Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über ein vollständiges System von Bewegungsinvarianten der Hyperflächen zweiter Ordnung im $\mathfrak{R}_n$

Von Karl Seebach in München

Vorgelegt von Herrn J. Lense am 3. November 1950

Unter dem „Hauptsachenproblem" versteht man die Reduktion einer reellen quadratischen Form

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik} x_i x_k, \quad a_{ik} = a_{ki} \tag{1}$$

auf die Normalform

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i z_i^2$$

durch eine orthogonale Transformation. Die λ_i sind die Eigenwerte der symmetrischen Matrix (a_{ik}); sie stellen ein vollständiges Invariantensystem der Form bezügl. orthogonaler Transformationen dar. Eine Hyperfläche zweiter Ordnung im affinen $\mathfrak{R}_n$ (kurz F_2 genannt) ist nun gegeben durch eine Gleichung

$$\sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} x_i x_k = 0, \quad x_0 = 1; \quad a_{ik} = a_{ki}, \tag{2}$$

wobei wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen können, daß das im $\mathfrak{R}_n$ zugrundegelegte Koordinatensystem kartesisch ist. Bei der metrischen Klassifizierung werden genau alle diejenigen F_2 in eine Klasse zusammengefaßt, die sich durch eine Bewegung

$$x_0 = z_0; \quad x_i = \sum_{s=1}^{n} g_{is}(z_s + t_s); \quad \sum_{s=1}^{n} g_{is} \cdot g_{ks} = \delta_{ik}; \quad (i, k = 1, \ldots n) \tag{3}$$

ineinander transformieren lassen. Wie bekannt ist, gibt es in jeder Klasse einen Repräsentanten, der durch eine der beiden Gleichungen dargestellt wird

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + D = 0; \\ \text{b)} & \lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2\,E \cdot z_{r+1} = 0; \end{array}\right\} \quad \lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \lambda_r \neq 0. \tag{4}$$

Hierin bedeuten die Zahlen $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ die von Null verschiedenen Eigenwerte des homogenen Teiles (1). Sie bilden zusammen mit den Konstanten D bzw. E, wenn man von der Reihenfolge der λ und einem gemeinsamen Proportionalitätsfaktor absieht, ein vollständiges Invariantensystem bzgl. der Bewegungsgruppe[1]. Während nun die λ als Eigenwerte des homogenen Teiles unmittelbar bestimmbar sind, habe ich eine allgemeingültige Darstellung der restlichen Invariante D bzw. E als Funktion der Koeffizienten in der Literatur nicht gefunden. Es ist natürlich längst bekannt, daß D bei einer nichtentarteten Mittelpunktfläche zweiter Ordnung den Wert $\frac{\Delta}{\delta}$ hat, wobei Δ die Determinante der vollen Matrix, δ die Determinante des homogenen Teiles ist; in den Entartungsfällen kommt man im $\mathfrak{R}_2$ und $\mathfrak{R}_3$ meist durch direkte Rechnung zum Ziel. Im folgenden soll nun für die Invarianten D bzw. E ein Ausdruck hergeleitet werden, der es gestattet, die Endgleichung (4) der F_2 ohne Ausführung der Transformation in jedem Falle sofort anzugeben. Der Gang der Rechnung läßt es kaum vermeiden, daß dabei auch längst bekannte Dinge nochmals in Erscheinung treten.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Große deutsche Buchstaben ohne Index bedeuten durchwegs $(n + 1)$-reihige quadratische Matrizes mit reellen Elementen. Sei etwa

$$\mathfrak{A} = (a_{ik}), \quad (i, k = 0, 1, \ldots n)$$

eine solche Matrix; streicht man in ihr die nullte Zeile und nullte Spalte, so entsteht eine n-reihige Matrix, die „geränderte Matrix". Den Prozeß der Ränderung deuten wir durch den Index 1 an; es ist also

$$\mathfrak{A}_1 = (a_{ik}), \quad (i, k = 1, 2, \ldots n).$$

Weiter verstehen wir unter

$$|\mathfrak{A}| = |a_{ik}|, \quad \mathfrak{A}' = (a_{ki}), \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{A})$$

in üblicher Weise die Determinante, die transponierte Matrix und den Rang von $\mathfrak{A}$. Schließlich benötigen wir noch die charak-

[1] Vgl. etwa Schreier-Sperner, Analytische Geometrie II, Hamb. Math. Einzelschr. 19. Heft, 1935; S. 292.

