab die Anregung zu einer Untersuchung der Frage, inwieweit auch der bekannte Gauß-Bonnetsche Integralsatz, der dem „egregium theorema" von Gauß äquivalent ist,[2] als eine Aussage über geschlossene Flächenstreifen anzusehen ist, und zwar in dem präzisen Sinn, daß er sogar unabhängig von der Einspannbarkeit eines überall regulären Flächenstückes in den vorgegebenen Streifen gilt.[1]

Hierbei zeigte es sich, daß damit nur eine Auffassung aufgegriffen wurde, die bereits von Thomson und Tait vertreten worden war,[3] die jedoch wohl schon Gauß vorgeschwebt hatte, wie aus seinem Nachlaß zu entnehmen ist,[4] die jedenfalls bei gewissen, in diese Richtung weisenden Überlegungen von Jacobi und einigen seiner Zeitgenossen eine Rolle gespielt[5] und in der zugleich bereits die Levi-Civitasche Idee der infinitesimalen Parallelverschiebung angeklungen hatte.[6]

Insoweit der Satz von Gauß und Bonnet aber als eine wesentlich flächentheoretische Aussage erschien, war die Tendenz in der am Anfang erwähnten Arbeit, den Beweis auf möglichst deutlich überschaubare Einsichten zu stützen; um jedoch seine Gesamtanlage möglichst klar hervortreten zu lassen, wurde seine Durchführung, wie damals auch ausdrücklich bemerkt wurde, nur in den Grundzügen gezeigt.

---

[1] Die Anmerkungen folgen auf S. 34f.

Es mag nun der Wunsch bestehen, die wichtigsten Gedanken des Beweises im einzelnen weiter ausgeführt zu sehen. Dem möge im folgenden entsprochen werden; dabei wird sich Gelegenheit zu weiteren Beobachtungen und Bemerkungen im Zusammenhang mit dem hierdurch angeschnittenen Fragenkreis bieten.

1. Auf einem als gegeben vorausgesetzten, überall regulären Flächenstück wurde in der erwähnten Arbeit ein beschränktes Gebiet angenommen,[7] das von der Randkurve γ begrenzt gedacht wurde und mit dieser zusammen den Bereich $\mathfrak{G}$ bildete. Dieser wurde in eine endliche Anzahl von Teilen zerlegt, denen auf der Einheitskugel $\mathfrak{n}$ durch gleichgerichtete Normalen Dreiecke entsprechen sollten, von deren Seiten jeweils wenigstens zwei als Großkreisbögen angenommen wurden. Sie sollten genügend klein sein. Sie sollen nämlich so klein sein, daß erstens die Fläche in allen Punkten, die inneren Punkten eines solchen Dreiecks entsprechen, ein Krümmungsmaß K von einerlei Vorzeichen habe, das höchstens in Randpunkten des Dreiecks verschwinden darf, weil im Falle $K = 0$ die sphärische Abbildung nicht regulär im Sinne der Theorie der Flächenabbildungen ist; zweitens soll die nicht-geodätische Dreieckseite in allen ihren inneren Punkten eine geodätische Krümmung $\bar{G}$ auf der Kugel von gleichem Vorzeichen haben, die höchstens in einem ihrer Endpunkte null sein darf, sofern sie nicht, was auch erlaubt sein muß, längs dieser ganzen Seite verschwindet, in welchem Falle es sich tatsächlich um ein sphärisches Dreieck im gewöhnlichen Sinne handelt.

a) Wir wollen aber jetzt zunächst sogar nur Z w e i e c k e mit spitzen Innenwinkeln betrachten, deren eine Seite ein Großkreisbogen $< \frac{\pi}{2}$ sei, während die andere Seite eine Linie sein möge, deren geodätische Krümmung auf der Kugel überall gleiches Vorzeichen habe und stetig von der Bogenlänge abhänge.

Vor allem muß bewiesen werden, daß sich die Seiten eines solchen Zweiecks, sofern sie nur hinreichend klein sind, zwischen den Ecken nirgends schneiden können. Zu dem Zweck führen wir auf der Einheitskugel geodätische Polarkoordinaten ein: die Poldistanz δ und den Azimut λ. Dem positiven Drehsinn um den Pol O mögen wachsende Werte von λ entsprechen. Der Pol sei der Anfangspunkt eines Kurvenbogens mit der überall positiven geodätischen Krümmung $\bar{G}$; die Nullinie, $\lambda = 0$, sei die Tangente der Kurve in O. Denken wir uns diese durch eine Gleichung $\lambda = \lambda(\delta)$ mit $\delta \geqq 0$ dargestellt, so erhalten wir für den Punkt O den Wert[8] $\bar{G} = 2\frac{d\lambda}{d\delta}$. Da also in diesem Punkte $\frac{d\lambda}{d\delta} > 0$ ist, ferner wegen der Stetigkeit von $\bar{G}$ erst recht $\frac{d\lambda}{d\delta}$ stetig sein muß, so gibt es ein Intervall $0 \leqq \delta \leqq \delta_1$, in dem überall $\frac{d\lambda}{d\delta} > 0$ ist; daher wächst λ mit δ, der diesem Intervall entsprechende Bogen kann also außer dem Anfangspunkt O und dem Endpunkt (δ_1, λ_1) keinen Punkt mit der sphärischen Sehne $\lambda = \lambda_1$ gemein haben, wenn nur δ und λ klein genug bleiben; auch mehrfache Punkte kann er dann nicht besitzen.

