Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Differenzenquotienten in lokalkonvexen Vektorräumen

Von Hans-Joachim Kowalsky in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 3. Februar 1950

Einleitung

Die erste Ableitung ist bekanntlich der Grenzwert des ersten Differenzenquotienten. Durch Iteration erhält man einerseits die höheren Ableitungen, andererseits die höheren Differenzenquotienten. Damit entsteht die Frage, ob auch die n-te Ableitung gleich dem Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten ist; allgemeiner die Frage nach notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der n-te Differenzenquotient gegen die n-te Ableitung konvergiert.

Diese Frage, die offenbar die Vertauschbarkeit gewisser Operationen betrifft, hat E. Hopf (Diss. Berlin 1926) erschöpfend für den Fall reeller Funktionen in einer reellen Veränderlichen behandelt[1]. Als wesentliches Hilfsmittel wird dabei der Mittelwertsatz der Differentialrechnung benutzt.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit einer Verallgemeinerung der Hopfschen Untersuchungen. Zu einer solchen Verallgemeinerung wird man z. B. durch die Differentialgeometrie der Kurven geführt. Verwendet man zur analytischen Darstellung die Vektorschreibweise, so erhält man einen Vektor, der von einem reellen Parameter abhängt. Bei der Behandlung der höheren Schmieggebilde kann man dann bekanntlich von einem approximierenden Gebilde ausgehen, das von endlich vielen, getrennt liegenden Kurvenpunkten aufgespannt wird. In der analytischen Formulierung führt das zu höheren Differenzenquotienten des vom Kurvenparameter abhängenden Ortsvektors. Die Frage, ob das approximierende Gebilde beim Zu-

[1] Vgl. Haupt-Aumann, Diff.- und Integralrechnung II, 2. Aufl., Berlin 1950, Nr. 2, 2, 3 und 2, 2, 4.

sammenrücken der Punkte gegen ein Schmieggebilde konvergiert, ist dann gleichbedeutend damit, ob die höheren Differenzenquotienten gegen die entsprechenden Ableitungen des Ortsvektors streben.

Liegt ein linearer Vektorraum endlicher Dimension vor, so läßt sich die Antwort auf die Ergebnisse von E. Hopf zurückführen, indem man die Koordinaten des Ortsvektors heranzieht, die reelle Funktionen in einer reellen Veränderlichen sind. Aber abgesehen davon, daß diese Behandlungsweise vom invariantentheoretischen Standpunkt aus nicht sehr befriedigt, ist man durch die moderne Entwicklung der Mathematik und ihrer Anwendungen gezwungen, auch Räume unendlicher Dimension zuzulassen. Dann aber versagen die bisherigen Methoden.

Im folgenden soll gezeigt werden, daß sich auch bei so weitgehender Verallgemeinerung die Hopfschen Ergebnisse übertragen. Dabei werden wir sogleich einen beliebigen topologischen Vektorraum über einem beliebigen Skalarenkörper der Charakteristik Null zugrunde legen und einen Vektor betrachten, der von einem im Skalarenkörper variierenden Parameter abhängt.

Eine Einschränkung werden wir allerdings den betrachteten Räumen auferlegen: Wir werden lokalkonvexe Vektorräume untersuchen, d. h. Räume mit konvexen Umgebungen. Die Konvexität wird sich nämlich als ein entscheidendes Hilfsmittel für das Rechnen mit Umgebungen erweisen. Wir werden zeigen, daß die Forderung der Konvexität in gewissem Sinne mit der Gültigkeit des distributiven Gesetzes gleichbedeutend ist. In dieser Einschränkung liegt eine Spezialisierung, die sich jedoch in neuerer Zeit als durchaus naturgemäß und fruchtbar erwiesen hat. Außerdem umfaßt sie die meisten, praktisch bedeutsamen Fälle; so ist z. B. jeder metrische Raum auch lokalkonvex. Wesentlichen Gebrauch von dieser Eigenschaft werden wir bei der Einführung von Integrationsprozessen machen.

Die Aufstellung von notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß der n-te Differenzenquotient gegen die n-te Ableitung konvergiert, gelingt dann in folgender Weise: Der zu untersuchende Vektor wird zunächst mit hinreichender Genauigkeit durch ein Taylorpolynom angenähert und der Differenzenquotient des Approximationspolynoms gebildet. Es kommt dann nur noch darauf an, daß der Differenzenquotient des auftretenden Restgliedes in der Grenze gegen den Nullvektor konvergiert. Die Beweislast wird damit auf eine geeignete Abschätzung des Restgliedes verlagert. Diese Abschätzung selbst knüpft an die übliche Integraldarstellung des Restgliedes an, eine Darstellung, die wesentlich von der Konvexität des Raumes und gewissen Stetigkeitsvoraussetzungen Gebrauch macht. Der Integralausdruck läßt sich ohne Schwierigkeiten ohne Verwendung eines Mittelwertsatzes abschätzen.

§ 1. Lokalkonvexe Vektorräume

Der Raum, auf den sich die nachfolgenden Untersuchungen beziehen, soll einerseits möglichst allgemein gefaßt werden: Wir erweitern den Begriff des linearen, topologischen Vektorraumes[1], indem wir auf ein Trennungs- und Abzählbarkeitsaxiom verzichten. Andererseits wird es aber darauf ankommen, daß man mit den Umgebungen des Raumes bequem rechnen kann: Wir werden hierdurch ganz naturgemäß auf die lokalkonvexen Vektorräume geführt werden. Die weiteren Ergebnisse werden sich dann stets auf solche lokalkonvexen Vektorräume beziehen.

Zunächst erklären wir, was unter einem *linearen, topologischen Vektorraum* verstanden werden soll:

Def.: *Eine Menge R heißt ein linearer, topologischer Vektorraum, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

a) *R ist ein linearer Vektorraum über einem Körper K der Charakteristik Null.*

b) *R und K sind je ein topologischer Raum.*

c) *Die Rechenoperationen sind hinsichtlich dieser Topologien gleichzeitig in allen Argumenten stetig.*

Die Topologien in R und K können durch je ein Umgebungssystem gegeben gedacht werden, das den drei ersten Hausdorffschen Axiomen genügt. Dabei sei die Topologie von K noch so beschaffen, daß sie in dem Primkörper K_0 als Relativraum mit der durch den absoluten Betrag gegebenen Topologie über-

[1] Vgl. van Dantzig, Zur topol. Algebra I, Math. Ann. 107.

einstimmt. (Wegen $\chi(K) = O$ ist K_0 isomorph zum Körper der rationalen Zahlen und soll der Einfachheit halber mit diesem identifiziert werden.)

