Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Abhängigkeit von Polynomen

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 12. Mai 1950

§ 1. Ziel der Arbeit

$k+1$ Polynome von k Variabeln sind stets voneinander abhängig. Wenn nun zwischen $k+1$ homogenen Polynomen

$$f_\nu(x_1, x_2, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k) \tag{1}$$

die Abhängigkeit

$$\sum C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0 \tag{2}$$

besteht, so ist, wenn f_ν den Grad m_ν hat, das Potenzprodukt

$$f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k}$$

in bezug auf die $x_1, \ldots, x_k$ homogen vom Grad

$$m_0 \lambda_0 + m_1 \lambda_1 + \ldots + m_k \lambda_k. \tag{3}$$

Daher ist klar, daß in (2) die Summe derjenigen Glieder, bei denen die Zahl in (3) einen festen Wert hat, für sich verschwinden muß. Mit andern Worten, es gibt auch eine Abhängigkeit (2), bei der in allen Gliedern der Ausdruck (3) einen festen Wert M hat, und man darf sich auf solche Abhängigkeiten beschränken. Wir nennen die Zahl M die Höhe der betreffenden Abhängigkeit und wollen darüber die folgenden drei Sätze beweisen:

Satz 1. Seien $k+1$ homogene Polynome

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k)$$

gegeben und sei m_ν der Grad von f_ν. Ist d der größte gemeinsame Teiler von $m_0, \ldots, m_k$ und setzt man

$$\frac{m_0 m_1 \ldots m_k}{d} = M, \tag{A}$$

so gibt es stets eine Abhängigkeit von der Höhe M.

Satz 2. Wenn in Satz 1 die Koeffizienten der f_ν Unbestimmte sind, so gibt es eine Abhängigkeit der Höhe M

$$\sum C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0, \tag{B}$$

deren Koeffizienten $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$ ganzzahlige Polynome[1] jener Unbestimmten sind. Nimmt man sie als teilerfremd an und setzt man noch

$$\frac{m_\nu}{d} = p_\nu, \qquad \frac{M}{m_\nu} = l_\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, k), \tag{C}$$

so enthält insbesondere $C_{l_0 0 0 \ldots 0}$ die Koeffizienten von f_0 nicht und ist, von einem nicht verschwindenden Zahlenfaktor abgesehen, gleich der p_0^{ten} Potenz der Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_k \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix}$$

und das Analoge gilt für die Koeffizienten $C_{0 l_1 0 \ldots 0}, \ldots, C_{0 0 \ldots 0 l_k}$.

Satz 3. Unter den Voraussetzungen von Satz 2 ist dann und nur dann

$$\sum D_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0,$$

wenn, unter $y_0, y_1, \ldots, y_k$ neue Unbestimmte verstanden, das Polynom

$$\sum D_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} y_0^{\lambda_0} y_1^{\lambda_1} \ldots y_k^{\lambda_k}$$

teilbar ist durch

$$\sum C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} y_0^{\lambda_0} y_1^{\lambda_1} \ldots y_k^{\lambda_k}.$$

Insbesondere gibt es also nur **eine** Abhängigkeit der Höhe M und keine von kleinerer Höhe.

Der Satz 1 ist eine einfache Folge von Satz 2. Wenn nämlich die Koeffizienten der f_ν irgendwie spezialisiert werden, so kann

[1] Das heißt mit ganzzahligen Koeffizienten.

es allerdings sein, daß die $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$ von Satz 2 sämtlich verschwinden, so daß man unmittelbar keine Abhängigkeit erhält. Man kann aber so schließen:

Wenn man zunächst bei unbestimmten Koeffizienten in der durch Satz 2 verbürgten Abhängigkeit auf der linken Seite alles in extenso ausrechnet und die Glieder mit gleichen Potenzprodukten der $x_1, \ldots, x_k$ zusammenfaßt, so sagt die Abhängigkeit aus, daß alle Koeffizienten verschwinden. Die Abhängigkeit ist daher gleichbedeutend damit, daß die $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$ einer Reihe linearer homogener Bedingungsgleichungen genügen, im allgemeinen viel mehr Gleichungen als Unbekannte. Da aber eine nichttriviale Lösung $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$ durch Satz 2 verbürgt ist, so ist der Rang der betreffenden Matrix kleiner als die Zahl der Unbekannten. Werden jetzt die Koeffizienten der f_ν irgendwie spezialisiert, so werden die Determinanten, deren Verschwinden den Rang festlegt, immer noch verschwinden, so daß der Rang gewiß nicht größer wird. Es ist also immer noch eine nichttriviale Lösung $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$ vorhanden.