Da λ_1 der Innenwinkel des von der Sehne und dem Bogen gebildeten Zweiecks ist, so kann dieser beliebig klein gehalten werden, falls man sich nur auf ein genügend kleines Stück des Bogens beschränkt. Der Innenwinkel ϑ an der anderen Ecke des Zweiecks genügt aber der Beziehung[9] $\operatorname{tg} \vartheta = \sin \delta \frac{d\lambda}{d\delta}$; da die Funktion $\frac{d\lambda}{d\delta}$ wegen ihrer Stetigkeit in dem abgeschlossenen Intervall beschränkt ist, so kann auch ϑ beliebig klein erhalten werden, sofern nur δ, d. h. die Sehnenlänge, klein genug genommen wird.

Das Analoge gilt, mutatis mutandis, wenn $\bar{G} < 0$ ist.

b) Bei einem hinreichend kleinen Zweieck dieser Art, dessen Flächeninhalt F sei, überblickt man nun vollkommen, daß die sphärische Fläche $2\bar{F}$, die zwischen ihm und dem ihm bezüglich des Kugelmittelpunktes symmetrisch gelegenen Zweieck liegt, lückenlos und schlicht von den positiven Halbbögen der sphärischen Tangenten des mit einem bestimmten Umlaufsinn versehen zu denkenden ersten Zweiecks überdeckt wird,[10] falls man zu diesen die von seinen Ecken in die beiden orientierten Außenwinkel ausstrahlenden halben Großkreisbögen hinzurechnet; es ist daher[11]

$$2F + 2\bar{F} = \pm 4\pi, \tag{1}$$

je nachdem der besagte Umlaufsinn positiv oder negativ ist, der orientierte Rand $\bar{\gamma}$ des ersten Zweiecks also dessen Innenfläche zur Linken oder zur Rechten läßt. Dabei ist, wie früher schon bewiesen wurde,[10] wenn die Außenwinkel die Größen α' und α'' haben, $\bar{F} = \int_{\bar{\gamma}} \bar{G}\, d\bar{s} + \alpha' + \alpha''$; das ist auch dem Vorzeichen nach immer richtig, weil im ersten Fall $\bar{G} \geqq 0$, im zweiten $\bar{G} \leqq 0$ ist. Es wird somit, je nachdem einer dieser Fälle vorliegt,

$$F = \pm 2\pi - \int_{\gamma} \bar{G}\, d\bar{s} - \alpha' - \alpha''. \tag{2}$$

c) Für die topologische Zerlegung des Gesamtbereiches $\mathfrak{G}$ bevorzugen wir aber die Verwendung von dreieckigen Teilgebieten.

Man kann wünschen, sie so annehmen zu dürfen, daß ihnen auf der Kugel sphärische Dreiecke im gewöhnlichen Sinn, deren Seiten also Großkreisbögen sind, entsprechen. Sind die Außenwinkel eines solchen $\bar{\alpha}_1$, β' und β'', so ist seine Fläche bekanntlich, je nach dem Umlaufsinn, $\pm 2\pi - \bar{\alpha}_1 - \beta' - \beta''$; ist dieser negativ, so sind ja auch die Außenwinkel negativ.

Wo aber aus irgend einem Grunde eine Dreieckseite auf eine vorgegebene Kurve gelegt werden muß, sind wir gezwungen, Dreiecke mit einer krummlinigen Seite heranzuziehen; wir werden aber immer mit solchen auskommen, bei denen zwei Seiten Großkreisbögen sind und deren gekrümmte Seite keine Stelle enthält, an der ihre geodätische Krümmung das Vorzeichen wechselt, und so kurz ist, daß sie mit der kürzesten Verbindungslinie ihrer Endpunkte keinen Punkt gemein hat. Derartige Dreiecke können wir aus Zweiecken der oben betrachteten Art und aus gewöhnlichen sphärischen Dreiecken zusammensetzen. Wir wollen uns die beiden Figuren stets mit solchen Umlaufsinnen versehen denken, daß die zusammenfallenden Seiten, die Stücke von Großkreisen sind, entgegengesetzte Durchlaufungssinne haben; die zusammengesetzte Figur ist dann bei gleichem Umlaufsinn von Zweieck und Dreieck ein „Summendreieck", bei ungleichem ein „Differenzdreieck", und wir haben, um den Flächeninhalt F des Ganzen zu erhalten, in jedem Falle nur die Inhalte der Teile algebraisch zu addieren.

d) Nehmen wir nun zunächst positiven Umlaufsinn beim Teildreieck, folglich auch bei der zusammengesetzten Figur an, so wird also $F = 2\pi - \bar{\alpha}_1 - \beta' - \beta'' \pm 2\pi - \int_{\bar{\gamma}} G\, d\bar{s} - \alpha' - \alpha''$, je nachdem das Zweieck positiven oder negativen Umlaufsinn hat.

Nun seien die Außenwinkel beider Teilfiguren so bezeichnet, daß die Scheitel von α' und β', ebenso die von α'' und β'' durch die Zusammensetzung in Deckung kommen.