Wegen der geforderten Stetigkeit der Addition in R genügt es, ein vollständiges Umgebungssystem der Null anzugeben. Unter U soll im folgenden stets eine Umgebung der Null in R verstanden werden. Ist schließlich M eine Menge aus R, so wollen wir unter $\langle M \rangle$ einen beliebigen, aber festen Vektor aus M verstehen.

Bezeichnung. Die Vektoren aus R bezeichnen wir mit kleinen lateinischen Buchstaben, die Elemente aus K mit kleinen griechischen Buchstaben. Mengen von solchen Elementen aus R oder K werden mit den entsprechenden großen Buchstaben bezeichnet.

Für Teilmengen $M, N, \ldots$ aus R kann man nun in üblicher Weise eine Addition und eine Multiplikation mit Elementen von K definieren, indem man diese Operationen auf die einzelnen Elemente ausübt:

$$M + N = \{m + n\}_{m \in M, n \in N}; \quad \lambda M = \{\lambda m\}_{m \in M}.$$

Diese für Teilmengen erklärte Addition und Multiplikation sind offenbar kommutativ und assoziativ. Jedoch ist die Addition im allgemeinen nicht umkehrbar; sie gestattet nur einen Übergang zu umfassenderen Mengen.

Eine für das Rechnen mit Teilmengen wesentliche Abweichung ergibt sich schließlich bei den distributiven Gesetzen. In der Form

$$\lambda(M + N) = \lambda M + \lambda N$$

ist das distributive Gesetz zwar noch erfüllt, wie man an Hand der Definition sofort nachrechnet. Für das zweite distributive Gesetz gilt jedoch nur die abgeschwächte Form

$$(\lambda + \mu) M \subseteq \lambda M + \mu M.$$

Daß hier das Gleichheitszeichen nicht allgemein gesetzt werden darf, erkennt man an dem Beispiel

$$\lambda M + (-\lambda) M \neq 0.$$

Für das Rechnen mit Umgebungen – die in erster Linie als Teilmengen interessieren – wirkt dieser Umstand außerordentlich erschwerend. Wir wollen daher zunächst notwendige und hinreichende Bedingungen aufsuchen, unter denen in dem zweiten distributiven Gesetz stets das Gleichheitszeichen auftritt.

Ein solches Kriterium wird durch den Begriff der Konvexität geliefert. Bekanntlich nennt man eine Teilmenge des Anschauungsraumes konvex, wenn sie mit zwei Punkten des Raumes auch deren Verbindungsstrecke enthält. Wir fassen diesen Begriff noch etwas allgemeiner und definieren die Konvexität hinsichtlich einer Menge $\Gamma \subseteq K$:

Def.: *Eine Menge $M \subseteq R$ heißt Γ-konvex, wenn sie mit je zwei Vektoren x und y auch alle Vektoren*

$$\frac{\lambda x + \mu y}{\lambda + \mu} \quad \textit{mit } \lambda, \mu \in \Gamma$$

enthält.

Den Zusammenhang mit der vorher aufgeworfenen Frage liefert jetzt der folgende

Satz: *Dann und nur dann ist die Menge $M \subseteq R$ Γ-konvex, wenn das zweite distributive Gesetz in der Form*

$$(\lambda + \mu)\, M = \lambda M + \mu M$$

für alle $\lambda, \mu \in \Gamma$ erfüllt ist.

Beweis:

1. M sei Γ-konvex. Jeder Vektor aus $\lambda M + \mu M$ $(\lambda, \mu \in \Gamma)$ besitzt die Darstellung

$$\lambda x_1 + \mu x_2 \text{ mit } x_1, x_2 \in M.$$

Wegen der Konvexität von M ist dann

$$\frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda + \mu} = x_3$$

ein Vektor aus M, und

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda + \mu)\, x_3$$

ist ein Vektor aus $(\lambda+\mu)M$. Also folgt

$$\lambda M + \mu M \subseteqq (\lambda+\mu)M.$$

Da die umgekehrte Inklusionsbeziehung stets erfüllt ist, gilt das Gleichheitszeichen.

2. Es gelte

$$\lambda M + \mu M = (\lambda+\mu)M \text{ für } \lambda, \mu \in \Gamma.$$

Zu beliebigen Vektoren $x_1, x_2 \in M$ gibt es also stets einen Vektor $x_3 \in M$, so daß

$$\lambda x_1 + \mu x_2 = (\lambda+\mu)x_3$$

ist. Hieraus folgt

$$\frac{\lambda x_1 + \mu x_2}{\lambda+\mu} = x_3 \in M.$$

Das ist die Γ-Konvexität von M.

Einschränkend wollen wir nun eine Menge M schlechthin konvex nennen, wenn sie K_0^+-konvex ist. Dabei bedeutet K_0^+ die Menge der positiven Elemente aus dem Primkörper K_0.

Auf Grund der bisher abgeleiteten Ergebnisse erscheint es jetzt durchaus sinnvoll, wenn wir die betrachteten Räume durch gewisse Konvexitätsforderungen spezialisieren. Wir definieren:

Def.: *Ein linearer, topologischer Vektorraum heißt ein lokalkonvexer Vektorraum, wenn er ein Umgebungssystem besitzt, das aus lauter konvexen Umgebungen besteht*[1].

Die folgenden Untersuchungen werden wir nun auf solche lokalkonvexen Räume beschränken. Hierin liegt eine Einengung, die aber die praktisch bedeutsamen Fälle im allgemeinen erfaßt. Insbesondere ist jeder metrische Raum auch lokalkonvex.

