Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1950

München 1951
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes

Von Georg Nöbeling in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 3. November 1950

Durch neuere französische Arbeiten[1] hat sich eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes herauskristallisiert, die uns von großem Interesse zu sein scheint und die wir daher hier entwickeln wollen.

Eine Folge ist eine Funktion, deren Definitionsbereich die (geordnete) Menge der natürlichen Zahlen ist. Zwei bekannte Verallgemeinerungen sind erstens der Begriff der transfiniten Folge, d. h. einer Funktion, deren Definitionsbereich ein (wohlgeordneter) Abschnitt der Ordinalzahlen ist, und zweitens der Begriff der Moore-Smithschen Folge, d. h. einer Funktion, deren Definitionsbereich eine gerichtete Menge[2] ist. Diese beiden Verallgemeinerungen haben den Mangel, daß für sie das Prinzip der Diagonalfolgen nicht gilt (siehe unten S. 139). Eine Verallgemeinerung, die sie beide umfaßt und diesen Mangel nicht hat, ist der Begriff der gerasterten Funktion, den wir nun definieren wollen.

Es sei D eine nicht leere Menge irgendwelcher Dinge. Ein nicht leeres System $\mathfrak{R}$ von Teilmengen M von D heiße ein R a s t e r[3] in D, wenn es folgende zwei Eigenschaften hat:

(1) Keine Menge M aus $\mathfrak{R}$ ist leer;

---

[1] H. Cartan, C. R. 205 (1937) S. 595 und 777; N. Bourbaki, Topologie générale, Act. Sc. et ind. 848, Paris 1940; G. Choquet, Convergences, Ann. Univ. Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. II. s. 23 (1948) S. 37–112.

[2] Eine Menge D heißt gerichtet, wenn für gewisse geordnete Paare (x, y) von Elementen aus D eine Relation $x \leqq y$ mit folgenden zwei Eigenschaften definiert ist: Aus $x \leqq y$, $y \leqq z$ folgt $x \leqq z$; zu $x \in D$, $y \in D$ existiert ein $z \in D$ mit $x \leqq z$ und $y \leqq z$.

[3] In der französischen Literatur wird ein Raster eine „base de filtre" genannt. Bei O. Haupt-G. Aumann-Chr. Pauc, Differential- und Integralrechnung, I. Bd., 2. Aufl., Berlin 1948, S. 168 ff. wird ein Raster als U_2-System bezeichnet; die große Bedeutung dieses Begriffes für die Häufungstheorie wird dort klar herausgearbeitet, indem von einem Umgebungssystem eines Punktes nur verlangt wird, daß es ein U_2-System ist.

(2) sind M_1 und M_2 zwei Mengen aus $\mathfrak{R}$, so existiert in $\mathfrak{R}$ eine Menge M mit $M \subseteqq M_1$ und $M \subseteqq M_2$.

Ein Raster in D heißt ein Filter in D, wenn es folgende Eigenschaft hat:

(3) Ist M eine Menge aus $\mathfrak{R}$ und N eine Teilmenge von D mit $M \subseteqq N$, so ist auch N eine Menge aus $\mathfrak{R}$.

Ist $\mathfrak{R}$ ein beliebiger Raster in D und $\mathfrak{F}$ das System aller Teilmengen von D, deren jede mindestens eine Menge aus $\mathfrak{R}$ als Teilmenge enthält, so ist $\mathfrak{F}$ ein Filter; $\mathfrak{F}$ heißt der durch $\mathfrak{R}$ in D erzeugte Filter und $\mathfrak{R}$ eine Basis von $\mathfrak{F}$. Jeder Filter ist mit dem von ihm erzeugten Filter identisch.