Haben beide Teilfiguren positiven Umlaufsinn, so werden die Außenwinkel des dann zustande kommenden Summendreiecks, wie man sich leicht vor Augen führen wird, $\bar{\alpha}_1$, $\alpha' + \beta' - \pi = \bar{\alpha}_2$ und $\alpha'' + \beta'' - \pi = \bar{\alpha}_3$; bei positivem Umlaufsinn des sphärischen Dreiecks und negativem des Zweiecks aber werden die Außenwinkel des sich bildenden Differenzdreiecks $\bar{\alpha}_1$, $\alpha' + \beta' + + \pi = \bar{\alpha}_2$ und $\alpha'' + \beta'' + \pi = \bar{\alpha}_3$. Daher finden wir in beiden Fällen $F = 2\pi - \int\limits_{\bar{\gamma}} \bar{G}\, d\bar{s} - \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3$; dies gilt, wie gesagt, immer, wenn das zusammengesetzte Dreieck, d. h. das Dreieck mit einer krummen Seite, positiven Umlaufsinn, mithin positiven Flächeninhalt besitzt.

Den Fall, daß diese Figur negativen Umlaufsinn hat, können wir aus dem vorigen dadurch ableiten, daß wir in der obigen Beziehung bei F, bei $\bar{G}$ und bei jedem Außenwinkel das Vorzeichen umkehren; damit sie danach richtig bleibt, muß auch 2π durch -2π ersetzt werden.

Sonach erhalten wir schließlich

$$F = \pm 2\pi - \int\limits_{\bar{\gamma}} \bar{G}\, d\bar{s} - \bar{\alpha}_1 - \bar{\alpha}_2 - \bar{\alpha}_3, \tag{3}$$

wo das Plus- oder das Minuszeichen gilt, je nachdem die Figur von $\bar{\gamma}$ im positiven oder im negativen Sinn umfahren wird.

Nun hatten wir früher die Vereinbarung getroffen,[11] daß auf jeden Fall der Bereich $\mathfrak{G}$ von γ im positiven Drehsinn umlaufen werde; das überträgt sich aber auf jeden Teilbereich von $\mathfrak{G}$.

Daher gilt in (3) das obere Vorzeichen, wenn für die den inneren Punkten des Dreiecks entsprechenden Flächenpunkte das Krümmungsmaß $K > 0$ ist, das untere aber, wenn an diesen Stellen $K < 0$ ist.[12]

2. Erinnern wir uns nun daran, daß in unseren früheren Überlegungen die „Voreilzahl" n eine Rolle spielte;[13] sie war definiert als das ganzzahlige Verhältnis des Winkels, um den der Begleitkörper $\bar{\mathfrak{B}}$ der sphärischen Kurve $\bar{\gamma}$ sich gegenüber dem

Begleitkörper $\mathfrak{B}$ von γ nach einem positiven Umlauf längs γ gedreht hat, zum Vollwinkel 2π. Jener Winkel läßt sich als Differenz der Winkel ausdrücken, um die sich $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$ gegen die längs $\bar{\gamma}$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, längs γ infinitesimalparallel verschobene Berührebene dreht; deren Größen sind $\bar{\varphi} = \int \bar{G}\, d\bar{s} + \Sigma\bar{\alpha}$ und $\varphi = \int G\, ds + \Sigma\alpha$, wobei die Integrale und Summen über einander entsprechende Stücke von $\bar{\gamma}$ und γ zu erstrecken sind. Bedeuten $\overline{\Phi}$ und Φ ihre Werte für die ganzen geschlossenen Kurven bei positivem Umlauf um γ, so ist

$$2n\pi = \overline{\Phi} - \Phi.$$

Damit gleichbedeutend ist die früher aufgestellte Beziehung[10]

$$\int_{\gamma} \bar{G}\, d\bar{s} + \Sigma\bar{\alpha} = \int_{\gamma} G\, ds + \Sigma\alpha + 2n\pi. \tag{4}$$

Nunmehr denken wir uns, um n zu bestimmen, das Dreieck mit dem Rand γ immer kleiner werdend, derart, daß einer seiner inneren Punkte P fest bleibt und die Längen aller seiner Seiten verschwinden, und daß dabei die Größen $\overline{\Phi}$ und Φ sich stetig ändern; daß eine Transformation solcher Art, bei der diese Größen beschränkt bleiben, möglich ist, kann man mit Hilfe eines geodätischen Polarkoordinatensystems mit dem Nullpunkt P beweisen. Da hierbei die obige Beziehung zwischen Φ, $\overline{\Phi}$ und der Voreilzahl n bestehen bleibt, müßte sich auch diese stetig ändern; wegen ihres Charakters als ganzer Zahl muß sie also ihren Anfangswert behalten. Wir erhalten diesen mittels der Grenzwerte von Φ und $\overline{\Phi}$. Daß solche existieren, sehen wir aber folgendermaßen ein: Durch die beschriebene Transformation werden, wie in der Lehre von der Kinematik der starren Körper des näheren gezeigt wird, auch die Bewegungen von $\overline{\mathfrak{B}}$ und $\mathfrak{B}$ stetigen Änderungen unterzogen, bei denen die Bewegung von $\mathfrak{B}$ wegen des positiven Umlaufsinnes von γ auf jeden Fall gegen eine Drehung um die Flächennormale in P durch den Winkel 2π, die von $\overline{\mathfrak{B}}$ gegen eine Drehung um die gleiche Normalenrichtung durch den Winkel $\pm 2\pi$ konvergiert, je nachdem das entsprechende Dreieck auf der Kugel positiven oder negativen Umlaufsinn hat, je nachdem also das Krümmungsmaß in P einen positiven oder negativen Wert besitzt. Die infinitesimale Parallelverschiebung der Berührebenen von γ und von $\bar{\gamma}$ strebt aber immer dem Zustand der Ruhe zu. Daher gilt im Falle positiven Umlaufsinnes bei dem auf der Kugel liegenden Dreieck, dessen Rand $\bar{\gamma}$ ist, $\bar{\Phi} \to 2\pi$ und $\Phi \to 2\pi$, im Falle negativen Umlaufsinnes bei diesem Dreieck $\bar{\Phi} \to -2\pi$ und $\Phi \to 2\pi$. Aus der Relation $2n\pi = \bar{\Phi} - \Phi$ dürfen wir somit schließen:[14]