§ 2. Differenzenquotienten und Differentialquotienten

Wir stellen noch einmal kurz die wesentlichen Definitionen und Eigenschaften der Differenzenquotienten und Differentialquotienten in einem linearen, topologischen Vektorraum zu-

[1] Vgl. G. W. Mackey, On konvex topological linear spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. vol 29 (1943).

sammen. Die Forderung der lokalen Konvexität ist hierbei nicht erforderlich[1].

$x(\tau)$ bedeute einen Vektor, der von einem Parameter $\tau \in K$ abhängt. Er sei etwa für alle τ aus einem Gebiet $\Gamma \subseteq K$ definiert. Für einen solchen Vektor erklärt man über Γ den n-ten Differenzenquotienten $[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau)$ durch die folgende rekursive Definition:

Def.:
$$[\tau_0, \tau_1]\, x(\tau) = \frac{x(\tau_0) - x(\tau_1)}{\tau_0 - \tau_1}$$

$$[\tau_0, \ldots, \tau_{n+1}]\, x(\tau) = [\tau_n, \tau_{n+1}]\, [\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}, \tau]\, x(\tau).$$

Dabei sind die τ_ν feste, paarweise verschiedene Elemente aus Γ.

Für den n-ten Differenzenquotienten gilt die bekannte *Lagrangesche* Darstellung

(L) $$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{x(\tau_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu \neq \nu}}^{n} (\tau_\nu - \tau_\mu)}.$$

Hieraus entnimmt man: Die Bildung des n-ten Differenzenquotienten ist eine lineare Operation, die in $\tau_0, \ldots, \tau_n$ symmetrisch ist.

Bedeutet a einen festen Vektor, so gilt

(1) $$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\,(\tau^m a) = \left| \begin{array}{ll} a & m = n \\ \quad\text{für} & \\ 0 & m < n. \end{array} \right.$$

Mit Hilfe der Definition der Differenzenquotienten beweist man ferner leicht die folgende *Transformationsformel:*

(2)
$$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = [\sigma_0, \ldots, \sigma_n]\, x(\tau) + (\tau_0 - \sigma_0)[\sigma_0, \tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) + \ldots +$$
$$+ (\tau_n - \sigma_n)\,[\sigma_0, \ldots, \sigma_n, \tau_n]\, x(\tau).$$

Unmittelbar rechnet man auch die nachstehende *Verschiebungsformel* aus:

---

[1] Vgl. Haupt-Aumann, Differential- und Integralrechnung II, 2. Aufl., Berlin 1950, Nr. 1, 10, 1 ff.

$$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau+\alpha) = [\tau_0+\alpha, \ldots, \tau_n+\alpha]\, x(\tau) \tag{3}$$

(α fest aus K).

Schließlich beweisen wir noch eine *Reduktionsgleichung: Ist* $x(\tau_n) = 0$, *so gilt*

$$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = [\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}]\, \frac{x(\tau)}{\tau-\tau_n}\,. \tag{4}$$

Beweis: Aus (L) folgt:

$$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x(\tau_\nu)}{\prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n} (\tau_\nu-\tau_\mu)} + \frac{x(\tau_n)}{\prod\limits_{\mu<n} (\tau_n-\tau_\mu)}\,.$$

Wegen $x(\tau_n) = 0$ fällt das letzte Glied fort, und man erhält

$$[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \frac{x(\tau_\nu)}{(\tau_\nu-\tau_n) \prod\limits_{\substack{\mu=0\\ \mu\neq\nu}}^{n-1} (\tau_\nu-\tau_\mu)} = [\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}]\, \frac{x(\tau)}{\tau-\tau_n}$$

wie behauptet.

Die Definition des Differentialquotienten geben wir in der folgenden Form an:

Def.: *Der Vektor* $x(\tau)$ *heißt an der Stelle* α *differenzierbar, wenn er eine Darstellung*

$$x(\alpha+\tau) = x(\alpha) + x'(\alpha)\tau + \tau d_1(x;\alpha,\tau)$$
$$\textit{mit } \lim_{\tau\to 0} d_1(x;\alpha,\tau) = 0$$

gestattet. Der Vektor $x'(\alpha)$ *heißt dann die erste Ableitung des Vektors* $x(\tau)$ *an der Stelle* α.

Ganz entsprechend definieren wir die höheren Ableitungen:

Der Vektor $x(\tau)$ heißt an der Stelle $\tau=\alpha$ n-fach differenzierbar, wenn alle Ableitungen bis zur $(n-1)$-ten eine Darstellung der Form

$$x^{(\nu)}(\alpha+\tau) = x^{(\nu)}(\alpha) + x^{(\nu+1)}(\alpha)\tau + \tau d_1(x^{(\nu)};\alpha,\tau)$$
$$\text{mit } \lim_{\tau\to 0} d_1(x^{(\nu)};\alpha,\tau) = 0 \qquad (\nu = 0, \ldots, n-1)$$

gestatten.

Schließlich wollen wir sagen, daß der Vektor $x(\tau)$ in einem Gebiet $\Gamma \subseteq K$ n-fach differenzierbar sei, wenn er an jeder Stelle $\alpha \in \Gamma$ n-fach differenzierbar ist. Er heißt endlich in Γ n-fach gleichmäßig differenzierbar, wenn alle Fehlervektoren $d_1(x^{(\nu)}; \alpha, \tau)$ für $\nu = 0, \ldots, n-1$ gleichmäßig für jedes $\alpha \in \Gamma$ mit τ gegen Null gehen.

§ 3. Das K_0-Integral.

Während bei der Behandlung der Differenzen- und Differentialquotienten die lokale Konvexität des Raumes nicht benutzt wurde, wird sie jetzt bei der Integration eine wesentliche Rolle spielen. Wir setzen also jetzt wieder R als einen lokalkonvexen Vektorraum voraus[1].