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ zwei Raster in D, so heiße $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$, wenn zu jeder Menge M aus $\mathfrak{R}$ eine Menge M' aus $\mathfrak{R}'$ existiert mit $M' \subseteqq M$. Sind $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ die von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ in D erzeugten Filter, so ist $\mathfrak{R}'$ dann und nur dann mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$, wenn $\mathfrak{F}'$ mindestens so fein ist wie $\mathfrak{F}$. Letzteres ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{F}'$ ein Oberfilter von $\mathfrak{F}$, d. h. $\mathfrak{F}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{F}'$ ist. Ist der Raster $\mathfrak{R}'$ ein Oberraster von $\mathfrak{R}$, d. h. $\mathfrak{R}$ ein Teilsystem von $\mathfrak{R}'$, so ist $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$ (die Umkehrung hiervon gilt nicht). – Zwei Raster $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ heißen äquivalent, wenn sie dasselbe Filter in D erzeugen; dies ist dann und nur dann der Fall, wenn $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}'$. Zwei Filter sind dann und nur dann äquivalent, wenn sie identisch sind. Das System aller Raster in D zerfällt in Klassen äquivalenter Raster; jede Klasse besteht aus einem Filter $\mathfrak{F}$ und allen $\mathfrak{F}$ erzeugenden Rastern. – Ist der Raster $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein wie der Raster $\mathfrak{R}$, aber nicht $\mathfrak{R}'$ äquivalent zu $\mathfrak{R}$, so heißt $\mathfrak{R}'$ feiner als $\mathfrak{R}$.

Beispiele. 1. Ist M_0 eine feste Teilmenge von D, $\mathfrak{R}$ das aus dieser Menge M_0 bestehende Mengensystem und $\mathfrak{F}$ das System aller Teilmengen M von D mit $M_0 \subseteqq M$, so ist $\mathfrak{R}$ ein Raster und $\mathfrak{F}$ das von $\mathfrak{R}$ erzeugte Filter. – 2. Es sei D die Menge aller natürlichen Zahlen; für jedes $x \in D$ sei $M(x)$ die Menge aller Zahlen $y \in D$ mit $x \leqq y$; das System $\mathfrak{R}$ aller dieser Mengen $M(x)$ ist ein Raster in D. Bezeichnen wir für jedes $x \in D$ mit $M'(x)$ die Menge aller geraden Zahlen $y \in D$ mit $x \leqq y$, so ist das System $\mathfrak{R}'$ aller dieser Mengen $M'(x)$ ebenfalls ein Raster;

der Raster $\mathfrak{R}$ ist feiner als der Raster $\mathfrak{R}'$. – 3. Es sei D eine gerichtete Menge; für jedes $x \in D$ sei $M(x)$ die Menge aller $y \in D$ mit $x \leqq y$; das System aller dieser Mengen $M(x)$ ist ein Raster in D. – 4. Es sei D ein Umgebungsraum, in welchem die Umgebungsaxiome (A), (B) und (C) von Hausdorff erfüllt sind, und x ein Punkt aus D. Das System aller Umgebungen U_x von x ist ein Raster. Ebenso ist das System aller x enthaltenden offenen Mengen ein Raster. Diese beiden Raster sind äquivalent. Das von ihnen erzeugte Filter ist das System aller Nachbarschaften von x, d. h. aller Punktmengen, deren offener Kern den Punkt x enthält.

Nun sei $f|D$ eine Funktion, in deren (nicht leerem) Definitionsbereich D ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben ist (im übrigen kann die Menge D ganz beliebig sein). Dann nennen wir die Funktion gerastert; ist $\mathfrak{R}$ speziell ein Filter in D, so nennen wir die Funktion gefiltert. Dieser Begriff einer gerasterten Funktion ist, wie sich herausstellen wird, eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes. Wir wollen ihn näher untersuchen.

I. In der Theorie der Folgen spielt der Begriff „schließlich alle" (= „fast alle") eine entscheidende Rolle. Er ist definiert in der Menge D_0 aller natürlichen Zahlen. Die wichtigsten formalen Eigenschaften dieses Begriffes sind die folgenden (man ersetze D durch D_0)[1]:

(1*) Enthält eine Menge $E \subseteqq D$ schließlich alle $x \in D$, so enthält E mindestens ein $x \in D$;

(2*) sind $E_1 \subseteqq D$ und $E_2 \subseteqq D$ zwei Mengen, deren jede schließlich alle $x \in D$ enthält, so enthält der Durchschnitt E_1E_2 ebenfalls schließlich alle $x \in D$.

Jetzt sei D eine (nicht leere) Menge irgendwelcher Dinge und $\mathfrak{R}$ ein Raster in D. Dann sagen wir, eine Menge $E \subseteqq D$ enthalte schließlich alle $x \in D$, wenn eine Menge M des Rasters $\mathfrak{R}$ existiert derart, daß $M \subseteqq E$ ist (wenn m. a. W. E eine Menge des von $\mathfrak{R}$ erzeugten Filters ist). Wollen wir das Raster $\mathfrak{R}$ beson-

[1] Ist $a_1, a_2, \ldots$ eine Folge und $\alpha(a_x)$ eine Aussage über die a_x, so kann man statt „für schließlich alle a_x ist die Aussage $\alpha(a_x)$ richtig" auch sagen „die Menge E aller $x \in D$, für welche $\alpha(a_x)$ richtig ist, enthält schließlich alle x".

ders hervorheben, so sagen wir „$\mathfrak{R}$ — schließlich alle“ statt „schließlich alle“.