Es ist $n = 0$, wenn $K > 0$ ist, aber $n = -2$, wenn $K < 0$ ist.

Folglich gilt vermöge (3) und (4) stets

$$F + \int_{\gamma} G ds + \Sigma\alpha = 2\pi. \tag{5}$$

Damit ist wegen $F = \int_{\mathfrak{G}} K df$ die Gleichung[11] (6) der am Anfang genannten Arbeit bewiesen.[15] Die strenge Durchführung aller Schlüsse erfordert unvermeidlich viel Kleinarbeit.

3. Zu dem weiteren Verlauf des Beweises der allgemeinen Beziehung (7) in der erwähnten, früheren Arbeit,[16] d. h. des Gauß-Bonnetschen Satzes in der allgemeinsten Form, ist noch folgendes zu sagen:

a) Bei der Anlage der topologischen Triangulierung sind wir nur insoweit gebunden, als die Kurven, längs denen $K = 0$ ist, als Trennungslinien gewählt werden müssen; denn falls K zu beiden Seiten einer solchen Kurve verschiedenes Vorzeichen hat, ist längs der ihr auf der Einheitskugel zugeordneten Linie die der Fläche umkehrbar eindeutig entsprechende Überlagerungsfläche der Kugel gefaltet. Daß trotzdem, etwa durch an der Faltungskante auftretende Winkel, keine Schwierigkeiten entstehen können, sieht man sofort ein, wenn man sich vor Augen hält, daß die Struktur der genannten sphärischen Überlagerungsfläche keinerlei Einfluß auf die Beziehung (6) hat, aus der allein (7) erschlossen wird.

Die Abbildung der Fläche auf die Kugel kann dadurch längs einer Kurve verschwindenden Krümmungsmaßes in besonders hohem Grade irregulär sein, daß dieser ein einziger Kugelpunkt entspricht; das tritt dann und nur dann ein, wenn die Fläche längs einer Kurve eine Ebene berührt. Man kann in diesem Fall versuchen, die Kurve durch einen beiderseits angelegten Streifen auszusperren; für den übrigen Teil von $\mathfrak{G}$ liegen dann die gleichen Umstände vor wie bisher. Der Streifen kann geschlossen oder offen sein, er kann auch mit einem Ende oder mit beiden an den Rand γ heranreichen. Worauf es ankommt, ist, daß, wenn man die Breite des Streifens gegen Null konvergieren läßt, das Flächenintegral der Krümmung über das ausgeschlossene Gebiet verschwindet und die Linienintegrale längs der Streifenränder entgegengesetzt gleichen Werten zustreben, genau so, wie wenn längs der Streifenachse normale Abbildungsverhältnisse vorlägen; auch die Summe der an den etwaigen Streifenecken auftretenden Außenwinkel nimmt denselben Wert an, wie wenn überall $K \neq 0$ wäre. Das zeigt, daß es ohne Beeinträchtigung des Ergebnisses erlaubt ist, sich um eine derartige Kurve $K = 0$ nicht zu kümmern. Damit das Verfahren durchführbar sei, müssen natürlich die Streifenränder als Kurven stetiger geodätischer Krümmung gewählt werden.

Um auch dem Fall, daß in allen Punkten eines Teilbereiches $\mathfrak{G}'$ von $\mathfrak{G}$ das Krümmungsmaß verschwindet, Rechnung zu tragen, überlegen wir uns, daß auch für ein Flächendreieck der oben betrachteten Art, in dessen Punkten überall $K = 0$ ist, die Gleichung (6) gilt; das folgt unmittelbar aus seiner Abwickelbarkeit in eine Ebene. Weiter ergibt sich mit Hilfe einer geeigneten topologischen Zerlegung von $\mathfrak{G}'$ in solche Dreiecke, daß (7) gilt; es ist nur c durch die Charakteristik c' von $\mathfrak{G}'$ zu ersetzen. Daß (7) allgemein gültig bleibt, zeigt die Überlegung, daß c gleich der Summe der Charakteristiken aller Teilgebiete von $\mathfrak{G}$ ist, weil es für die Bildung von $c = -e + k - f$ gleichgültig ist, ob man die auf die Ränder fallenden Ecken und Kanten alle mitzählt oder alle wegläßt.