Der Vektor $x(\tau)$ sei in einem Gebiet $\Gamma \subseteq K$ definiert, und α, β seien zwei feste Punkte aus Γ. Wir wollen das Integral des Vektors $x(\tau)$ längs der „K_0-Strecke" zwischen α und β in üblicher Weise als Grenzwert der folgenden Riemannschen Summe erklären:

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} x(\tau_\nu^*)\ (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu) \qquad (\tau_0 = \alpha,\ \tau_n = \beta).$$

Die τ_ν sollen dabei alle auf der durch α und β gegebenen „K_0-Strecke" liegen; d. h. sie sollen sich in folgender Weise darstellen

$$\tau_\nu = \alpha + \lambda_\nu(\beta - \alpha) \qquad 0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = 1;\ \lambda_\nu \in K_0^+.$$

Die τ_ν^* sind beliebig gewählte Zwischenpunkte auf der durch τ_ν und $\tau_{\nu+1}$ gegebenen K_0-Strecke.

Existiert der Grenzwert dieser Summe unabhängig von der Wahl der τ_ν^*, wenn man die Spanne der Unterteilung gegen Null gehen läßt, so bezeichnen wir den Grenzwert mit

$$\int_\alpha^\beta x(\tau)\, d\tau$$

und nennen $x(\tau)$ K_0-integrierbar.

---

[1] Vgl. R. S. Phillips, Integration in a convex linear topological space, Trans. Amer. Math. Soc. vol. 47 (1940).

Für das so definierte K_0-Integral gelten die üblichen Rechenregeln. Besonders zu erwähnen ist jedoch noch die folgende Beziehung, die man unmittelbar aus der geforderten Konvexität der Umgebungen in R ableitet:

Ist $x(\tau)$ für alle τ des Integrationsintervalles in einer festen Umgebung V enthalten, ist also $x(\tau) = \langle V \rangle$, so gilt

$$\int_\alpha^\beta x(\tau)\, d\tau = \int_\alpha^\beta \langle V \rangle\, d\tau = \langle \bar{V} \rangle \int_\alpha^\beta d\tau = (\beta-\alpha)\, \langle \bar{V} \rangle.$$

Wir zeigen nun: Ist der Integrand gleichmäßig stetig, so ist der Grenzwert der Riemannschen Summe s bei fester Zerlegungsfolge unabhängig von der Wahl der τ_ν^*. Sind nämlich τ_ν^* und $\hat{\tau}_\nu$ verschieden gewählte Zwischenstellen, so ist

$$s^* - \hat{s} = \sum_{\nu=0}^{n-1} [x(\tau_\nu^*) - x(\hat{\tau}_\nu)]\, (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu).$$

Wegen der gleichm. Stetigkeit ist $x(\tau_\nu^*) - x(\hat{\tau}_\nu)$ ein Vektor aus einer Umgebung U, die nur von der Spanne der Einteilung, nicht aber von ν abhängt. Damit erhält man

$$s^* - \hat{s} = \sum_{\nu=0}^{n-1} \langle U \rangle (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu) = \langle U \rangle \sum_{\nu=0}^{n-1} (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu) = (\beta - \alpha)\, \langle U \rangle.$$

Geht nun die Spanne der Einteilung gegen Null, so geht auch $\langle U \rangle$ gegen Null, und die Grenzwerte stimmen, wie behauptet, überein.

Jetzt können wir leicht den folgenden Hauptsatz beweisen:

Satz: *Ist $x(\tau)$ im Integrationsintervall gleichm. differenzierbar, und ist die Ableitung dort noch gleichm. stetig, so ist $x'(\tau)$ K_0-integrierbar, und es gilt*

$$\int_\alpha^\beta x'(\tau)\, d\tau = x(\beta) - x(\alpha).$$

Beweis: Da $x'(\tau)$ gleichm. stetig ist, kann man die τ_ν^* von vorne herein speziell mit dem Intervallanfang zusammenfallen lassen:

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} x'(\tau_\nu)\ \ (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu).$$

Aus der Definition von $x'(\tau)$ folgt

$$x(\tau_{\nu+1}) = x(\tau_\nu) + x'(\tau_\nu)(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu) + (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu)\, d_1(x; \tau_\nu; \tau_{\nu+1} - \tau_\nu).$$

Setzt man in s ein, so erhält man

$$s = \sum_{\nu=0}^{n-1} [x(\tau_{\nu+1}) - x(\tau_\nu)] - \sum_{\nu=0}^{n-1} d_1(x; \tau_\nu, \tau_{\nu+1} - \tau_\nu)(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu)$$

$$= x(\beta) - x(\alpha) - \sum_{\nu=0}^{n-1} d_1(x; \tau_\nu, \tau_{\nu+1} - \tau_\nu)(\tau_{\nu+1} - \tau_\nu).$$

Die Vektoren d_1 liegen wegen der gleichm. Differenzierbarkeit alle in einer Umgebung U, die nur von der Spanne abhängt. Also

$$s = x(\beta) - x(\alpha) - \sum_{\nu=0}^{\nu-1} \langle U \rangle (\tau_{\nu+1} - \tau_\nu) = x(\beta) - x(\alpha) - (\beta - \alpha)\langle U \rangle.$$

Geht jetzt die Spanne der Einteilung gegen Null, so geht wiederum auch $\langle U \rangle$ gegen Null, und es folgt die Behauptung des Satzes.

§ 4. Taylorentwicklung

Als wesentliches Hilfsmittel für die Untersuchung der Differenzenquotienten wird sich ein Satz über die Taylorentwicklung eines Vektors erweisen. Wir wollen daher zunächst in diesem Paragraphen die Möglichkeit einer Taylorentwicklung untersuchen. Wir stellen an die Spitze die folgende

Def.: $x(\tau)$ *heißt im Punkte* $\tau = \alpha$ *n-fach taylorentwickelbar, wenn folgende Darstellung möglich ist:*

$$x(\alpha + \tau) = x(\alpha) + x'(\alpha)\tau + \cdots + x^{(n)}(\alpha)\frac{\tau^n}{n!} + \frac{\tau^n}{n!} d_n(x; \alpha, \tau)$$

$$\textit{mit } \lim_{\tau \to 0} d_n(x; \alpha, \tau) = 0.$$

Die Entwicklung heißt gleichm. in Γ, *wenn sie für alle* $\alpha \in \Gamma$ *möglich ist und wenn die Fehlervektoren* d_n *gleichm. für alle* $\alpha \in \Gamma$ *mit* τ *gegen Null gehen.*

