Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der freie Fall auf der rotierenden Erde

Von Hans Bucerius in München

Vorgelegt von Herrn E. Schoenberg am 12. Mai 1950

Es sei zunächst eine mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse rotierende Kugel vorgegeben, sowie ein in der Breite φ mitbewegtes rechtwinkliges Koordinatensystem mit folgender Achsenorientierung der Einheitsvektoren: $\mathfrak{e}_1$ in der Richtung Nord–Süd, $\mathfrak{e}_2$ in der Richtung West–Ost tangential an der Kugel, $\mathfrak{e}_3$ in der Zenit-Richtung. Die Lage des Koordinatenursprungs vom Mittelpunkt der Kugel aus ist dann durch den Vektor $\mathfrak{R} = R \cdot \mathfrak{e}_3$ gegeben, und ein beliebiger Punkt im Raume durch einen Ortsvektor

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \bar{\mathfrak{r}},$$

wenn wir

$$\bar{\mathfrak{r}} = \xi\, \mathfrak{e}_1 + \eta\, \mathfrak{e}_2 + \zeta\, \mathfrak{e}_3$$

setzen. Der Drehvektor $\mathfrak{d}$ stellt sich in diesem System durch

$$\mathfrak{d} = -\,\omega \cos \varphi \cdot \mathfrak{e}_1 + \omega \sin \varphi \cdot \mathfrak{e}_3, \; |\, \mathfrak{d} \,| = \omega,$$

dar. Die konstant angenommene Schwerebeschleunigung an der Kugeloberfläche sei $-g \cdot \mathfrak{e}_3$. Die Bewegungsgleichung im mitbewegten System lautet dann bekanntlich in vektorieller Schreibweise unter Weglassung der trägen und schweren Massenfaktoren:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{r}}{\partial t^2} + 2\left[\mathfrak{d}, \frac{\partial \mathfrak{r}}{\partial t}\right] + [\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{r}]] = -\,g\,\mathfrak{e}_3\,, \tag{1}$$

wobei die partiellen Ableitungen diejenigen im mitbewegten System bedeuten sollen. Wegen $\mathfrak{r} = \mathfrak{R} + \bar{\mathfrak{r}}$ folgt daraus auch

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{\mathfrak{r}}}{\partial t^2} &= -\,g\,\mathfrak{e}_3 - 2\left[\mathfrak{d}, \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial t}\right] - [\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d}\,\mathfrak{R}]] - [\mathfrak{d}\,[\mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{r}}]] \\ &= -\,g\,\mathfrak{e}_3 - 2\left[\mathfrak{d}, \frac{\partial \bar{\mathfrak{r}}}{\partial t}\right] - \mathfrak{d}\,(\mathfrak{d}\,\mathfrak{R}) + \mathfrak{R}\,\omega^2 - \mathfrak{d}\,(\mathfrak{d}\,\bar{\mathfrak{r}}) + \bar{\mathfrak{r}}\,\omega^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Beachten wir die obigen Definitionen der Vektoren $\mathfrak{R}$, $\bar{\mathfrak{r}}$, $\mathfrak{d}$ und multiplizieren beiderseits skalar mit $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$, so ergeben sich die Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= R\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + \xi\,\omega^2 \sin^2\varphi + \zeta\,\omega^2 \sin\varphi\cos\varphi + 2\,\omega\sin\varphi\,\dot{\eta} \\ \ddot{\eta} &= \omega^2\,\eta - 2\,\omega\sin\varphi\cdot\dot{\xi} - 2\,\omega\cos\varphi\,\dot{\zeta} \\ \ddot{\zeta} &= -g + R\,\omega^2\cos^2\varphi + \xi\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi + \zeta\,\omega^2\cos^2\varphi + 2\,\omega\cos\varphi\cdot\dot{\eta} \end{aligned} \tag{3}$$

wo jetzt Punkte die zeitlichen Ableitungen im mitbewegten System ausdrücken.

Bei Anwendung auf die rotierende Erde hat man zu beachten, daß die Kugel durch die Zentrifugalkomponenten zu einer Gleichgewichtsfigur (Geoid) deformiert ist. Das mitbewegte Achsensystem $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$, $\mathfrak{e}_3$ weicht dann von dem bisher definierten in dem Sinne ab, daß $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ bei unveränderter Orientierung in der Tangentialebene an das Geoid gelegen sind, und $\mathfrak{e}_3$ senkrecht dazu, wodurch unter Einführung einer geozentrischen Breite φ' neben der geographischen φ jetzt

$$\mathfrak{R} = R\sin(\varphi - \varphi')\,\mathfrak{e}_1 + R\cos(\varphi - \varphi')\cdot\mathfrak{e}_3$$