Isolierte Punkte, in denen K verschwindet, sind als Eckpunkte der Triangulation zu wählen, damit alle oben in bezug auf die Teildreiecke gemachten Voraussetzungen erfüllt werden; sollten Häufungsstellen solcher Punkte vorhanden sein, so müßten wir uns in gleicher Weise helfen, wie es im folgenden Abschnitt b) für einen ähnlich gelagerten Fall auseinandergesetzt wird.

b) Eine Schwierigkeit bieten jetzt nur noch diejenigen isolierten Punkte der nicht geodätischen Randlinien und sonstigen Kurven der Kugel, auf denen wir Kanten der Triangulierung anzunehmen gezwungen sind, in denen die geodätische Krümmung $\bar{G} = 0$ ist, weil wir diese Kanten, um sicher zu gehen, daß sie die kürzesten Verbindungssehnen ihrer Endpunkte nicht schneiden, hinreichend kurz und zudem so wählen müssen, daß auf jeder von ihnen $\bar{G}$ überall gleiches Vorzeichen hat (vgl. 1, a). Man könnte sich zwar von der Bedingung, daß $\bar{G}$ auch in den Eckpunkten von Null verschieden sein muß, befreien; damit wäre aber nicht für den Fall vorgesorgt, daß solche Einzelpunkte verschwindender geodätischer Krümmung sich an gewissen Stellen häufen. Hier helfen wir uns – unter der Voraussetzung, daß die Menge dieser Häufungsstellen endlich ist – folgendermaßen: Wir schließen alle derartigen Häufungspunkte in kleine, auf den in Frage kommenden Kurven liegende Bögen ein, ebenso alsdann die außerhalb dieser Bögen noch liegenden isolierten Punkte, in denen die geodätische Krümmung Null ist, deren Anzahl ja nunmehr ebenfalls endlich ist. Alle diese Bögen ersetzen wir durch die kürzesten, ihre Endpunkte verbindenden Linien. Wir werden dadurch nach dem Heine-Borelschen Überdeckungssatz in den Stand gesetzt, eine Triangulierung mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Dreiecken herzustellen. Die Linienintegrale, Außenwinkelsummen und Flächeninhalte, die wir zu bilden haben, werden aber dabei, wie sich durch Stetigkeitsbetrachtungen zeigen läßt, bloß beliebig wenig geändert, sofern nur die zum Ausschluß der Punkte verschwindender geodätischer Krümmung und ihrer Häufungsstellen benützten Bögen klein genug angenommen werden.

4. Da die Randkurve γ ein Gebiet umgrenzen sollte,[7] so ist das Vorhandensein von Punkten, in denen γ sich selbst überquert, ausgeschlossen, außer in dem unschädlichen Fall, daß verschiedene Blätter von $\mathfrak{G}$ einander überlappen.

Hat man sich aber doch einmal mit einem Fall zu befassen, in dem Doppel- oder mehrfache Punkte bei γ vorkommen, so muß man den Gauß-Bonnetschen Satz auf die verschiedenen Gebiete, die dann vorliegen, je einzeln anwenden; dabei ist zu beachten, daß alsdann die Forderung, daß γ positiven Umlaufsinn habe, nicht mehr durchweg erfüllt zu sein braucht, vorausgesetzt, daß man daran festhalten will, daß die Orientierung einer zusammenhängenden Linie nicht stückweise verschieden sein soll. Bei negativer Durchlaufung des Randes eines der Gebiete wechseln für dieses $\int\limits_{\gamma} G\,ds$, und $\int\limits_{\mathfrak{G}} K\,df$ ihr Vorzeichen; es muß also der auf dieses Gebiet entfallende Anteil von $2c\pi$ mit umgekehrtem Zeichen gesetzt werden.

Der Einfluß mehrfacher Punkte des Randes auf die Beziehung (7) soll hier nicht weiter untersucht werden; prinzipielle Schwierigkeiten würde dies nicht bieten.

Es sei nur noch bemerkt, daß das Auftreten von Doppelpunkten bei γ als etwas durchaus Natürliches angesehen werden muß, wenn man eine Deformation eines zusammenhängenden, mit einem Richtungsinn belegten Kurvenbogens auf der Fläche unter Erhaltung seiner Endpunkte und seiner Endtangenten vornimmt;[17] in diesem Falle ist die Änderung der totalen Seitenkrümmung des Bogens – d. i. im Sinne von Gauß[18] das Linienintegral der geodätischen Krümmung über den Bogen – gleich der curvatura integra des bei der Deformation von ihm überstrichenen Gebietes.[17] Selbstverständlich muß diese bestimmten Stetigkeitsansprüchen genügen.

5. Es wurde bisher gar nichts darüber gesagt, ob das von $\mathfrak{G}$ bedeckte Flächenstück als orientierbar zu denken ist oder nicht. In der Tat ist beides zulässig.