Über die Möglichkeit einer solchen Taylorentwicklung gibt nun der folgende Satz Auskunft:

Satz: *Ist $x(\tau)$ in Γ n-fach gleichm. differenzierbar, und ist $x^{(n)}(\tau)$ in Γ noch gleichm. stetig, so ist $x(\tau)$ in Γ n-fach gleichm. taylorentwickelbar.*

Der Beweis dieses Satzes läuft auf die übliche Integraldarstellung des Restgliedes hinaus. Wir setzen

$$x(\alpha+\tau) = x(\alpha) + x'(\alpha)\tau + \cdots\cdots + x^{(n-1)}(\alpha)\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} + f(\alpha, \alpha+\tau).$$

Setzen wir jetzt $\alpha+\tau=\sigma$, schreiben also

$$x(\sigma) = x(\alpha) + x'(\alpha)(\sigma-\alpha) + \cdots + x^{(n-1)}(\alpha)\frac{(\sigma-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!} + f(\alpha,\sigma),$$

so liefert Differentiation nach α bei festem σ nach leichter Zwischenrechnung

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha,\sigma) = -x^{(n)}(\alpha)\frac{(\sigma-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Da $f(\sigma,\sigma)=0$ ist, folgt wegen der gleichm. Stetigkeit dieser Ableitung sofort

$$\begin{aligned} f(\alpha,\sigma) &= \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^\sigma x^{(n)}(\rho)(\sigma-\rho)^{n-1}\,d\rho \\ &= \frac{x^{(n)}(\alpha)}{(n-1)!}\int_\alpha^\sigma (\sigma-\rho)^{n-1}\,d\rho + \frac{1}{(n-1)!}\int_\alpha^\sigma [x^{(n)}(\rho)-x^{(n)}(\alpha)](\sigma-\rho)^{n-1}\,d\rho.\end{aligned}$$

Ebenfalls wegen der gleichm. Stetigkeit von $x^{(n)}(\tau)$ liegt der Vektor $x^{(n)}(\rho)-x^{(n)}(\alpha)$ in einer gewissen Umgebung U, die nur von der Differenz $\sigma-\alpha$ abhängt. Die Ausführung der Integration liefert daher

$$f(\alpha,\sigma) = \frac{(\sigma-\alpha)^n}{n!}[x^{(n)}(\alpha) + \langle\overline{U}\rangle].$$

$\langle U\rangle$ geht mit $\sigma\to\alpha$ gleichm. für alle $\alpha\in\Gamma$ gegen Null. Führen wir noch die ursprünglichen Bezeichnungen wieder ein und bezeichnen $\langle\overline{U}\rangle$ mit $d_n(x;\alpha,\tau)$, so ergibt sich die Behauptung des Satzes:

$$f(\alpha,\alpha+\tau) = \frac{\tau^n}{n!}(x^{(n)}(\alpha) + d_n(x;\alpha,\tau))$$

$$\text{mit } \lim_{\tau\to 0} d_n(x;\alpha,\tau) = 0 \qquad \text{gleichm. in } \Gamma.$$

Nebenbei hat sich für den Fehlervektor d_n folgende Integraldarstellung ergeben:

$$(5)\quad \tau^n d_n(x;\alpha,\tau) = n \int_{\alpha}^{\alpha+\tau} [x^{(n)}(\rho) - x^{(n)}(\alpha)]\,(\alpha+\tau-\rho)^{n-1}\,d\rho.$$

An dieses Ergebnis knüpfen wir gleich noch eine Folgerung, die wir im nächsten Paragraphen brauchen. Wir zeigen nämlich:

Hilfssatz: *Der Vektor* $\tau^{n-1} d_n(x;\alpha,\tau)$ *ist gleichm. für alle* α *nach* τ *(n-1)-mal gleichm. differenzierbar, seine (n-1)-te Ableitung ist noch gleichm. stetig und geht mit* τ *gegen Null.*

Beweis: Zunächst ist nämlich $\tau^n d_n(x;\alpha,\tau)$ für alle α an der Stelle $\tau = 0$ n-fach gleichm. taylorentwickelbar, wie man an Hand des abgeleiteten Satzes leicht einsieht. Seine ν-te Ableitung nach τ ist dann $(n-\nu)$-fach taylorentwickelbar; und da alle Ableitungen an der Stelle $\tau = 0$ verschwinden, gilt

$$\frac{\partial^{\nu}}{\partial\tau^{\nu}}\left(\tau^n d_n(x;\alpha,\tau)\right) = \frac{\tau^{n-\nu}}{(n-\nu)!}\, d_{\alpha,\nu}(\tau)$$

$$\text{mit } \lim_{\tau\to 0} d_{\alpha,\nu}(\tau) = 0 \qquad \text{gleichm. für alle } \alpha.$$

Nun folgt die Behauptung des Satzes sofort mit Hilfe der Leibnizschen Regel:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau^{n-1}}\left(\tau^{n-1} d_n(x;\alpha,\tau)\right) &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial\tau^{n-1}}\left(\frac{1}{\tau}\,\tau^n d_n(x;\alpha,\tau)\right)\\ &= \sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\mu}(-1)^{\mu}\frac{\mu!}{\tau^{\mu+1}}\,\frac{\tau^{\mu+1}}{(\mu+1)!}\, d_{\alpha,\mu+1}(\tau)\\ &= \sum_{\mu=0}^{n-1}\binom{n-1}{\mu}\frac{(-1)^{\mu}}{\mu+1}\, d_{\alpha,\mu+1}(\tau).\end{aligned}$$

Dieser Vektor geht gleichm. für alle α mit τ gegen Null.