ist. Der Radiusvektor R variiert dabei mit φ oder φ'. Die Oberfläche der Gleichgewichtsfigur ist so charakterisiert, daß die Tangentialkomponente der Zentrifugalbeschleunigung in der Richtung $\mathfrak{e}_1$ kompensiert wird durch die Komponente der reinen Schwerebeschleunigung $-g_1\cdot\mathfrak{e}_1$ des deformierten Rotationskörpers in derselben Richtung. Der Vektor der Schwerebeschleunigung nimmt jetzt die allgemeinere Form $-g_1\cdot\mathfrak{e}_1 - g_3\cdot\mathfrak{e}_3$ an. Beachtet man diese Abweichungen vom kugelsymmetrischen Fall, so folgt aus (2)

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= -g_1 + R\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi' + \quad (\text{wie in } (3)) \\ \ddot{\eta} &= \quad (\text{wie in } (3)) \\ \ddot{\zeta} &= -g_3 + R\,\omega^2\cos\varphi\cos\varphi' + \quad (\text{wie in } (3)). \end{aligned} \tag{4}$$

Die Forderung des Gleichgewichtes bedeutet, daß in der ersten Gleichung (4) für $\xi = \eta = \zeta = 0$ und $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$ auch $\ddot{\xi} = 0$ sein muß, also

$$g_1 = R\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi',$$

während in der $\mathfrak{e}_3$-Richtung ein resultierendes

$$-\bar{g} = -g_3 + R\,\omega^2 \cos\varphi \cos\varphi'$$

übrigbleibt. Bei Anwendung auf die rotierende Erde braucht man also in (3) lediglich die konstanten Terme mit $R\omega^2$ als Faktor zu streichen und $-g$ durch ein $-\bar{g}$ zu ersetzen.

Man pflegt die Integration der Gleichung (3) unter der berechtigten Vereinfachung durchzuführen, daß man die Zentrifugalglieder mit ω^2 als klein gegen die Corioliskräfte vernachlässigt. Es scheint noch nicht bemerkt worden zu sein, daß man die Gleichung (4) oder (3) auch unter Mitnahme der Zentrifugalterme streng integrieren kann.

Durch skalare Multiplikation der Grundgleichung (2) mit $\mathfrak{d}$ erhält man zunächst in Koordinatenschreibweise

$$\ddot{\xi} \cos\varphi - \ddot{\zeta} \sin\varphi = \bar{g} \sin\varphi, \tag{5}$$

was zu einem Zwischenintegral

$$\dot{\xi} \cos\varphi - \dot{\zeta} \sin\varphi = \bar{g}\, t \sin\varphi + \text{const.} \tag{6}$$

Anlaß gibt. Aus der ersten und dritten Gleichung (3) folgt sofort

$$\ddot{\xi} \sin\varphi + \ddot{\zeta} \cos\varphi = 2\,\omega\,\dot{\eta} + \omega^2 (\xi \sin\varphi + \zeta \cos\varphi) - \bar{g} \cos\varphi \tag{7}$$

und durch einmalige Differentiation dieser Gleichung

$$\dddot{\xi} \sin\varphi + \dddot{\zeta} \cos\varphi = 2\,\omega\,\ddot{\eta} + \omega^2 (\dot{\xi} \sin\varphi + \dot{\zeta} \cos\varphi). \tag{8}$$

Die zweite der Gleichungen (3) oder (4) liefert andererseits unmittelbar

$$\dot{\xi} \sin\varphi + \dot{\zeta} \cos\varphi = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 \eta - \ddot{\eta}) \tag{9}$$

oder nach zweimaliger Differentiation

$$\dddot{\xi} \sin\varphi + \dddot{\zeta} \cos\varphi = \frac{1}{2\omega} (\omega^2 \ddot{\eta} - \eta^{\mathrm{IV}}). \tag{10}$$

Die Gleichsetzung der rechten Seiten von (8) und (10) unter

Verwendung von (9) ergibt dann eine Differentialgleichung 4. Ordnung für η allein, nämlich:

$$\eta^{IV} + 2\,\omega^2\,\ddot{\eta} + \omega^4\,\eta = 0. \tag{11}$$

Schreibt man (11) in der Form

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\,(\ddot{\eta} + \omega^2\,\eta) + \omega^2\,(\ddot{\eta} + \omega^2\,\eta) = 0,$$

so erkennt man sofort das Zwischenintegral

$$\ddot{\eta} + \omega^2\,\eta = A\,\sin\,\omega\,t + B\,\cos\,\omega\,t. \tag{12}$$