Aus den Eigenschaften (1) und (2) des Rasters $\mathfrak{R}$ folgt unmittelbar, daß der soeben definierte Begriff „schließlich alle“ die Eigenschaften (1*) und (2*) hat.

Wählen wir D und $\mathfrak{R}$ wie im obigen Beispiel 2, so geht der Begriff der gerasterten Funktion über in den Begriff einer Folge und der Begriff „schließlich alle“ hat die übliche Bedeutung. In diesem Sinne ist also der Begriff der gerasterten Funktion eine Verallgemeinerung des Folgenbegriffes. Wählt man D und $\mathfrak{R}$ wie im Beispiel 3, so ergibt sich analog, daß der Begriff der gerasterten Funktion eine Verallgemeinerung des Begriffes einer Moore-Smithschen Folge, insbesondere also einer transfiniten Folge ist.

Wir untersuchen noch den Begriff „schließlich alle“ für zwei verschiedene Raster.

Zunächst sei $\mathfrak{R}$ ein Raster in D und $\mathfrak{F}$ der durch $\mathfrak{R}$ in D erzeugte Filter. Dann sind die beiden folgenden Aussagen für jede Menge $E \subseteq D$ gleichwertig:

Die Menge $E \subseteq D$ enthält $\mathfrak{R}$ — schließlich alle $x \in D$;

die Menge $E \subseteq D$ enthält $\mathfrak{F}$ — schließlich alle $x \in D$.

Hinsichtlich des Begriffes „schließlich alle“ (und jede darauf fußende Theorie) kommt es also auf dasselbe hinaus, ob man statt Rastern nur Filter zuläßt.

Nun seien in D zwei Raster $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ gegeben. Wir vergleichen die beiden folgenden Aussagen miteinander:

(4) Die Menge $E \subseteq D$ enthält $\mathfrak{R}$ — schließlich alle $x \in D$;

(5) die Menge $E \subseteq D$ enthält $\mathfrak{R}'$ — schließlich alle $x \in D$.

Ist $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$, so folgt (5) aus (4).

Weiter fragen wir: Was ist notwendig und hinreichend dafür, daß (4) und (5) gleichwertig sind (und zwar für jede Menge $E \subseteq D$)? Wir behaupten: Die Äquivalenz von $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$. Es sei nämlich $\mathfrak{F}$ das durch $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{F}'$ das durch $\mathfrak{R}'$ in D erzeugte Filter. Nun ist (4) gleichbedeutend mit: „E ist eine Menge von $\mathfrak{F}$“ und (5) ist gleichbedeutend mit „E ist eine Menge von $\mathfrak{F}'$“. Ist $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}'$, so ist also (4) mit (5) gleichwertig, die genannte Bedingung also hinreichend. Sie ist aber auch notwendig. Es sei nämlich M eine beliebige Menge des Rasters $\mathfrak{R}$ und $E = M$. Dann ist (4) richtig. Folgt nun (5) aus (4), so ist auch (5) richtig. Dies heißt aber: Es existiert eine Menge M' des Rasters $\mathfrak{R}'$ mit $M' \subseteqq M$, d. h. $\mathfrak{R}'$ ist mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$. Analog ergibt sich umgekehrt, daß, wenn (4) aus (5) folgt, $\mathfrak{R}$ mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}'$. Sind also (4) und (5) gleichwertig, so sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ äquivalent.

II. Der Begriff „unendlich viele", wofür wir, weil für uns besser passend, „konfinal viele" sagen wollen, kann bekanntlich mit Hilfe des Begriffes „schließlich alle" folgendermaßen definiert werden, wenn wir unter D vorübergehend die Menge D_0 der natürlichen Zahlen verstehen: Die Aussage

(6) Die Menge $E \subseteqq D$ enthält konfinal viele $x \in D$

bedeutet dasselbe wie die Aussage

(7) die Menge $D - E$ enthält nicht schließlich alle $x \in D$.