§ 5. Der freie Limes des *n*-ten Differenzenquotienten

Mit dem im vorangehenden Paragraphen gewonnenen Hilfsmittel der Taylorentwicklung können wir jetzt an die Untersuchung über den freien Limes des n-ten Differenzenquotienten gehen. Darunter wollen wir den

$$\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau)$$

verstehen, bei dem die Art, wie die τ_ν gegen α gehen, völlig beliebig ist. Wir schreiben für einen solchen Grenzübergang „f-Lim ...“. Die Existenz dieses Limes besagt also, daß bei beliebigem Grenzübergang stets derselbe Grenzwert herauskommen soll. Ein notwendiges und hinreichendes Kriterium hierfür wird durch folgenden Satz gegeben:

Satz: *Dann und nur dann existiert in einem lokalkonvexen Vektorraum der freie Limes des n-ten Differenzenquotienten eines Vektors $x(\tau)$ gleichm. in einem Gebiet Γ, wenn $x(\tau)$ in Γ n-mal gleichm. differenzierbar ist und wenn die n-te Ableitung dort noch gleichm. stetig ist. Es gilt dann*

$$f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = \frac{1}{n!}\, x^{(n)}(\alpha).$$

Beweis:

1. Nach den Voraussetzungen des Satzes ist $x(\tau)$ in Γ gleichm. n-fach taylorentwickelbar. Setzen wir noch $\tau = \alpha + \eta$, $\tau_\nu = \alpha + \eta_\nu$, so erhalten wir wegen der in § 2 angegebenen Verschiebungsformel (3) und der Eigenschaft (1)

$$\begin{aligned}
[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) &= [\eta_0, \ldots, \eta_n]\, x(\alpha + \eta) \\
&= [\eta_0, \ldots, \eta_n] \left(x(\alpha) + x'(\alpha)\eta + \cdots + x^{(n)}(\alpha) \frac{\eta^n}{n!} + \frac{\eta^n}{n!}\, d_n(x;\alpha,\eta) \right) \\
&= \frac{1}{n!}\, x^{(u)}(\alpha) + \frac{1}{n!}\, [\eta_0, \ldots, \eta_n]\, (\eta^n d_n(x;\alpha,\eta)).
\end{aligned}$$

Zum Beweis genügt es daher, wenn wir zeigen, daß der

$$f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\eta_\nu \to 0} [\eta_0, \ldots, \eta_n]\, (\eta^n d_n(x;\alpha,\eta))$$

gleichm. für alle $\alpha \varepsilon \Gamma$ existiert und gleich Null ist. Hierzu benutzen wir die Integraldarstellung (5) für den Vektor d_n. Danach ergibt sich

$$[\eta_0, \ldots, \eta_n]\,(\eta^n d_n(x; \alpha, \eta)) =$$
$$= n\,[\eta_0, \ldots, \eta_n] \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} [x^{(n)}(\rho) - x^{(n)}(\alpha)]\,(\alpha + \eta - \rho)^{n-1}\,d\rho$$
$$= n\,[\eta_0, \ldots, \eta_n] \int_{\alpha}^{\alpha+\eta_n} [x^{(n)}(\rho) - x^{(n)}(\alpha)]\,(\alpha + \eta - \rho)^{n-1}\,d\rho +$$
$$+ n\,[\eta_0, \ldots, \eta^n] \int_{\alpha+\eta_n}^{\alpha+\eta} [x_n^{(n)}(\rho) - x^{(n)}(\alpha)]\,(\alpha + \eta - \rho)^{n-1}\,d\rho.$$

In dem ersten Summanden kommt η nur im Integranden vor. Man kann daher den Differenzenquotienten unter dem Integralzeichen bilden und erhält nach Eigenschaft (1) den Wert Null. Dieses Glied liefert also keinen Beitrag. Das zweite Glied formen wir in folgender Weise um:

$$n\,[\eta_0, \ldots, \eta_n] \left\{ \int_{\alpha+\eta_n}^{\alpha+\eta_n+\eta-\eta_n} [x^{(n)}(\rho) - x^{(n)}(\alpha + \eta_n)]\,(\alpha + \eta_n + \eta - \eta_n - \rho)^{n-1}\,d\rho + \right.$$
$$\left. + \int_{\alpha+\eta_n}^{\alpha+\eta} [x^{(n)}(\alpha + \eta_n) - x^{(n)}(\alpha)]\,(\alpha + \eta - \rho)^{n-1}\,d\rho \right\}.$$

In dem zweiten Integral kann man die Integration ausführen und den Differenzenquotienten berechnen: Man erhält $x^{(n)}(\alpha+\eta_n) - x^{(n)}(\alpha)$, also $d_0(x; \alpha, \eta_n)$. Das erste Integral ist gleich $(\eta - \eta_n)^n \cdot d_n(x; \alpha + \eta_n, \eta - \eta_n)$. Wegen der Reduktionsformel (4) erhält man mit $\alpha + \eta_n = \alpha^*$, $\eta - \eta_n = \eta^*$, $\eta_\nu - \eta_n = \eta_\nu^*$.

$$(6) \qquad [\eta_0, \ldots, \eta_n]\,(\eta^n d_n(x; \alpha, \eta)) =$$
$$= [\eta_0^*, \ldots, \eta_{n-1}^*]\,(\eta^{*\,n-1} d_n(x; \alpha^*, \eta^*)) + d_0(x^{(n)}; \alpha, \eta_n).$$

Der Beweis unserer Behauptung ergibt sich nun sofort durch vollständige Induktion:

Für $n = 1$ erhält man nämlich

$$[\eta_0, \eta_1]\,(\eta d_1(x; \alpha, \eta)) = d_1(x; \alpha^*, \eta_0^*) + d_0(x'; \alpha, \eta_1)$$
$$= d_1(x; \alpha + \eta_1, \eta_0 - \eta_1) + d_0(x'; \alpha, \eta_1).$$

Beide Vektoren gehen gleichm. mit η_0 und η_1 gegen Null; der erste Vektor, weil die Aussage gleichm. für alle α, also auch für

$\alpha + \eta_1$ gilt, der zweite Vektor wegen der gleichm. Stetigkeit von $x'(\tau)$.

Ist die Behauptung nun bereits für $n-1$ bewiesen, so gilt sie auch für n. Wegen des am Schluß des vorangehenden Paragraphen bewiesenen Hilfssatzes entspricht nämlich der Vektor $\eta^{*\,n-1} d_n(x; \alpha^*, \eta^*)$ der Induktionsvoraussetzung. Der freie Limes des $(n-1)$-ten Differenzenquotienten geht daher gleichm. gegen die $(n-1)$-te Ableitung dieses Vektors, also gegen Null. Damit ist dieser erste Teil des Beweises erbracht.