Wir spezialisieren im folgenden der Einfachheit halber auf den freien Fall aus einer Höhe $\zeta = h$ im Ursprung $\xi = \eta = 0$ des Koordinatensystems mit den Anfangsgeschwindigkeiten $\dot{\xi} = \dot{\eta} = \dot{\zeta} = 0$ für $t = 0$. Aus der zweiten Grundgleichung (3) folgt dann für $t = 0$ auch $\ddot{\eta} = 0$. d. h. in (12) $B = 0$, so daß die so vereinfachte Gleichung (12) zu integrieren bleibt mit den Anfangsbedingungen $\eta = 0$, $\dot{\eta} = 0$. Das ist aber die Differentialgleichung der erzwungenen Schwingungen im Resonanzfalle mit der Lösung

$$\eta = \frac{A}{2\,\omega^2}\,(\sin\,\omega\,t - \omega\,t \cdot \cos\,\omega\,t), \tag{13}$$

womit alle benötigten Funktionen der Zeit t für die rechten Seiten der Gleichung (6) und (9) gefunden sind. Wir erhalten nunmehr einmal aus (6), wo die Integrationskonstante jetzt wegen der Wahl der Anfangsbedingungen verschwindet,

$$\dot{\xi}\,\cos\,\varphi - \dot{\zeta}\,\sin\,\varphi = \bar{g}\,t\,\sin\,\varphi \tag{14}$$

und zweitens aus (9) auf Grund von (13)

$$\dot{\xi}\,\sin\,\varphi + \dot{\zeta}\,\cos\,\varphi = -\frac{1}{2}\,A\,t\,\cos\,\omega\,t. \tag{15}$$

Die Auflösung von (14) und (15) führt endlich auf

$$\begin{aligned} \dot{\xi} &= \bar{g}\,t\,\sin\,\varphi\,\cos\,\varphi - \frac{1}{2}\,A\,t\,\sin\,\varphi \cdot \cos\,\omega\,t \\ \dot{\zeta} &= -\bar{g}\,t\,\sin^2\varphi - \frac{1}{2}\,A\,t\,\cos\,\varphi \cdot \cos\,\omega\,t. \end{aligned} \tag{16}$$

Zur Festlegung der Konstanten A bemerken wir auf Grund der Anfangsbedingungen, daß aus der ersten Grundgleichung (3) für $t = 0$ einerseits

$$\ddot{\xi}(0) = h\,\omega^2 \sin\varphi \cos\varphi$$

und aus (16) nach Differentiation nach t anderseits

$$\ddot{\xi}(0) = \bar{g} \sin\varphi \cos\varphi - \frac{1}{2} A \sin\varphi$$

folgt. Gleichsetzung beider Werte bedeutet

$$A = 2\,(\bar{g} - h\,\omega^2) \cos\varphi. \tag{17}$$

Durch nochmalige elementare Quadratur von (16) gewinnt man endlich das Integral des vorgelegten Gleichungssystems für den freien Fall aus der Ruhelage in der Höhe h im mitbewegten Koordinatensystem:

$$\begin{aligned}
\xi &= \bar{g}\sin\varphi\cos\varphi\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\,\omega^2)(1 - \cos\omega t - \omega t \sin\omega t)\\
\eta &= \frac{\cos\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\,\omega^2)(\sin\omega t - \omega t\cdot\cos\omega t)\\
\zeta &= h - \bar{g}\sin^2\varphi\cdot\frac{t^2}{2} + \frac{\cos^2\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\,\omega^2)(1 - \cos\omega t - \omega t\sin\omega t).
\end{aligned} \tag{18}$$

Diese Lösung des Problems ist bemerkenswert beim Vergleich mit derjenigen unter alleiniger Berücksichtigung der Corioliskräfte, die man z. B. bei A. Sommerfeld, Vorl. Bd. I S. 162–65 findet. Auffallend ist, daß bei der strengen Lösung die periodischen Funktionen der Frequenz ω auftreten, statt $2\,\omega$ bei reiner Corioliskraft. Wegen der Kleinheit von ωt bei beobachtbaren Fallbewegungen interessiert hauptsächlich die Entwicklung für kleine ωt. Sie gibt

$$\begin{aligned}
\xi &= \frac{1}{2}\,\bar{g}t^2\,\frac{R\,\omega^2\sin\varphi\cos\varphi}{\bar{g}}\left(\frac{h}{R} + \frac{\bar{g}t^2}{4R}\right) + \cdots\\
\eta &= \frac{1}{3}\,\bar{g}t^2\cdot\omega t\cos\varphi\left(1 - \frac{R\,\omega^2}{\bar{g}}\,\frac{h + \frac{1}{10}\bar{g}t^2}{R}\right) + \cdots\\
\zeta &= h - \frac{1}{2}\,\bar{g}t^2 + \frac{1}{2}\,\bar{g}t^2\,\frac{R\,\omega^2\cos^2\varphi}{\bar{g}}\left(\frac{h}{R} + \frac{\bar{g}t^2}{4R}\right) + \cdots.
\end{aligned} \tag{19}$$