Es genügt also, die Sätze 2 und 3 zu beweisen. Zur Illustrierung von Satz 2 schicken wir zunächst das Beispiel

$$k = 2,\quad m_\nu = 2,\quad \text{also } d = 2,\quad M = 4,\quad p_\nu = 1,\quad l_\nu = 2$$

voraus. Die drei Polynome seien

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 x^2 + a_1\, xy + a_2 y^2, \\ f_1 &= b_0 x^2 + b_1\, xy + b_2 y^2, \\ f_2 &= c_0 x^2 + c_1\, xy + c_2 y^2. \end{aligned}$$

Man findet die Abhängigkeit der Höhe 4 am schnellsten, indem man diese Gleichungen nach x^2, xy, y^2 auflöst. Wenn die Determinante mit Δ bezeichnet wird, findet man:

$$\Delta x^2 = \begin{vmatrix} f_0 & a_1 & a_2 \\ f_1 & b_1 & b_2 \\ f_2 & c_1 & c_2 \end{vmatrix},\quad \Delta xy = \begin{vmatrix} a_0 & f_0 & a_2 \\ b_0 & f_1 & b_2 \\ c_0 & f_2 & c_2 \end{vmatrix},\quad \Delta y^2 = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & f_0 \\ b_0 & b_1 & f_1 \\ c_0 & c_1 & f_2 \end{vmatrix}$$

und hieraus sofort

$$\begin{vmatrix} a_0 f_0 a_2 \\ b_0 f_1 b_2 \\ c_0 f_2 c_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} f_0 a_1 a_2 \\ f_1 b_1 b_2 \\ f_2 c_1 c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_0 a_1 f_0 \\ b_0 b_1 f_1 \\ c_0 c_1 f_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Das ist bereits die gewünschte Abhängigkeit der Höhe 4. Der Koeffizient C_{200} von f_0^2 ist

$$\begin{vmatrix} b_0 b_2 \\ c_0 c_2 \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_0 b_1 \\ c_0 c_1 \end{vmatrix}$$

und das ist in der Tat gleich

$$\begin{vmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & \\ & b_0 & b_1 & b_2 \\ c_0 & c_1 & c_2 & \\ & c_0 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} = R \begin{pmatrix} f_1, f_2 \\ x, y \end{pmatrix},$$

wie in Satz 2 behauptet.

§ 2. Ein Hilfssatz

Zum Beweis von Satz 2 benötigen wir den

Hilfssatz. Seien k homogene Polynome

$$f_\nu (x_1, \ldots, x_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

gegeben mit Unbestimmten $a_1, a_2, \ldots$ als Koeffizienten und sei f_ν vom Grad m_ν. Ist dann

$$F = \sum a_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_k^{\nu_k}$$

ein weiteres homogenes Polynom und ist n sein Grad, so läßt sich F auf genau eine Art in der Form

$$F = \sum A_{q_1 q_2 \ldots q_k}^{r_1 r_2 \ldots r_k} f_1^{q_1} f_2^{q_2} \ldots f_k^{q_k} x_1^{r_1} x_2^{r_2} \ldots x_k^{r_k}$$

darstellen, wenn verlangt wird, daß in jedem Glied

$$\left.\begin{aligned} &(m_1 q_1 + r_1) + (m_2 q_2 + r_2) + \ldots + (m_k q_k + r_k) = n, \\ &0 \leqq r_\nu < m_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k) \end{aligned}\right\} \quad \text{(D)}$$

ist. Die Koeffizienten $A^{r_1 r_2 \ldots r_k}_{q_1 q_2 \ldots q_k}$ sind dabei Brüche, deren gemeinsamer Nenner ein ganzzahliges Polynom der Unbestimmten $a_1, a_2, \ldots$ ist, während die Zähler ganzzahlige Polynome dieser selben Unbestimmten und außerdem der Koeffizienten von F sind, in bezug auf die letzteren homogen vom ersten Grad.