Man wird aber, zunächst wenigstens, $\mathfrak{G}$ als orientierbar annehmen müssen, im Falle der Einseitigkeit des Flächenstückes am einfachsten als dessen zweiblättrige, zweiseitige Überlagerungsfläche. Die Tatsache, daß jedem Punkt der Fläche bei stetiger Ausbreitung der Abbildung auf die Einheitskugel $\mathfrak{n}$ durch gleichgerichtete Normalen nach Art der analytischen Fortsetzung von einem beliebigen Ausgangspunkt aus zwei diametrale Kugelpunkte zugewiesen werden, zwingt sogar dazu. Das Randintegral der geodätischen Krümmung über γ ist dann zweimal zu bilden, wobei γ in entgegengesetzten Sinnen zu durchlaufen ist, weil ja $\mathfrak{G}$ jedesmal zur Linken liegen soll. Da die Flächennormalen im gleichen Randpunkt entgegengesetzt gerichtet sind, so ergibt sich das Integral beide Male mit demselben Vorzeichen; denn[19] $G = \mathfrak{n}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$ wechselt sein Zeichen nicht, wenn die Richtung von $\mathfrak{n}$ und die Integrationsrichtung zugleich umgekehrt werden. Ebenso ergeben die beiden Flächenelemente von

$\mathfrak{G}$ an derselben Stelle der Fläche trotz ihrer verschiedenen Normalenrichtungen gleiche Beiträge zur curvatura integra, weil auch die Normalen der zugeordneten Elemente der Kugelfläche entgegengesetzt gerichtet sind. Da auch die Charakteristik der zweiblättrigen Überlagerungsfläche das Doppelte derjenigen der einseitigen Unterlage ist, so wird mit dieser die Beziehung (7) erfüllt, wenn das Randintegral nur einmal genommen und das Flächenintegral so gebildet wird, daß jedes Flächenelement nur einmal vorkommt.

Unterwerfen wir zum Vergleich, unter denselben Voraussetzungen bezüglich der Orientierbarkeit, die vektorielle Relation (3) der mehrfach erwähnten früheren Arbeit[20] einer ähnlichen Betrachtung, so finden wir als Erstes, daß die Linienintegrale über die in Deckung liegenden Randkurven die Summe null ergeben, weil der „geodätische Krümmungsvektor" $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'$ bei Umkehrung der Richtung der Normalen unverändert bleibt, also $\int \mathfrak{g}\, ds$ bei umgekehrter Durchlaufungsrichtung mit umgekehrtem Vorzeichen erscheint; ferner verschwindet auch $\int K d\mathfrak{f}$, weil die an einer und derselben Stelle zu entgegengesetzten Normalenrichtungen gehörenden vektoriellen Flächenelemente $d\mathfrak{f}$ entgegengesetzt gleich sind. Jene Gleichung (3) ist also erfüllt, jedoch in nichtssagender Weise. Nun erwies sich aber in diesem Falle die Beziehung (2) jener Arbeit als die inhaltsreichere; und sie ist auch jetzt sinnvoll, sofern man nur ein einziges Mal über den geschlossenen Streifen integriert mit derjenigen Richtung der Einheitsvektoren $\mathfrak{n}$, die dem Streifen als dem einen Randstreifen der oben betrachteten Überlagerungsfläche zukommt. Dies wird man aber geradezu als selbstverständlich anerkennen, weil, wie wir sahen, die besagte Gleichung (2) unabhängig von der Form irgend einer in den Streifen berührend eingespannten Fläche gilt, ja auch dann, wenn überhaupt kein überall reguläres Flächenstück in ihn eingepaßt werden kann.

6. Diese Beobachtungen geben Anlaß zu einigen Worten über die Orientierbarkeit der geschlossenen Flächenstreifen, von der ebenfalls bis jetzt, auch in der erwähnten früheren Arbeit, nicht gesprochen wurde.

Es wäre kaum nötig, sich darüber zu äußern, wenn wir es nur mit Randstreifen von Gebieten zu tun hätten, mögen diese orientierbar sein oder nicht; denn sie sind immer zweiseitig.

Auch wenn man den Streifen definiert als eine Raumkurve, deren Punkten $\mathfrak{x}$ ein von der Bogenlänge stetig abhängender Normalenvektor $\mathfrak{n}$ zugeordnet ist, wird man es als zum Begriff des geschlossenen Streifens gehörig ansehen, daß nicht nur die Streifenachse eine geschlossene Raumkurve ist, sondern daß auch die Normale nach einem Umgang um die Kurve wieder ihre ursprüngliche Richtung annimmt.

Geht man aber von der mehr anschaulichen Vorstellung eines Flächenstreifens aus, die dadurch geweckt wird, daß man auf der Schwelle jedes Punktes, d. h. der dessen Tangente und Normale senkrecht schneidenden Geraden nach beiden Seiten eine kleine Strecke abträgt, so wird man sogleich auch an einseitige Streifen denken, bei denen der Normalenvektor bei jedem Umlauf die Richtung wechselt.

Gelten die Integralsätze der Streifentheorie auch für solche einseitigen geschlossenen Flächenstreifen?