Wir knüpfen an diese Betrachtung gleich noch eine Folgerung. Aus dem Beweis ergibt sich nämlich, daß

$$(7)\quad [\eta_0, \ldots, \eta_n]\ (\eta^n d_n(x; \alpha, \eta)) = d^n(\eta_n) + d^{n-1}(\eta_{n-1} - \eta_n) + \\ + d^{n-2}(\eta_{n-2} - \eta_{n-1}) + \cdots + d^0(\eta_0 - \eta_1)$$

ist, wo die Vektoren d^ν gleichm. mit ihren Argumenten gegen Null gehen. Für $n = 1$ ist dies nämlich offenbar zutreffend. Ist es für $n-1$ schon bewiesen, so erhält man aus (6) mit $d_0(x^{(n)}; \alpha, \eta_n) = d^n(\eta_n)$

$$[\eta_0, \ldots, \eta_n]\ (\eta^n d_n(x; \alpha, \eta)) = \\ = d^n(\eta_n) + d^{n-1}(\eta^*_{n-1}) + d^{n-2}(\eta^*_{n-2} - \eta^*_{n-1}) + \cdots + d^0(\eta^*_0 - \eta^*_1) \\ = d^n(\eta_n) + d^{n-1}(\eta_{n-1} - \eta_n) + \cdots + d^0(\eta_0 - \eta_1).$$

2. Es gelte nun umgekehrt, daß der freie Limes des n-ten Differenzenquotienten gleichm. in Γ existiert. Es muß dann gezeigt werden, daß $x(\tau)$ n-mal gleichm. differenzierbar und $x^{(n)}(\tau)$ noch gleichm. stetig ist.

Zunächst folgt aus der Transformationsformel (2) (§ 2)

$$[\tau_0, \ldots, \tau_{n-1}]\ x(\tau) = [\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}]\ x(\tau) + (\tau_0 - \sigma_0) \\ [\sigma_0, \tau_0, \ldots, \tau_{n-1}]\, x(\tau) + \cdots + (\tau_{n-1} - \sigma_{n-1})\ [\sigma_0, \ldots, \sigma_{n-1}, \tau_{n-1}]\, x(\tau).$$

Läßt man die τ_ν beliebig gegen α gehen, hält die σ_ν jedoch fest, so stehen rechts lauter freie Limiten von n-ten Differenzenquotienten bis auf den ersten, konstanten Summanden. Der Limes der linken Seite existiert also. Und zwar auch unabhängig von der Art des Grenzüberganges. Denn läßt man jetzt auch die σ_ν in beliebiger Weise gegen α gehen, so gehen die restlichen Summanden alle gleichm. gegen Null, und die Grenzwerte stimmen überein. So von n rückwärts schließend weist man die gleichm. Existenz der freien Limiten aller ν-ten Differenzenquotienten für $\nu \leq n$ nach.

Für $\nu = 1$ folgt hieraus sofort die einmalige gleichm. Differenzierbarkeit von $x(\tau)$. Durch Induktion zeigt man dann auch die n-malige gleichmäßige Differenzierbarkeit, indem man in

$$\frac{[\tau_0, \ldots, \tau_\nu]\, x(\tau) - [\sigma_0, \ldots, \sigma_\nu]\, x(\tau)}{\tau_0 - \sigma_0} =$$

$$= [\sigma_0, \tau_0, \ldots, \tau_\nu]\, x(\tau) + \cdots + \frac{\tau_\nu - \sigma_\nu}{\tau_0 - \sigma_0} [\sigma_0, \ldots, \sigma_\nu, \tau_\nu]\, x(\tau)$$

zunächst die τ_ν gegen α und die σ_ν gegen σ_0 gehen läßt, um dann auch schließlich σ_0 gegen α gehen zu lassen. Man erhält

$$\frac{1}{\nu!} \operatorname*{Lim}_{\sigma_0 \to \alpha} \frac{x^{(\nu)}(\alpha) - x^{(\nu)}(\sigma_0)}{\alpha - \sigma_0} = (\nu + 1)\, f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_{\nu+1}]\, x(\tau).$$

Also

$$f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_{\nu+1}]\, x(\tau) = \frac{1}{(\nu+1)!}\, x^{(\nu+1)}(\alpha).$$

Die gleichm. Stetigkeit der n-ten Ableitung schließlich folgt unmittelbar aus der gleichmäßigen Existenz des freien Limes des n-ten Differenzenquotienten wegen

$$\operatorname*{Lim}_{\beta \to \alpha} \left(f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \beta} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) \right) = f\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau).$$

Damit ist der Beweis des Satzes über die freien Limiten der n-ten Differenzenquotienten vollständig erbracht.

§ 6. Gebundene Limiten

Ganz entsprechend wie bei den Funktionen einer reellen Veränderlichen kann man die Voraussetzungen über den Vektor $x(\tau)$ abschwächen, wenn man dafür die Art des Grenzüberganges einschränkt. Man kann nämlich auf die Stetigkeit der n-ten Ableitung verzichten, wenn man an Stelle des freien Limes jetzt sich auf gebundene Limiten beschränkt. Unter einem gebundenen Limes versteht man dabei in dem Falle, daß K der Körper der reellen Zahlen ist, einen Grenzübergang, bei dem die τ_ν so gegen α gehen, daß α stets in dem von den τ_ν aufgespannten Intervall enthalten ist. Da wir hier jedoch einen beliebigen Körper der Charakteristik Null zulassen, müssen wir den Begriff des gebundenen Limes in folgender Weise verallgemeinern:

Def.: *Der* $$\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau)$$

heißt ein gebundener Limes, wenn die τ_ν beim Grenzübergang noch folgende Nebenbedingungen erfüllen:

1. *Die τ_ν liegen stets auf einer K_0-Geraden durch α; also*

$$\tau_\nu = \alpha + \lambda_\nu \sigma \quad \text{mit} \quad \lambda_\nu \in K_0.$$

2. *Die λ_ν sind nicht gleichzeitig alle positiv bzw. negativ.*

σ ist dabei ein Element aus K, das sich beim Grenzübergang noch beliebig ändern kann. Der gebundene Limes soll mit „g-Lim...“ bezeichnet werden.