Zum Beweis bemerken wir, daß die Anzahl der Potenzprodukte in F (auch die etwaigen mit dem Koeffizienten o mitgezählt) so groß ist wie die Anzahl der Systeme ganzer nicht negativer Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$, für die

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_k = n$$

ist. Genau so groß ist aber die Anzahl der unbekannten Koeffizienten $A^{r_1 r_2 \ldots r_k}_{q_1 q_2 \ldots q_k}$. Denn man kann jedes solche System $\nu_1, \ldots, \nu_k$ eindeutig in die Form

$$\nu_1 = m_1 q_1 + r_1 \quad (0 \leqq r_1 < m_1),$$
$$\text{— — — — — — — — — —}$$
$$\nu_k = m_k q_k + r_k \quad (0 \leqq r_k < m_k)$$

setzen, wobei dann

$$(m_1 q_1 + r_1) + \ldots + (m_k q_k + r_k) = n$$

ist. Die Behauptung des Hilfssatzes verlangt also für die Unbekannten $A^{r_1 r_2 \ldots r_k}_{q_1 q_2 \ldots q_k}$ genau so viele lineare Bedingungsgleichungen, wie es Unbekannte sind. Die Koeffizienten dieser Bedingungsgleichungen sind ganzzahlige Polynome der Unbestimmten $a_1, a_2, \ldots$ und auf der anderen Seite stehen die Koeffizienten von F. Der Hilfssatz wird also bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß die Determinante von null verschieden ist. Zu dem Zweck spezialisieren wir f_ν zu $x_\nu^{m_\nu}$. Dann lautet die nachzuweisende Identität:

$$\sum a_{\nu_1 \ldots \nu_k} x_1^{\nu_1} \ldots x_k^{\nu_k} = \sum A^{r_1 \ldots r_k}_{q_1 \ldots q_k} x_1^{m_1 q_1 + r_1} \ldots x_k^{m_k q_k + r_k},$$

und die linearen Bedingungsgleichungen sind einfach diese:

$$A^{r_1 \ldots r_k}_{q_1 \ldots q_k} = a_{m_1 q_1 + r_1,\, m_2 q_2 + r_2,\, \ldots,\, m_k q_k + r_k}.$$

Sie sind bereits aufgelöst; die Determinante ist 1, so daß sie auch vor der Spezialisierung gewiß von Null verschieden war.

§ 3. Beweis eines Teiles von Satz 2

Wenn in dem Hilfssatz die Grade m_ν und n einen gemeinsamen Teiler d haben, so muß wegen der dortigen Forderung (D) auch $r_1 + \dots + r_k$ durch d teilbar sein; es kommen also nur Potenzprodukte $x_1^{r_1} \dots x_k^{r_k}$ vor, deren Grad durch d teilbar ist. Bezeichnet man nun mit

$$U_1, U_2, \dots, U_l$$

die sämtlichen Potenzprodukte, deren Grad $r_1 + \dots + r_k$ durch d teilbar ist und für die zugleich

$$0 \leqq r_1 < m_1, \dots, 0 \leqq r_k < m_k$$

ist, so gilt zunächst für deren Anzahl l die Formel

$$l = \frac{m_1 m_2 \dots m_k}{d}. \tag{4}$$

Denn man kann zunächst $r_2, \dots, r_k$ in dem angegebenen Spielraum ganz beliebig wählen, was $m_2 m_3 \dots m_k$ Möglichkeiten gibt, und dann hat man jedesmal für r_1, damit die Summe aller r_ν durch d teilbar ist, noch genau $\frac{m_1}{d}$ Zahlen zur Auswahl.

Unter den Voraussetzungen von Satz 1 und 2 zeigt ein Vergleich der dortigen Definitionsformeln (A) und (C) mit (4), daß $l = l_0$ ist. Sodann gelten nach dem Hilfssatz Beziehungen der Form

$$\begin{aligned} f_0 U_\lambda &= \sum B^{(\lambda,\mu)}_{q_1 \dots q_k} f_1^{q_1} \dots f_k^{q_k} U_\mu \\ &= \sum_{\mu=1}^{l_0} G_{\lambda\mu}(f_1, \dots f_k) \cdot U_\mu \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, l_0), \end{aligned} \tag{5}$$