Wir definieren nun allgemein: Ist D eine (nicht leere) Menge irgendwelcher Dinge, in welcher ein Raster $\mathfrak{R}$ gegeben ist, und E eine Teilmenge von D, so bedeute (6) dasselbe wie (7). Hiermit ist gleichbedeutend die folgende direkte Definition: (6) soll bedeuten, daß der Durchschnitt EM für keine Menge M aus $\mathfrak{R}$ leer ist. Auch hier sagen wir „$\mathfrak{R}$ — konfinal viele", wenn wir das Raster $\mathfrak{R}$ besonders hervorheben wollen.

Aus dem oben über den Begriff „schließlich alle" Gesagten ergeben sich die folgenden Bemerkungen.

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ zwei Raster in D und ist $\mathfrak{R}'$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$, so folgt aus der Aussage

(8) die Menge $E \subseteqq D$ enthält $\mathfrak{R}'$ — konfinal viele $x \in D$

die Aussage

(9) die Menge $E \subseteqq D$ enthält $\mathfrak{R}$ — konfinal viele $x \in D$.

Sind $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}'$ äquivalent, so sind (8) und (9) für jede Menge $E \subseteqq D$ gleichbedeutend. Dies gilt insbesondere dann, wenn $\mathfrak{R}'$ der durch $\mathfrak{R}$ in D erzeugte Filter ist.

Schließlich ist (9) gleichbedeutend mit der folgenden Aussage:

(10) Es existiert ein Raster $\mathfrak{R}'$ in D, das mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}$, derart daß $\mathfrak{R}'$ — schließlich alle $x \in D$ in E enthalten sind.

Es gelte nämlich (9). Dann ist der Durchschnitt EM für keine Menge M von $\mathfrak{R}$ leer. Es sei nun $\mathfrak{R}'$ das System aller Mengen M von $\mathfrak{R}$ und aller Durchschnitte EM von E mit den Mengen M aus $\mathfrak{R}$. Dann ist $\mathfrak{R}'$ ein Oberraster von $\mathfrak{R}$ und E enthält $\mathfrak{R}'$ — schließlich alle $x \in D$. Es gilt also (10). Nun gelte umgekehrt (10). Dann ist E eine Menge des von $\mathfrak{R}'$ erzeugten Filters $\mathfrak{F}'$. Ist nun M eine beliebige Menge des von $\mathfrak{R}$ erzeugten Filters $\mathfrak{F}$, so ist, weil dann M auch eine Menge des Filters $\mathfrak{F}'$ ist nach (1) und (2) der Durchschnitt EM nicht leer. Also gilt (9).

Insbesondere gilt also:

(11) Sind $\mathfrak{R}$ — schließlich alle $x \in D$ in der Menge $E \subseteqq D$ enthalten, so sind auch $\mathfrak{R}$ — konfinal viele $x \in D$ in E enthalten.

III. Nun wollen wir auch noch den Begriff einer Teilfolge einer Folge auf gerasterte Funktionen ausdehnen.

Zwei wesentliche Eigenschaften der Teilfolgen sind diese (wobei D_0 die Menge der natürlichen Zahlen ist):

(a) Ist $f|D_0'$ eine Teilfolge einer Folge $f|D_0$, so ist D_0' eine Teilmenge von D_0, welche konfinale viele $x \in D_0$ enthält;

(b) zu einer Folge von Folgen, von denen jede die folgende als Teilfolge umfaßt, existiert eine Folge, deren Elemente in jeder dieser Folgen schließlich alle enthalten sind (Diagonalfolge).

Wir stellen daher an eine Verallgemeinerung des Begriffes einer Teilfolge auf gerasterte Funktionen die Bedingung, daß sie die beiden Eigenschaften (a) und (b) sinngemäß besitzt.

Es sei also $f|D$ eine beliebige gerasterte Funktion; der Raster in D heiße wieder $\mathfrak{R}$. Es liegt nahe, den Begriff einer konfinalen Teilfunktion einzuführen: Es sei D' eine Teilmenge von D, welche k o n f i n a l ist zu D, d. h. konfinal viele $x \in D$ enthält). Das System $\mathfrak{R}_{D'}$, der Durchschnitte $D'M$, wobei M alle Mengen aus $\mathfrak{R}$ durchläuft, ist ein Raster in D'; die mittels dieses Rasters $\mathfrak{R}_{D'}$ gerasterte Funktion $f|D'$ nennen wir eine k o n f i n a l e T e i l f u n k t i o n der gerasterten Funktion $f|D$.