Betrachten wir zunächst die skalare Integralformel![21] Da $G = \mathfrak{n}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$ das Zeichen wechselt, wenn die Richtung von $\mathfrak{n}$ unter Beibehaltung der Richtung von $\mathfrak{t}$ und der Integrationsrichtung umgekehrt wird, so läßt sich hier dem Linienintegral der geodätischen Krümmung über den ein einziges Mal durchlaufenen Streifen kein vom Anfangspunkt der Integration unabhängiger Sinn geben. Denn sein Wert hängt von der Lage dieses Punktes ab, weil G zwar eine periodische Funktion der Bogenlänge s ist, jedoch nicht den Umfang U als Periode hat; genauer gilt ja: $G(s + U) = -G(s)$. Berechnet man das Integral aber für einen zweimaligen Umgang, so verschwindet es. Auch braucht der Wert von n nach einem Umlauf noch nicht ganzzahlig zu sein, er hängt ebenfalls vom Ausgangspunkt der Bewegung ab; nach zweimaliger Durchlaufung des Streifens wird aber $n = 0$, weil die relative Verdrehung der Begleitkörper des Streifens und seines sphärischen Bildes, die während des ersten Umgangs entsteht, beim zweiten wieder rückgängig gemacht wird. Dies steht im Einklang damit, daß auch das Integral der geodätischen Krümmung $\bar{G}$ der vollständigen sphärischen Kurve $\mathfrak{n}$, die dem doppelt durchlaufenen Streifen entspricht, verschwindet, weil in je zwei diametralen Punkten dieser Kurve $\bar{G}$ entgegengesetzt gleiche Werte hat, so daß die Integralbeziehung in trivialer Weise erfüllt ist.

Man beachte, daß das an sich natürlich richtige Ergebnis, das die besprochene Formel bei ihrer Anwendung auf einen einmal durchlaufenen einseitigen Streifen liefert, allein dadurch an Bedeutung einbüßt, daß es vom Anfangspunkt der Integration beeinflußt ist und daß n im allgemeinen keine ganze Zahl ist. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß eben dieser Umstand eine Quelle neuer Anregungen bildet: z. B. interessieren die Stellen, die als Anfangspunkte zu wählen sind, damit das Linienintegral schon nach einmaligem Durchwandern des Weges verschwindet, oder damit n schon dann eine ganze Zahl wird.

Suchen wir schließlich noch für die vektorielle Integralbeziehung[22] die Antwort auf die oben gestellte Frage!

Wie vorhin schon gezeigt wurde, ist $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \times \mathfrak{n}'$ vom Vorzeichen von $\mathfrak{n}$ unabhängig. Jedoch ist das Normalenbild eines einseitigen geschlossenen Streifens selbst keineswegs geschlossen. Dennoch läßt sich das Linienintegral $\int_\gamma \mathfrak{n} \times d\mathfrak{n}$ als Flächenvektor[23] deuten, nämlich als derjenige der geschlossenen Kurve, die man erhält, wenn man die beiden diametralen Endpunkte der sphärischen Kurve $\mathfrak{n}$ durch ihren Durchmesser miteinander verbindet; denn der Anteil des Integrales $\int \mathfrak{r} \times d\mathfrak{r}$ längs eines Durchmessers verschwindet. Es ist leicht zu erkennen, daß das Ergebnis unabhängig vom Anfangspunkt der Integration ist. Es würde aber auf das gleiche hinauslaufen, wenn man lieber den halben Flächenvektor des sphärischen Normalenbildes des doppelt durchwanderten Streifens bilden wollte; der Grund dafür ist, daß das vollständige Normalenbild eines einseitigen geschlossenen Streifens zu sich selbst zentrisch symmetrisch in bezug auf den Kugelmittelpunkt ist.

Welche Auffassung man auch bevorzugen mag, der vektorielle Integralsatz, der das Linienintegral des geodätischen Krümmungsvektors als das Doppelte eines gewissen Flächenvektors darstellt, gilt uneingeschränkt auch für einseitige geschlossene Streifen.

Anmerkungen

[1] SitzBer. der Bayer. Akademie der Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 119 ff. (Diese Arbeit wird im folgenden kurz mit 1 bezeichnet.)

[2] Vgl. SitzBer. der Bayer. Akademie der Wiss., Math.-nat. Abt., 1929, S. 165 ff.

[3] Thomson and Tait, Treatise on Natural Philosophy, I (Cambridge 1867), sect. 137. Vgl. 1, S. 127 Anm. 11.

[4] Gauß, Werke IV, S. 217 ff., und VIII, S. 385 ff. Genauere Angaben hierüber finden sich in 1, S. 126 Anm. 8.

[5] Jacobi, Werke 7, S. 26 ff. Siehe 1, S. 126 Anm. 9.

[6] Vgl. 1, S. 126 Anm. 11.

[7] Siehe 1, S. 125 Anm. 4.

[8] Zur Berechnung von $\bar{G}$ kann man von der Darstellung $\mathfrak{n} = \mathfrak{i}\sin\delta\cos\lambda + \mathfrak{j}\sin\delta\sin\lambda + \mathfrak{k}\cos\delta$ ausgehen, wo $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ drei senkrechte Einheitsvektoren bedeuten, und die Formel $\bar{G} = \mathfrak{n}\dfrac{d\mathfrak{n}}{d\bar{s}}\,\dfrac{d^2\mathfrak{n}}{d\bar{s}^2}$ benützen (1, S. 127 Anm. 13), die nur einen Sonderfall der bekannten Formel $G = \mathfrak{n}\mathfrak{t}\mathfrak{t}'$ darstellt. Man kann aber hier, wo es sich nur um den Wert von $\bar{G}$ in O handelt, auch davon ausgehen, daß $\bar{G}$ gleich der Krümmung der Projektion der Kurve auf die Berührebene ist, und daß, wenn man $\mathfrak{i}$ als x- und $\mathfrak{j}$ als y-Richtung wählt, bekanntlich $\bar{G} = \lim\limits_{x=0}(2y:x^2)$ ist; wegen $x = \sin\delta\cos\lambda$ und $y = \sin\delta\sin\lambda$ ergibt sich, wenn man noch die Regel von de l'Hospital anwendet, mit geringerer Rechenarbeit der oben im Text angegebene Ausdruck.