da ja rechts keine Potenzprodukte vorkommen können, deren Grad nicht durch d teilbar ist. Die Nenner der $B^{(\lambda,\mu)}_{q_1 \dots q_k}$ sind dabei ganzzahlige Polynome der unbestimmten Koeffizienten von $f_1, \dots, f_k$ (nicht f_0), die Zähler sind ganzzahlige Polynome dieser selben Unbestimmten und außerdem auch der Koeffizienten von f_0, in letzteren speziell homogen vom ersten Grad. Eliminiert man die U_λ aus (5), so kommt

$$\begin{vmatrix} G_{11}-f_0 & G_{12} & \cdots\cdots & G_{1l} \\ G_{21} & G_{22}-f_0 & \cdots\cdots & G_{2l} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ G_{l1} & G_{l2} & \cdots\cdots & G_{ll}-f_0 \end{vmatrix} = 0 \quad (l = l_0). \tag{6}$$

Bezeichnet man den Grad von U_λ mit g_λ, so ist aus (5) ersichtlich, daß $G_{\lambda\mu}$ in bezug auf die $x_1, \ldots, x_k$ homogen vom Grad $m_0 + g_\lambda - g_\mu$ ist. Ein Glied der ausgerechneten Determinante (6) ist also in bezug auf die x_ν homogen vom Grad

$$N = (m_0 + g_1 - g_{\mu_1}) + (m_0 + g_2 - g_{\mu_2}) + \cdots + (m_0 + g_l - g_{\mu_l}),$$

wobei $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_l$ eine Permutation der Zahlen $1, 2, \ldots, l$ bedeutet. Also ist

$$N = l\, m_0 = l_0\, m_0 = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{d} \cdot m_0.$$

Das heißt, N ist gleich der in Satz 1 und 2 angegebenen Zahl M. Mit (6) ist daher eine Abhängigkeit der Höhe M gegeben. Die Nenner in den Koeffizienten lassen sich durch Multiplikation mit einem geeigneten ganzzahligen Polynom der Koeffizienten von $f_1, \ldots, f_k$ (ohne f_0) wegschaffen, worauf die Abhängigkeit die in Satz 2 angegebene Form (B) erhält. Die Koeffizienten sind dabei ganzzahlige Polynome der Koeffizienten von $f_0, \ldots, f_k$, wobei aber speziell $C_{l_0 0 \ldots 0}$, das ist der Koeffizient von $f_0^{l_0}$, die Koeffizienten von f_0 nicht enthält. Die weiteren in Satz 2 behaupteten Eigenschaften der $C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k}$ werden in § 5 bewiesen werden.

§ 4. Beweis von Satz 3

Wir betrachten das homogene Gleichungssystem mit den Unbekannten $x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}$:

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k) - v_\nu^{m_\nu} x_{k+1}^{m_\nu} = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k), \tag{7}$$

wo die $v_1, \ldots, v_k$ weitere Unbestimmte sind. Nach dem Bézoutschen Satz[2] hat es genau $m_1 m_2 \ldots m_k$ oder unendlich viele Lösungen. Bei keiner Lösung kann $x_{k+1} = 0$ sein, weil die f_ν Unbestimmte zu Koeffizienten haben, so daß das System $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ keine nichttriviale Lösung hat. Bei den Lösungen von (7) können wir also $x_{k+1} = 1$ setzen und haben dann das inhomogene System

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_k) - v_\nu^{m_\nu} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k). \tag{8}$$

Dieses hat nur endlich viele, und zwar lauter verschiedene Lösungen. Um das zu zeigen, betrachten wir die Resultante mit den weiteren Unbestimmten $c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}$:

$$R\begin{pmatrix} f_1 - v_1^{m_1}, & \ldots, & f_k - v_k^{m_k}, & c_1 x_1 + \ldots + c_k x_k + c_{k+1} \\ x_1 & ,\ldots, & x_k & , \quad 1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Bei der Spezialisierung $f_\nu = x_\nu^{m_\nu}$ hat das System (8) die $m_1 m_2 \ldots m_k$ Lösungen

$$x_1 = \varepsilon_1 v_1, \; x_2 = \varepsilon_2 v_2, \ldots, x_k = \varepsilon_k v_k,$$