Dieser Begriff ist aber als Verallgemeinerung des Begriffes einer Teilfolge einer Folge unbefriedigend. Denn für ihn gilt (b), sinngemäß umformuliert, nicht. Dies zeigt das folgende Beispiel. Es sei C die Menge der Ordinalzahlen der ersten und zweiten Cantorschen Zahlenklasse und $f|C$ eine beliebige Funktion mit dem Definitionsbereich C. Diese Funktion werde folgendermaßen gerastert (vgl. die Beispiele 1–3 auf S. 134): Für jedes $x \in C$ sei $M(x)$ die Menge aller $y \in C$ mit $x \leqq y$ und $\mathfrak{R}$ der aus allen Mengen $M(x)$ bestehende Raster. Wir definieren nun folgendermaßen konfinale Teilfunktionen von $f|C$. Jede Zahl $x \in C$ kann auf genau eine Art in der Form $\lambda + n$ geschrieben werden, wobei $\lambda = 0$ oder eine Limeszahl und n eine natürliche Zahl $\geqq 0$ ist. Für jedes natürliche $m \geqq 0$ sei C^m die Menge aller Zahlen $\lambda + n$ aus C mit $n \geqq m$. Dann ist $f|C^m$ eine konfinale Teilfunktion von $f|C$ und $f|C^{m+1}$ ist eine konfinale Teilfunktion von $f|C^m$. Entsprechend (b) sollte nun eine konfinale Teilfunktion $f|C'$ von $f|C$ existieren derart, daß für jedes natürliche m ein $x'_m \in C'$ existiert, so daß alle $x' \in C'$ mit $x'_m \leqq x'$ Elemente von C^m sind. Eine solche konfinale Teilmenge C' von C existiert aber nicht.

Wir müssen also den Begriff der konfinalen Teilfunktion durch etwas anderes ersetzen. Hierzu stellen wir die folgende Betrachtung an. Ist D' eine konfinale Teilmenge von D, so ist der Raster $\mathfrak{R}_{D'}$ mindestens so fein wie $\mathfrak{R}$ und für jede Menge $E \subseteqq D$ sind die beiden Aussagen

die Menge ED' enthält $\mathfrak{R}_{D'}$ — schließlich alle $x \in D'$

und

die Menge E enthält $\mathfrak{R}_{D'}$ — schließlich alle $x \in D$

gleichbedeutend. Bezüglich des Begriffes „schließlich alle" kommt es also auf dasselbe hinaus, ob wir die mittels $\mathfrak{R}_{D'}$ gerasterte konfinale Teilfunktion $f \mid D'$ von $f \mid D$ oder die mittels $\mathfrak{R}_{D'}$ gerasterte Funktion $f \mid D$ selbst betrachten. Mit anderen Worten: Statt zu der konfinalen Teilfunktion $f \mid D'$ von $f \mid D$ überzugehen, können wir auch (unter Beibehaltung der ganzen Funktion $f \mid D$) von $\mathfrak{R}$ zu dem mindestens so feinen Raster $R_{D'}$ übergehen.

Dies legt den Gedanken nahe (unter Beibehaltung der ganzen Funktion $f \mid D$) vom Raster $\mathfrak{R}$ in D zu einem beliebigen

Raster $\mathfrak{R}'$ in D überzugehen, das mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}$. Da nicht jeder solche Raster R' in der Gestalt $\mathfrak{R}_{D'}$ geschrieben werden kann, ist dieser Übergang von $\mathfrak{R}$ zu einem beliebigen, mindestens so feinen Raster $\mathfrak{R}'$ in D eine allgemeinere, mehr Möglichkeiten umfassende Operation als der Übergang zu einem Raster $\mathfrak{R}_{D'}$, oder, was damit gleichbedeutend ist, zu einer konfinalen Teilfunktion $f \mid D'$ von $f \mid D$ (auch dann, wenn $f \mid D$ speziell eine Folge, also D die Menge D_0 der natürlichen Zahlen ist). Diese allgemeinere Operation erfüllt nun die (sinngemäß umformulierten) Bedingungen (a) und (b). Ist nämlich erstens E eine Teilmenge von D, welche $\mathfrak{R}$—schließlich alle $x \in D$ enthält, so enthält sie auch $\mathfrak{R}'$— schließlich alle $x \in D$. Zweitens liege in D eine Folge $(\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2, \ldots)$ oder eine transfinite Folge $(\mathfrak{R}_\alpha)_{\alpha<\beta}$ oder noch allgemeiner ein System $(\mathfrak{R}_\alpha)$ von Rastern $\mathfrak{R}_\alpha$ vor derart, daß die α Elemente einer gerichteten Menge sind und für $\alpha \leqq \alpha'$ stets $\mathfrak{R}_{\alpha'}$ mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}_\alpha$; dann ist die Vereinigung $\mathfrak{R}_0 = \bigcup \mathfrak{R}_\alpha$ aller dieser Raster wieder ein Raster in D und zwar ist $\mathfrak{R}_0$ mindestens so fein wie jedes Raster $\mathfrak{R}_\alpha$; der Übergang zu diesem Raster $\mathfrak{R}_0$ leistet also dasselbe wie im Spezialfall der Folgen der Übergang zur Diagonalfolge.