Die Formulierung ist so vorgenommen, daß die für die Abweichungen charakteristischen Verhältnisse von Zentrifugalkraft zu Schwere und h/R eingehen. (19) ist zu vergleichen mit

$$\begin{aligned} \xi &= \bar{g} \sin\varphi \cos\varphi \frac{\omega^2 t^4}{6} + \cdots \\ \eta &= \bar{g} \cos\varphi \frac{\omega t^3}{3} - \bar{g} \cos\varphi \frac{\omega^3 t^5}{15} + \cdots \\ \zeta &= h - \frac{1}{2} \bar{g} t^2 + \frac{1}{6} g t^4 \omega^2 \cos^2\varphi + \cdots \end{aligned} \tag{19a}$$

bei Sommerfeld a. a. O. Unterschiede sind natürlich nur in den Gliedern quadratischer Ordnung in ω vorhanden sowohl hinsichtlich der Zahlenfaktoren als auch der von der Ausgangshöhe des freien Falles abhängigen Terme, während das Hauptglied für η (Ostabweichung) unverändert bleibt. Das charakteristische Auftreten der Zentrifugalkorrektion $h\,\omega^2$ vermißt man bei der genäherten Integration; es ist aber gerade für die physikalische Begründung der Ostabweichung unentbehrlich.

Die vorliegende strenge Lösung könnte nur praktisches Interesse haben für Bewegungen im konstanten Schwerfeld von so langer Dauer, daß t einen nennenswerten Bruchteil eines Tages ausmacht (Raketen). Der Luftwiderstand erdrückt dann allerdings die rein gyroskopischen Effekte.

Die strenge Lösung der Wurfgleichungen kann man auch nach der obigen Methode lediglich bei verallgemeinerten Anfangsbedingungen ableiten. Wählt man die in dieser Hinsicht genügend allgemeinen Anfangsbedingungen $\xi = \eta = 0$, $\zeta = h$ für $t = 0$ und die zugehörige Anfangsgeschwindigkeit

$$\mathfrak{v}_0 = v_0 (\cos\alpha \cdot \mathfrak{e}_1 + \cos\beta \cdot \mathfrak{e}_2 + \cos\gamma \cdot \mathfrak{e}_3), \quad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

d. h. $\dot{\xi}(0) = v_0 \cos\alpha$ usw., dann ist es für die Kürze der Schreibweise noch ratsam, den Winkel δ zwischen dem Vektor $\mathfrak{v}_0$ und einem Vektor senkrecht zu $\mathfrak{d}$ in der $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_3$-Ebene, also

$$\sin\varphi \cdot \mathfrak{e}_1 + \cos\varphi \cdot \mathfrak{e}_3,$$

einzuführen. Es ist damit

$$\cos\delta = \cos\alpha \sin\varphi + \cos\gamma \cos\varphi.$$

Dann lautet die strenge Lösung der Wurfbewegung im konstanten Schwerefeld der rotierenden Erde

$$\begin{aligned}
\xi &= v_0 t \cos\alpha + v_0 t \sin\varphi\,(\cos\beta \sin\omega t - \cos\delta\,(1 - \cos\omega t)) + \\
&\quad + \frac{1}{2}\bar{g}\sin\varphi\cos\varphi\, t^2 + \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\omega^2)\,(1 - \cos\omega t \\
&\qquad - \omega t \sin\omega t) \\
\eta &= \frac{v_0\cos\delta}{\omega}(1 - \cos\omega t - \omega t\sin\omega t) + v_0 t\cos\beta\cos\omega t + \\
&\quad + \frac{\cos\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\omega^2)\,(\sin\omega t - \omega t\cdot\cos\omega t) \\
\zeta &= h + v_0 t\cos\gamma + v_0 t\cos\varphi\,(\cos\beta\sin\omega t - \cos\delta\,(1 - \cos\omega t)) \\
&\quad - \frac{1}{2}\bar{g}\sin^2\varphi\cdot t^2 + \frac{\cos^2\varphi}{\omega^2}(\bar{g} - h\omega^2)\,(1 - \cos\omega t \\
&\qquad - \omega t\cdot\sin\omega t)\,.
\end{aligned} \tag{20}$$

Daraus kann man auch die übrigen gewünschten Spezialfälle, z. B. die Westabweichung bei senkrecht aufwärts gerichtetem Wurf, entnehmen.