wo ε_ν alle m_ν^{ten} Einheitswurzeln durchläuft, also nur endlich viele Lösungen, und zwar lauter verschiedene. Infolgedessen ist die Resultante (9) nach der Spezialisierung nicht Null, sie kann also auch vorher nicht Null gewesen sein. Daher gibt es auch vor der Spezialisierung nur endlich viele Lösungen und die Resultante zerfällt als Polynom von $c_1, \ldots, c_{k+1}$, abgesehen von einem konstanten Faktor, in die $m_1 m_2 \ldots m_k$ Linearfaktoren

$$\prod_\mu (\xi_{1\mu} c_1 + \cdots + \xi_{k\mu} c_k + c_{k+1}), \tag{10}$$

wo die $\xi_{1\mu}, \ldots, \xi_{k\mu}$ gerade die $m_1 m_2 \ldots m_k$ Lösungen des Systems (8) sind. Nach der Spezialisierung sind das lauter verschiedene Linearfaktoren, so daß die Diskriminante der Resultante (9) in bezug auf c_{k+1} von 0 verschieden ist. Sie muß also vor der Spezialisierung erst recht von 0 verschieden sein. Die Linearfaktoren in (10) sind daher alle verschieden, das heißt, die $m_1 m_2 \ldots m_k$ Lösungen des Systems (8) sind alle voneinander verschieden.

---

[2] Den Bézoutschen Satz und die anschließend zu benutzenden bekannten Tatsachen über die Resultante (9) findet man z. B. in meinem Buch: Algebra Band I, zweite Auflage 1932 oder dritte Auflage 1950, Seite 292 und 290.

Wir fragen jetzt, wieviel verschiedene Werte das Polynom

$$f_0(x_1, \ldots, x_k) = \sum b_{\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_k} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \ldots x_k^{\nu_k}$$

annimmt, wenn man für $x_1, \ldots, x_k$ die verschiedenen Lösungen des Systems (8) einsetzt. Nun sind die Koeffizienten von f_0 als Unbestimmte vorausgesetzt und f_0 hat insbesondere das Glied

$$b_{m_0 0 \ldots 0} x_1^{m_0}.$$

Wenn also für zwei Lösungen $\xi_1, \ldots, \xi_k$ und $\eta_1, \ldots, \eta_k$ des Systems (8)

$$f_0(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f_0(\eta_1, \ldots, \eta_k)$$

sein soll, so muß, weil die Koeffizienten Unbestimmte sind, insbesondere $\xi_1^{m_0} = \eta_1^{m_0}$ sein, also $\eta_1 = \delta_1 \xi_1$, wo δ_1 eine m_0^{te} Einheitswurzel ist. Analog ergibt sich, daß auch $\eta_2 = \delta_2 \xi_2$ sein muß, wo δ_2 ebenfalls eine m_0^{te} Einheitswurzel ist. Wegen des Gliedes

$$b_{m_0-1,\, 1,\, 0 \ldots 0} x_1^{m_0-1} x_2$$

in f_0 muß aber auch

$$\xi_1^{m_0-1} \xi_2 = \eta_1^{m_0-1} \eta_2, \quad \text{also} \quad \delta_1^{m_0-1} \delta_2 = 1$$

und folglich $\delta_2 = \delta_1$ sein.[3] Allgemein sieht man so, daß

$$\eta_\nu = \delta \xi_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

sein muß, wo δ eine m_0^{te} Einheitswurzel ist. Dann ist aber

$$\begin{aligned} v_\nu^{m_\nu} &= f_\nu(\eta_1, \ldots, \eta_k) = f_\nu(\delta \xi_1, \ldots, \delta \xi_k) \\ &= \delta^{m_\nu} f_\nu(\xi_1, \ldots, \xi_\nu) = \delta^{m_\nu} v_\nu^{m_\nu}, \end{aligned}$$

[3] Dieser Schluß wäre nur dann hinfällig, wenn ξ_1 oder ξ_2 gleich o wäre. Aber das System (8) hat keine Lösung mit $x_1 = 0$ (oder $x_2 = 0$). Denn sonst wäre die Resultante (9), wie sich aus ihrer Faktorzerlegung (10) ergibt, in bezug auf c_1 (oder c_2) von kleinerem als dem $(m_1 m_2 \ldots m_k)^{\text{ten}}$ Grad. Das müßte dann auch bei jeder Spezialisierung so bleiben. Aber für $f_\nu = x_\nu^{m_\nu}$ sind ja die Lösungen von (8) oben angegeben und das Produkt (10) wird dann

$$\Pi(\varepsilon_1 v_1 c_1 + \cdots + \varepsilon_k v_k c_k + c_{k+1}),$$

wo ε_1 alle m_1^{ten} Einheitswurzeln durchläuft, ε_2 alle m_2^{ten}usw. In bezug auf c_1 (oder c_2) ist es also vom Grad $m_1 m_2 \ldots m_k$, nicht von geringerem.