Wir beweisen nun die oben angegebene Behauptung in folgendem

Satz: *Dann und nur dann existiert der gebundene Limes des n-ten Differenzenquotienten eines Vektors $x(\tau)$ gleichm. in einem Gebiet Γ, wenn $x(\tau)$ in Γ n-mal gleichm. differenzierbar ist. Es ist dann*

$$g\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau) = \frac{1}{n!}\, x^{(n)}(\alpha).$$

Beweis:

1. $x(\tau)$ sei n-mal gleichm. in Γ differenzierbar. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n.

Induktionsbeginn: $n = 1$.

Aus der einmaligen gleichm. Differenzierbarkeit folgt

$$g\text{-}\operatorname*{Lim}_{\tau_\nu \to \alpha} [\tau_0, \tau_1]\, x(\tau) = x'(\alpha) + g\text{-}\operatorname*{Lim}_{\eta_\nu \to 0} [\eta_0, \eta_1]\, (\eta\, d_1(x; \alpha, \eta))$$
$$= x'(\alpha) + g\text{-}\operatorname*{Lim}_{\eta_\nu \to 0} \left[\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_1}\, d_1(x; \alpha, \eta_0) + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_0}\, d_1(x; \alpha, \eta_1)\right].$$

Wegen der Bedingung 2) für gebundene Limiten ist stets $\left|\frac{\lambda_\nu}{\lambda_0 - \lambda_1}\right| \leq 1$. Da die $d_1(x; \alpha, \eta_\nu)$ nach Voraussetzung gleichm. gegen Null gehen, ist damit der Fall $n = 1$ erledigt.

Die Behauptung sei nun bereits für n bewiesen.

Induktionsschluß: $n + 1$.

Wir führen den Induktionsschluß zunächst für einen speziell gebildeten, nämlich äquidistanten gebundenen Limes.

Auf den Vektor $x'(\tau)$ kann die Induktionsannahme angewandt werden:

$$g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x'(\tau) = \frac{1}{n!}\, x^{(n+1)}(\alpha).$$

Andererseits ist

$$g - \underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x'(\tau) = \tag{8}$$

$$= g - \underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots, \tau_n]\left(\frac{x(\tau+\sigma) - x(\tau)}{\sigma} - d_1(x; \tau, \sigma)\right) =$$

$$= g - \underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\left(\frac{[\tau_0+\sigma, \ldots, \tau_n+\sigma]\, x(\tau) - [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x(\tau)}{\sigma} - [\tau_0, \ldots, \tau_n]\, d_1(x; \tau, \sigma)\right).$$

Wählt man nun die τ_ν speziell äquidistant

$$\tau_0 = \alpha - \lambda\sigma\ (o \leq \lambda < n; \lambda \in K_0);\ \tau_\nu = \tau_0 + \nu\sigma\ (\nu = o \ldots, n+1),$$

so ergibt sich wegen $\tau_{n+1} - \tau_0 = (n+1)\sigma$

$$g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots, \tau_n]\, x'(\tau) = (n+1)\, g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots, \tau_{n+1}]\, x(\tau) -$$
$$- g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0, \ldots \tau_n]\, d_1(x; \tau, \sigma).$$

Der Vektor $d_1(x; \tau, \sigma)$ ist nach τ n-mal gleichm. differenzierbar, und seine n-te Ableitung geht mit σ noch gleichm. gegen Null. Nach Induktionsannahme verschwindet daher das letzte Glied, und der Induktionsschluß ist für diesen Spezialfall erledigt.

Zur Vervollständigung des Beweises genügt es offenbar, zu zeigen, daß der Grenzübergang im wesentlichen nur von dem Verhalten von τ_0 und τ_{n+1} abhängt, also nicht von der speziellen, äquidistanten Wahl der übrigen τ_ν. Dies ergibt sich aber fast unmittelbar aus der Folgerung (7).

Da $x(\tau)$ nämlich $(n+1)$-mal gleichm. differenzierbar ist, ist $x^{(n)}(\tau)$ noch gleichm. stetig. Von den n-ten Differenzenquotienten existiert also sogar der freie Limes. Wegen der Symmetrie der Differenzenquotienten in ihren Argumenten kann man dann die

Numerierung so wählen, daß man mit der Bezeichnungsweise von (7) erhält

$$g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,[\tau_0,\ldots,\tau_{n+1}]\,x(\tau) = g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,\frac{[\tau_0,\ldots,\tau_n]\,x(\tau) - [\tau_1,\ldots,\tau_{n+1}]\,x(\tau)}{\tau_0 - \tau_{n+1}}$$

$$= g\text{-}\underset{\tau_\nu\to\alpha}{\mathrm{Lim}}\,\frac{d^0(\tau_0 - \tau_1) - d^0(\tau_{n+1} - \tau_1)}{\tau_0 - \tau_{n+1}}\,.$$

Dieser Grenzwert hängt aber tatsächlich im wesentlichen nur von τ_0 und τ_{n+1} ab. Das noch auftretende τ_1 kann man sukzessive mit allen τ_ν identifizieren und dabei die übrigen beliebig variieren.

2. Die Umkehrung des Satzes beweist man ganz genau so wie den entsprechenden Teil im vorangehenden Paragraphen. Man hat dabei nur darauf zu achten, daß alle auftretenden Grenzübergänge gebunden durchgeführt werden.

Da aus der n-maligen gleichm. Differenzierbarkeit die gleichm. Stetigkeit der $(n-1)$-ten Ableitung folgt, erhalten wir zum Schluß noch den

Satz: *Wenn der gebundene Limes des n-ten Differenzenquotienten eines Vektors gleichm. in einem Gebiet Γ existiert, dann existiert auch der freie Limes des $(n-1)$-ten Differenzenquotienten dort gleichmäßig.*

Münster, den 10. Januar 1950.