[9] Dies ergibt sich etwa aus der Beziehung $\operatorname{tg}\vartheta = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_\delta\,(\mathfrak{n}_\delta + \mathfrak{n}_\lambda\lambda'):\mathfrak{n}_\delta(\mathfrak{n}_\delta + \mathfrak{n}_\lambda\lambda') = \mathfrak{n}\mathfrak{n}_\delta\,\mathfrak{n}_\lambda\lambda'\left(\text{mit } \lambda' = \dfrac{d\lambda}{d\delta}\right)$, aber auch unmittelbar aus der Anschauung.

[10] Hierzu siehe 1, S. 123 und S. 127 Anm. 13.

[11] Vgl. 1, S. 124 oben.

[12] In der anfangs erwähnten Arbeit wurde bei der auf die Gleichung (6) (1, S. 123 unten und S. 124 oben) führenden Betrachtung der Fall negativen Krümmungsmaßes nicht besonders berücksichtigt; unsere jetzigen Überlegungen schließen diese Lücke in der damaligen Beweisskizze.

[13] Siehe 1, S. 122 f.

[14] Man kann dies Ergebnis auch so schreiben:

$$n = \operatorname{sgn} K - 1;$$

vgl. die in 1, S. 127 Anm. 11 zitierte Arbeit von W. Scherrer, speziell die dort zwischen (13) und (14) stehende Gleichung. Für die Flächen F und $\bar{F}$ gilt

$$F + \bar{F} = 2\pi \cdot \operatorname{sgn} K.$$

Die Möglichkeit, daß K verschwindet, ist hier auszuschließen, weil in diesem

Falle keine bestimmten Festsetzungen bezüglich der Bewegung von $\overline{\mathfrak{B}}$ zu treffen sind.

Zusatz bei der Korrektur: In diesem Zusammenhang sei auch hingewiesen auf eine demnächst im Archiv der Mathematik erscheinende Arbeit von O. Baier, Eine geometrische Ableitung des Gauß-Bonnetschen Integralsatzes.

[15] Man kann den Körper $\overline{\mathfrak{B}}$ hier auch ganz aus dem Spiele lassen, wenn man von der aus (1) und aus

$$\overline{F} = \overline{\Phi} = \Phi + 2n\pi$$

sich ergebenden Beziehung $F + \int G\,ds + \Sigma\alpha = 2n'\pi$ ausgeht, wo n' eine ganze Zahl ist (nämlich $=$ sgn $K - n$), und auf die übliche Art „den Rand auf einen Punkt zusammenzieht", was bei Dreiecken wegen des einfachen Zusammenhangs ihrer Fläche möglich ist und im einzelnen streng in der im Text angedeuteten Weise auszuführen ist; bei positivem Umgang um γ ergibt sich so immer $n' = 1$. Man kommt dann mit weniger Fallunterscheidungen aus, doch ist die Kenntnis von n an sich wünschenswert. – Zur Vermeidung von Mißverständnissen sei daran erinnert, daß zur Herleitung der Gleichung $\overline{\Phi} = \Phi + 2n\pi$ die Verwendung von $\overline{\mathfrak{B}}$ an einer früheren Stelle unentbehrlich war.

[16] Siehe 1, S. 124 und S. 128 Anm. 15.

[17] Diese Auffassung lag den Betrachtungen in diesen SitzBer. 1929 S. 169 ff. zugrunde.

[18] Gauß, Werke VIII, S. 386 ff.

[19] Zu diesem viel gebrauchten Ausdruck für G sei bemerkt, daß er sich schon bei Gauß findet, nämlich in seiner nachgelassenen Schrift über die Seitenkrümmung (Werke VIII, S. 390 unten); er steht dort in der Form einer nach den Gliedern einer Zeile entwickelten Determinante. Auch die gewöhnlich nach Catalan benannte Beziehung zwischen der geodätischen Krümmung einer Flächenkurve und ihrer Krümmung, die sie als Raumkurve hat, ist in dieser Gaußschen Arbeit schon zu finden (l. c. S. 387 unten).

[20] Siehe 1, S. 120.

[21] Vgl. 1, S. 123 (5) oder die oberste Gleichung auf derselben Seite.

[22] Siehe 1, S. 120 (2).

[23] Bei dieser Gelegenheit vergegenwärtige man sich noch einmal, daß der Flächenvektor allein durch die Figur der geschlossenen Raumkurve, hier der Kurve $\mathfrak{n}$, über die das Linienintegral gebildet wird, bestimmt ist, also unabhängig ist von der Form einer etwa in die Kurve eingespannten Fläche (hier z. B. der Kugel); dies gilt insbesondere für die Gleichung (2) in 1, S. 120. Vgl. diese SitzBer. 1944, S. 111.