und folglich muß δ zugleich eine m_ν^{te} Einheitswurzel sein. Da der größte gemeinsame Teiler von $m_0, m_1, \ldots, m_k$ gleich d ist, muß also δ schließlich eine d^{te} Einheitswurzel sein. Diese notwendige Bedingung ist aber auch hinreichend. Denn mit $\xi_1, \ldots, \xi_k$ ist ja offenbar stets auch $\delta\xi_1, \ldots, \delta\xi_k$, wenn δ eine d^{te} Einheitswurzel ist, eine Lösung von (8), und für diese nimmt auch f_0 denselben Wert an. Somit nimmt f_0, wenn man darin für $x_1, \ldots, x_k$ der Reihe nach alle $m_1 m_2 \ldots m_k$ verschiedenen Lösungen des Systems (8) einsetzt, genau

$$\frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{d} = \frac{M}{m_0} = l_0$$

verschiedene Werte an.

Jede Abhängigkeit

$$\sum D_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k} f_0^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0 \tag{11}$$

muß daher, wenn man darin

$$f_1 = v_1^{m_1}, \ldots, f_k = v_k^{m_k}$$

setzt, für f_0 noch l_0 verschiedene Werte liefern, muß also in f_0 mindestens vom Grad l_0 sein. Wenn man also die beiden Polynome von neuen Variabeln $y_0, y_1, \ldots, y_k$

$$\Phi = \sum C_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k} y_0^{\lambda_0} y_1^{\lambda_1} \ldots y_k^{\lambda_k},$$

$$\Psi = \sum D_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k} y_0^{\lambda_0} y_1^{\lambda_1} \ldots y_k^{\lambda_k}$$

betrachtet, deren Koeffizienten die aus Satz 2 bzw. Formel (11) sind, so muß Ψ in bezug auf y_0 mindestens vom Grad l_0 sein. Wenn man nun Ψ als Polynom von y_0 durch Φ dividiert und bedenkt, daß in Φ die höchste Potenz $y_0^{l_0}$ mit keinem anderen y_ν multipliziert auftritt, erkennt man, daß Quotient und Rest Polynome von $y_0, y_1, \ldots, y_k$ sind. Man erhält daher eine Identität

$$\Psi = \Omega\,\Phi + \mathrm{P},$$

wo dann das Restpolynom $\mathrm{P} = \mathrm{P}(y_0, y_1, \ldots, y_k)$ in bezug auf y_0 von kleinerem als dem l_0^{ten} Grad ist. Zugleich ist aber

$$\mathrm{P}(f_0, f_1, \ldots, f_k) = 0,$$

und da es eine Abhängigkeit, die in f_0 von kleinerem als dem l_0^{ten} Grad ist, nicht gibt, muß P identisch verschwinden. Daher ist $\Psi = \Omega\,\Phi$, womit der Satz 3 bewiesen ist.

Bemerkung. Der Beweis läßt gleichzeitig noch etwas mehr erkennen, was uns später von Nutzen sein wird, nämlich:

Auch wenn in den Polynomen $f_1, \ldots, f_k$ die Koeffizienten teilweise spezialisiert sind, aber so, daß dadurch die weitergehende Spezialisierung $f_\nu = x_\nu^{m_\nu}$ nicht unmöglich gemacht wird, kann es, sofern nur die Koeffizienten von f_0 Unbestimmte bleiben, keine Abhängigkeit geben, die in f_0 von kleinerem als dem l_0^{ten} Grad ist, also keine Abhängigkeit von geringerer Höhe als M, und von der Höhe M nur die eine bereits nachgewiesene. Man kann in diesem Fall nämlich immer noch mit Hilfe der weitergehenden Spezialisierung den Beweis wörtlich wie oben durchführen.