teristischen Polynome einer beliebigen Matrix $\mathfrak{A}$ und ihrer geränderten Matrix $\mathfrak{A}_1$:

$$|\mathfrak{A}-\mu\mathfrak{E}| = (-1)^{n+1}\cdot[\mu^{n+1}-A_1\cdot\mu^n+\cdots+(-1)^{n+1}A_{n+1}];$$
$$|\mathfrak{A}_1-\lambda\mathfrak{E}_1| = (-1)^n\cdot[\lambda^n-a_1\cdot\lambda^{n-1}+\cdots+(-1)^n\cdot a_n]; \qquad \mathfrak{E}=(\delta_{ik}). \quad (5)$$

Die Koeffizienten dieser Polynome lassen sich in bekannter Weise darstellen als Summen der Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{A}_1$:

$$A_\nu = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_\nu\\0}}^{n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & . & . & a_{i_1 i_\nu} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & . & . & a_{i_2 i_\nu} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_\nu i_1} & a_{i_\nu i_2} & . & . & a_{i_\nu i_\nu} \end{vmatrix}; \quad a_\nu = \sum_{\substack{i_1<i_2<\cdots<i_\nu\\1}}^{n} \begin{vmatrix} a_{i_1 i_1} & a_{i_1 i_2} & . & . & a_{i_1 i_\nu} \\ a_{i_2 i_1} & a_{i_2 i_2} & . & . & a_{i_2 i_\nu} \\ . & . & . & . & . \\ a_{i_\nu i_1} & a_{i_\nu i_2} & . & . & a_{i_\nu i_\nu} \end{vmatrix}. \quad (6)$$

Wir betrachten nun die linke Seite von (2), also den reellen quadratischen Ausdruck

$$f = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik}\,x_i\,x_k, \quad x_0 = 1; \quad a_{ik} = a_{ki},$$

den wir in Matrizenschreibweise folgendermaßen darstellen können:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{X}'\mathfrak{A}\mathfrak{X}; \; \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} f & 0 & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}; \; \mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ x_1 & 0 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ x_n & 0 & . & . & 0 \end{pmatrix}; \; \mathfrak{A} = (a_{ik}) = \mathfrak{A}'. \quad (7)$$

Setzen wir noch

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = R; \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1) = r,$$

dann gelten die Beziehungen

$$1 \leqq r \leqq R \leqq r+2; \quad r \leqq n; \quad R \leqq n+1, \quad (8)$$

und zwar $1 \leqq r$, weil f ein quadratischer Ausdruck sein soll, und $r \leqq R \leqq r+2$, da der Rang einer beliebigen Matrix höchstens um 2 größer ist als der Rang ihrer geränderten Matrix.

Bildet man nämlich eine beliebige $(r+3)$-reihige Determinante A aus der Matrix $\mathfrak{A} = (a_{ik})$, so hat diese Determinante den Wert Null, falls sie ganz zu $\mathfrak{A}_1$ gehört; enthält A zwar die erste Zeile, nicht aber die erste Spalte von $\mathfrak{A}$ und entwickelt man A nach der ersten Zeile, so sind sämtliche algebraischen Komplemente als $(r+2)$-reihige Determinanten von $\mathfrak{A}_1$ gleich Null; dieselbe Schlußweise gilt, falls in A die erste Spalte, nicht aber die erste Zeile von $\mathfrak{A}$ vorkommt. Enthält schließlich A sowohl die erste Zeile als auch die erste Spalte und entwickelt man wieder nach der ersten Zeile, so verschwindet das algebraische Komplement von a_{00} als $(r+2)$-reihige Determinante aus $\mathfrak{A}_1$, jeder andere $(r+2)$-reihige Minor der ersten Zeile ist aber ebenfalls Null, weil bei seiner Entwicklung nach der ersten Spalte lauter $(r+1)$-reihige Determinanten von $\mathfrak{A}_1$ auftreten. Andererseits sieht man leicht an folgenden Beispielen, daß die Rangbeziehungen $R = r$, $R = r+1$, $R = r+2$ wirklich vorkommen können:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir führen nun im affinen $\mathfrak{R}_n$ eine beliebige Bewegung aus, die sich bei euklidischer Maßbestimmung darstellen läßt durch das Gleichungssystem (3). Durch Aufspaltung von (3) in eine Drehung um den Nullpunkt und in eine Translation ergibt sich

$$x_i = \sum_{s=1}^{n} g_{is}\, y_s; \quad y_s = z_s + t_s; \quad (i, s = 1, 2, \ldots n),$$