Wir können hiernach feststellen: Die zweckmäßige Verallgemeinerung des Überganges von einer Folge zu einer Teilfolge auf eine gerasterte Funktion $f \mid D$ ist nicht der Übergang zu einer konfinalen Teilfunktion von $f \mid D$, sondern der Übergang vom Raster $\mathfrak{R}$ zu einem mindestens so feinen Raster $\mathfrak{R}'$ in D (unter Beibehaltung der ganzen Funktion $f \mid D$).

Auf einen bemerkenswerten Unterschied zwischen der spezielleren Operation des Überganges zu einer konfinalen Teilfunktion und der allgemeineren Operation des Überganges zu einem mindestens so feinen Raster muß noch hingewiesen werden. Die erstere Operation ist unbeschränkt fortsetzbar, d. h. zu jeder konfinalen Teilfunktion existiert wieder eine (echte) konfinale Teilfunktion. Die letztere Operation ist hingegen nicht unbeschränkt fortsetzbar. Zu jedem Raster $\mathfrak{R}$ in D existiert nämlich ein mindestens so feiner Raster $\mathfrak{R}'$ in D derart, daß jeder Raster in D, das mindestens so fein ist wie $\mathfrak{R}'$, mit $\mathfrak{R}'$ identisch ist; dieser Raster $\mathfrak{R}'$ kann also nicht mehr weiter verfeinert werden (dies gilt auch dann, wenn D die Menge D_0 der natürlichen Zahlen ist). Man beweist die Existenz eines solchen Rasters $\mathfrak{R}'$ leicht mittels des Satzes von Zorn.

IV. Was ist nun durch die dargestellte Verallgemeinerung des Folgenbegriffes gewonnen? Wir beschränken uns hier auf die Angabe eines einzigen Beispiels, welches den Nutzen der Verallgemeinerung zeigt. Es sei T ein Umgebungsraum, in dem die Umgebungsaxiome (A), (B) und (C) von Hausdorff erfüllt sind, M eine Punktmenge aus T und p_0 ein Häufungspunkt von M, d. h. ein Punkt von T mit der Eigenschaft, daß in jeder Umgebung U von p_0 mindestens ein Punkt $p \neq p_0$ von M enthalten ist. Gilt nun für p_0 das erste Abzählbarkeitsaxiom von Hausdorff, so existiert eine Folge von Punkten aus M, die gegen p_0 konvergiert. Gilt dieses Axiom aber nicht, so existiert eine solche Folge i. a. nicht. Wohl aber existiert auch dann stets eine gerasterte Funktion $p \mid D$ ($p = p(x)$ ein Punkt von M), die gegen p_0 konvergiert, d. h. die Eigenschaft besitzt, daß in jeder Umgebung U von p_0 der Punkt $p(x)$ für schließlich alle $x \in D$ enthalten ist. Setzen wir nämlich $M = D$, so ist das System $\mathfrak{R}$ aller Durchschnitte DU, wobei U alle Umgebungen von p_0 durchläuft, ein Raster in D; ordnen wir nun jedem $x \in D$, d. h. jedem Punkt $p = x$ aus M den Punkt p selbst zu, $p(x) = p$, so ist $p \mid D$ eine durch $\mathfrak{R}$ gerasterte Funktion, die gegen p_0 konvergiert.

Allgemein läßt sich sagen, daß die gerasterten Funktionen eine bessere und natürlichere, dazu noch weitergehende Verallgemeinerung der Folgen über das Abzählbare hinaus darstellen als etwa die transfiniten und Moore-Schmithschen Folgen.