§ 5. Beweis des restlichen Teiles von Satz 2

In der nachgewiesenen Abhängigkeit der Höhe M denken wir uns jetzt die Koeffizienten $C_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k}$, die Polynome der Koeffizienten der f_ν sind, ohne gemeinsamen Teiler. Speziell $C_{l_0 0\ldots 0}$ enthält die Koeffizienten von f_0 nicht. Die Sonderstellung, die wir in § 3 dem Polynom f_0 eingeräumt haben, können wir ebensogut jedem anderen f_ν einräumen und wieder eine Abhängigkeit der Höhe M nachweisen. Nach Satz 3 muß das jedesmal dieselbe Abhängigkeit geben, woraus wir schließen, daß $C_{0 l_1 0\ldots 0}$ die Koeffizienten von f_1 nicht enthält usw., schließlich daß $C_{0 0\ldots 0 l_k}$ die Koeffizienten von f_k nicht enthält.

Wenn wir jetzt die Koeffizienten von $f_1, \ldots, f_k$ irgendwie so spezialisieren, daß die Resultante

$$R\begin{pmatrix} f_1, f_2, \ldots, f_k \\ x_1, x_2, \ldots, x_k \end{pmatrix} \tag{12}$$

verschwindet, so hat das System $f_1 = 0, \ldots, f_k = 0$ eine nicht triviale Lösung $\xi_1, \ldots, \xi_k$, und für diese ist $f_0(\xi_1, \ldots, \xi_k) \neq 0$, da ja f_0 Unbestimmte zu Koeffizienten hat. Aus der Gleichung (B) in Satz 2 folgt dann, indem man speziell $x_\nu = \xi_\nu$ einsetzt:

$$C_{l_0 0\ldots 0}\, f_0(\xi_1, \ldots, \xi_k)^{l_0} = 0$$

und folglich $C_{l_0 0 \ldots 0} = 0$. Mit der Resultante (12) verschwindet also stets auch $C_{l_0 0 \ldots 0}$, und da die Resultante bekanntlich irreduzibel ist, muß $C_{l_0 0 \ldots 0}$ durch sie teilbar sein.

Um $C_{l_0 0 \ldots 0}$ noch genauer zu bestimmen, wollen wir f_0 spezialisieren zu

$$f_0 = \varphi^{p_0},$$

wo dann φ vom Grad $\frac{m_0}{p_0} = d$ ist und Unbestimmte als Koeffizienten haben möge. Dadurch wird der Koeffizient $C_{l_0 0 \ldots 0}$ gar nicht beeinflußt, weil er ja von den Koeffizienten von f_0 nicht abhängt. Aus der Bemerkung am Schluß des § 4, wobei nur f_0 und f_1 ihre Rollen tauschen müssen, folgt, daß immer noch keine Abhängigkeit existiert, die f_1 in geringerer als der l_1^{ten} Potenz enthält. Daraus folgt dann weiter, daß es außer der durch den bewiesenen Teil von Satz 2 verbürgten Abhängigkeit immer noch keine zweite von der gleichen Höhe M gibt. Wenn wir also auf irgendeine Art eine Abhängigkeit der Höhe M zwischen φ^{p_0}, $f_1, \ldots, f_k$ finden können, bei der dieKoeffizienten, die Polynome der Koeffizienten von $\varphi, f_1, \ldots, f_k$ sind, keinen gemeinsamen Teiler haben und bei der speziell der Koeffizient von $f_0^{l_0} = (\varphi^{p_0})^{l_0}$ gleich der p_0^{ten} Potenz der Resultante (12) ist, wird der Rest von Satz 2 bewiesen sein.

Nun besteht nach dem bewiesenen Teil von Satz 2 zwischen $\varphi, f_1, \ldots, f_k$ eine Abhängigkeit

$$\sum C'_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k} \varphi^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0 \tag{13}$$

von der Höhe

$$d\lambda_0 + m_1 \lambda_1 + \cdots + m_k \lambda_k = \frac{d m_1 \ldots m_k}{d} = m_1 m_2 \ldots m_k.$$

In (13) treten links die beiden Glieder

$$C'_{r 0 \ldots 0} \varphi^r, \quad C'_{0 s 0 \ldots 0} f_1^s \tag{14}$$

auf, wobei

$$r = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{d} = \frac{M}{m_0} = l_0, \quad s = \frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{m_1} = m_2 \ldots m_k \tag{15}$$

ist. $C'_{r 0 \ldots 0}$ und $C'_{0 s 0 \ldots 0}$ sind gewiß von 0 verschieden, weil ja die Abhängigkeit in φ vom Grad r und entsprechend in f_1 vom