oder in Matrizenschreibweise: (9)

$$\text{Drehung:} \quad \mathfrak{X} = \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{Y}; \quad \mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ 0 & g_{11} & \cdot\,\cdot & g_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ 0 & g_{n1} & \cdot\,\cdot & g_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{Y} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ y_1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ y_n & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \end{pmatrix};$$

$$\text{Translation:} \quad \mathfrak{Y} = \mathfrak{T} \cdot \mathfrak{Z}; \quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ t_1 & 1 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ t_n & 0 & \cdot\,\cdot & 1 \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ z_1 & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot\,\cdot & \cdot \\ z_n & 0 & \cdot\,\cdot & 0 \end{pmatrix}.$$

Der quadratische Ausdruck $\mathfrak{F}$ von (7) geht bei aufeinanderfolgender Ausführung der Transformationen (9) über in

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}^{(1)} &= \mathfrak{Y}' \mathfrak{G}' \mathfrak{A} \mathfrak{G} \mathfrak{Y} = \mathfrak{Y}' \mathfrak{B} \mathfrak{Y}; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{G}' \mathfrak{A} \mathfrak{G}; \\ \mathfrak{F}^{(2)} &= \mathfrak{Z}' \mathfrak{T}' \mathfrak{B} \mathfrak{T} \mathfrak{Z} = \mathfrak{Z}' \mathfrak{C} \mathfrak{Z}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{T}' \mathfrak{B} \mathfrak{T} = \mathfrak{T}' \mathfrak{G}' \mathfrak{A} \mathfrak{G} \mathfrak{T}. \end{aligned} \tag{10}$$

Die Matrizes $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ sind offenbar wieder symmetrisch. Im folgenden sollen nun gewisse Invarianten dieser Transformationen aufgestellt werden, aus denen sich dann ein vollständiges Invariantensystem gegenüber der Bewegungsgruppe ergeben wird.

a) Drehung: Nach (9) und (10) haben wir

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{G} \mathfrak{Y}; \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{G}' \mathfrak{A} \mathfrak{G}.$$

Die geränderte Matrix $\mathfrak{G}_1$ von $\mathfrak{G}$ ist nach Voraussetzung orthogonal; daher ist auch $\mathfrak{G}$ orthogonal, wie man sich sofort überzeugt; es bestehen also die Relationen

$$\mathfrak{G} \cdot \mathfrak{G}' = \mathfrak{E}; \quad \mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_1' = \mathfrak{E}_1. \tag{11}$$

Nun ergibt sich aus der Matrizengleichung $\mathfrak{B} = \mathfrak{G}' \mathfrak{A} \mathfrak{G}$ auch folgende Beziehung für die geränderten Matrizes

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_1' \mathfrak{A}_1 \mathfrak{G}_1,$$

die man durch Ausrechnen leicht bestätigt. In Verbindung mit (11) folgt also

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{G}^{-1} \mathfrak{A} \mathfrak{G}; \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{G}_1^{-1} \mathfrak{A}_1 \mathfrak{G}_1. \tag{12}$$

Die Matrizes $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ einerseits und $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}_1$ andererseits sind also zueinander äquivalent

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}, \mathfrak{A}_1 \sim \mathfrak{B}_1$$

und haben daher dasselbe charakteristische Polynom:

$$|\mathfrak{A} - \mu \mathfrak{E}| = |\mathfrak{B} - \mu \mathfrak{E}|; \ |\mathfrak{A}_1 - \lambda \mathfrak{E}_1| = |\mathfrak{B}_1 - \lambda \mathfrak{E}_1|.$$

Die Koeffizienten beider Polynome sind somit Invarianten gegenüber beliebigen Drehungen um den Nullpunkt; in der Bezeichnungsweise (5) gilt also:

$$A_\nu = B_\nu, \ (\nu = 1, 2, \ldots n + 1); \ a_\nu = b_\nu, (\nu = 1, 2, \ldots n). \tag{13}$$

Wie außerdem bekannt ist, sind auch die Ranggrößen R und r Invarianten:

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{B}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}); \ \mathfrak{R}(\mathfrak{B}_1) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1).$$