Grad s sein muß. $C'_{r0\ldots0}$ ist nach dem oben Bewiesenen teilbar durch die Resultante (12). Ferner enthält $C'_{r0\ldots0}$ die Koeffizienten von φ nicht und entsprechend enthält $C'_{0s0\ldots0}$ die Koeffizienten von f_1 nicht. In bezug auf letztere ist daher das zweite der Glieder (14) homogen vom Grad s. Dasselbe muß dann von allen Gliedern in (13), also speziell auch vom ersten der beiden Glieder (14) gelten, weil ja (13) eine Identität in allen Unbestimmten ist und nicht schon eine Teilsumme von (13) verschwinden kann, was ja eine zweite Abhängigkeit der Höhe M bedeuten würde. Somit ist der Koeffizient $C'_{r0\ldots0}$ in bezug auf die Koeffizienten von f_1 homogen vom Grad s, das heißt vom Grad

$$\frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{m_1},$$

und analog ergibt sich, daß er auch in bezug auf die Koeffizienten von f_ν homogen vom Grad

$$\frac{m_1 m_2 \ldots m_k}{m_\nu}$$

ist. Von denselben Graden ist aber bekanntlich auch die Resultante (12), so daß $C'_{r0\ldots0}$ nicht nur durch diese Resultante teilbar, sondern bis auf einen Zahlenfaktor ihr gleich ist.

Aus (13) folgt unmittelbar

$$\prod_{\varepsilon} \sum C'_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} (\varepsilon\varphi)^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0, \tag{16}$$

wobei das Produkt über alle p_0^{ten} Einheitswurzeln ε erstreckt werden soll; denn der Faktor für $\varepsilon = 1$ ist ja nach (13) gleich 0. In dem ausmultiplizierten Produkt (16) kommen aber nur Potenzen von φ vor, deren Exponent durch p_0 teilbar ist. Infolgedessen hat (16) die Gestalt

$$\sum C''_{\lambda_0\lambda_1\ldots\lambda_k} (\varphi^{p_0})^{\lambda_0} f_1^{\lambda_1} \ldots f_k^{\lambda_k} = 0, \tag{17}$$

wobei

$$m_0\lambda_0 + m_1\lambda_1 + \ldots + m_k\lambda_k = p_0 \cdot m_1 m_2 \ldots m_k = M$$

und wobei außerdem $C''_{l_0 0\ldots0}$ gleich der p_0^{ten} Potenz von $C'_{r0\ldots0}$ ist, also bis auf einen Zahlenfaktor gleich der p_0^{ten} Potenz der Resultante (12). Mit (17) ist sonach eine Abhängigkeit der Höhe

M zwischen $\varphi^{p_0}, f_1, \ldots, f_k$ gefunden, bei der $C''_{l_0 0 \ldots 0}$ die $p_0{}^{\text{te}}$ Potenz der Resultante (12) ist. Wenn wir noch zeigen können, daß die Koeffizienten $C''_{\lambda_0 \lambda_1 \ldots \lambda_k}$ ohne gemeinsamen Teiler sind, ist das Gewünschte erreicht. Nun ist aber in (17) das Glied $C''_{0 l_1 0 \ldots 0}$ nach der Entstehungsweise aus (16) einfach die $p_0{}^{\text{te}}$ Potenz des Gliedes $C'_{0 s 0 \ldots 0}$ in (13). Also ist $C''_{0 l_1 0 \ldots 0}$, das heißt der Koeffizient von $f_1^{l_1}$, von 0 verschieden und enthält die Koeffizienten von f_1 nicht. Ebenso ist der Koeffizient von $f_\nu^{l_\nu}$ von 0 verschieden und enthält die Koeffizienten von f_ν nicht. Daher können

$$C''_{l_0 0 0 \ldots 0}, \quad C''_{0 l_1 0 \ldots 0}, \ldots, \quad C''_{0 0 \ldots 0 l_k}$$

keinen gemeinsamen Teiler haben, weil ein solcher weder die Koeffizienten von φ noch die von $f_1, \ldots$ noch die von f_k enthalten könnte. Mit der Abhängigkeit (17) ist also das Gewünschte erreicht.