Der transformierte Ausdruck $\mathfrak{F}^{(1)}$ aus (10) ist also wieder quadratisch. Für das folgende merken wir noch an, daß sich die Matrix $\mathfrak{B}$ durch geeignete Wahl von $\mathfrak{S}$ (Hauptachsentransformation des homogenen Teiles) auf die Gestalt bringen läßt:

$$\mathfrak{B} = \left(\begin{array}{ccccccc|ccc}
b_{00} & b_{01} & . & . & . & b_{0r} & b_{0,r+1} & 0 & . & 0 \\
b_{10} & \lambda_1 & . & . & . & 0 & 0 & & & . \\
. & . & . & . & . & . & . & & & . \\
. & . & . & . & . & . & . & & & . \\
b_{r0} & 0 & . & . & . & \lambda_r & 0 & & & . \\
b_{r+1,0} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & & & . \\
\hline
0 & & & & & & & 0 & & \\
. & & & & & & & . & & \\
. & & & & & & & . & & \\
0 & . & . & . & . & . & . & . & . & 0
\end{array}\right). \tag{14}$$

Hierin bedeuten $\lambda_1, \ldots \lambda_r$ die r von Null verschiedenen Eigenwerte von $\mathfrak{A}_1$; $(r = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1))$. Die Größe $b_{0,r+1}$ ist dann und nur dann von Null verschieden, wenn $\mathfrak{R}(\mathfrak{A}) = R = r + 2$ ist. Im Falle $r = n$ kommt dieses Element natürlich nicht vor.

b) Translation: Wir behandeln die Translation unabhängig von einer eventuell vorausgegangenen Drehung. Demgemäß können wir nach (9) und (10) schreiben

$$\mathfrak{X} = \mathfrak{T}\,\mathfrak{Y}; \quad \mathfrak{C} = \mathfrak{T}'\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{T}; \quad \mathfrak{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ t_1 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & & & . \\ . & . & & & . \\ t_n & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}.$$

Aus der Gleichung für $\mathfrak{C}$ folgt für die geänderten Matrizes die Relation

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{A}_1,$$

wie man wieder durch Ausrechnung sofort bestätigt; die quadratischen Glieder werden ja durch eine Translation nicht beeinflußt. Das charakteristische Polynom der geänderten Matrix bleibt daher trivialerweise invariant; wir schreiben dies in Analogie zu (13) für die Koeffizienten an

$$a_\nu = c_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots n). \tag{15}$$

Weitere bekannte Invarianten sind die Ranggrößen

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{C}) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}); \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{C}_1) = \mathfrak{R}(\mathfrak{A}_1),$$

wie man aus der Tatsache, daß $\mathfrak{T}$ wegen $|\mathfrak{T}| = 1$ nicht singulär ist, auch unmittelbar erkennt.

Nun ist die Translationsmatrix $\mathfrak{T}$ außer im Falle der Identität nicht orthogonal; daher bleibt auch das charakteristische Polynom von $\mathfrak{A}$ – im Gegensatz zur Drehung – im allgemeinen nicht invariant. Wir werden jedoch zeigen, daß die Translation wenigstens eine gewisse Teilmenge der Koeffizienten dieses Polynoms ungeändert läßt. Zu diesem Zweck transformieren wir $\mathfrak{C}$ durch eine orthogonale Matrix $\mathfrak{G}$ in eine äquivalente Matrix $\mathfrak{C}^*$:

$$\mathfrak{C}^* = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{C}\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{T}'\mathfrak{G})(\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{G})(\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{G}); \quad \mathfrak{G}\cdot\mathfrak{G}' = \mathfrak{E}.$$

Setzt man noch

$$\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{A}\mathfrak{G} = \mathfrak{A}^*; \quad \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{G} = \mathfrak{T}^*; \quad \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{T}'\mathfrak{G} = (\mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{T}\mathfrak{G})' = (\mathfrak{T}^*)', \tag{16}$$

wobei jeweils die mit Stern versehenen Matrizes zu den ursprünglichen äquivalent sind, dann ergibt sich

$$\mathfrak{C}^* = (\mathfrak{T}^*)'\,\mathfrak{A}^*\,\mathfrak{T}^*. \tag{17}$$

Die orthogonale Matrix $\mathfrak{G}$ werde nun speziell von der Form (9) gewählt

$$\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & g_{11} & . & . & . & g_{1n} \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & g_{n1} & . & . & . & g_{nn} \end{pmatrix}; \quad \mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_1' = \mathfrak{E}_1,$$

wobei durch geeignete Verfügung über $\mathfrak{G}_1$ erreicht werden kann, daß $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{G}^{-1}\mathfrak{A}\,\mathfrak{G}$ die bei der Drehung erwähnte Endform (14) annimmt[1]:

$$\mathfrak{A}^* = \left(\begin{array}{cccccccc:ccc} \alpha_{00} & \alpha_{01} & . & . & . & \alpha_{0r} & \alpha_{0,r+1} & & 0 & . & 0 \\ \alpha_{10} & \lambda_1 & . & . & . & 0 & 0 & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & & & & . \\ . & . & . & . & . & . & . & & & & . \\ \alpha_{r0} & 0 & . & . & . & \lambda_r & 0 & & & & . \\ \alpha_{r+1,0} & 0 & . & . & . & 0 & 0 & & & & . \\ \hdashline 0 & & & & & & & & 0 & & \\ . & & & & & & & & & . & \\ . & & & & & & & & & . & \\ 0 & . & . & . & . & . & . & & . & . & 0 \end{array}\right). \tag{18}$$

Man rechnet leicht nach, daß die Matrix $\mathfrak{T}^*$ bei obiger Wahl von $\mathfrak{G}$ das Aussehen hat

$$\mathfrak{T}^* = \mathfrak{G}^{-1}\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{G} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \tau_1 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ \tau_n & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix}, \tag{19}$$

wobei es auf die Werte der τ_ν nicht ankommt. Wesentlich ist nur, daß $\mathfrak{T}^*$ wieder die Gestalt von $\mathfrak{T}$ annimmt, was auch unmittelbar einzusehen ist; denn der Übergang von $\mathfrak{T}$ zu $\mathfrak{T}^*$ bedeutet ja nur die Einführung eines neuen Koordinatensystems, in dem sich natürlich wieder eine Translationsmatrix ergeben muß. Für $\mathfrak{C}^*$ erhalten wir schließlich nach (17), (18) und (19) die Darstellung[2]:

---

[1] Die Elemente der mit Stern versehenen Matrizes werden jeweils durch entsprechende griechische Buchstaben bezeichnet.

[2] Für $r = n$ ist natürlich $\alpha_{r+1,0} = \alpha_{0,r+1}$ nicht vorhanden; ebenso ist die obere Summationsgrenze $r+1$ in diesem Fall durch n zu ersetzen.

$$
\mathfrak{C}^* = \begin{pmatrix} 1 & \tau_1 & . & . & \tau_n \\ 0 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & & & & \\ 0 & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix} \left(\begin{array}{ccccc|c} \alpha_{00} & \alpha_{01} & . \; . & \alpha_{0r} & \alpha_{0,r+1} & \\ \alpha_{10} & \lambda_1 & . \; . & 0 & 0 & \\ . & . & . \; . & . & . & 0 \\ \alpha_{r0} & 0 & . \; . & \lambda_r & 0 & \\ \alpha_{r+1,0} & 0 & . \; . & 0 & 0 & \\ \hline & & 0 & & & \end{array}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & . & . & 0 \\ \tau_1 & 1 & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . \\ . & & & & \\ \tau_n & 0 & . & . & 1 \end{pmatrix} = \tag{20}
$$

$$
= \left(\begin{array}{ccccc|c} \left(\alpha_{00} + 2 \cdot \sum_{\nu=1}^{r+1}{}' \alpha_{\nu 0} \tau_\nu + \sum_{\nu=1}^{r} \lambda_\nu \tau_\nu^2\right) & (\alpha_{01} + \lambda_1 \tau_1) & . \; . & (\alpha_{0r} + \lambda_r \tau_r) & \alpha_{0,r+1} & \\ (\alpha_{10} + \lambda_1 \tau_1) & \lambda_1 & . \; . & 0 & 0 & \\ . & . & . \; . & . & . & 0 \\ (\alpha_{r0} + \lambda_r \tau_r) & 0 & . \; . & \lambda_r & 0 & \\ \alpha_{r+1,0} & 0 & . \; . & 0 & 0 & \\ \hline & & 0 & & & \end{array}\right).
$$

Nun bedeuten A_ν bzw. C_ν nach (6) die Summen aller ν-reihigen Hauptunterdeterminanten der Matrizes $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{C}$; dieselbe Bedeutung kommt den Größen A_ν^* bzw. C_ν^* hinsichlich der Matrizes $\mathfrak{A}^*$ und $\mathfrak{C}^*$ zu. Wegen

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{A}^*, \; \mathfrak{C} \sim \mathfrak{C}^*$$

gilt also:

$$A_\nu^* = A_\nu; \; C_\nu^* = C_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots n + 1). \tag{21}$$

Für das weitere unterscheiden wir nach (8) die beiden Fälle:

$$R = r + 2; \; R \leqq r + 1.$$

1. $R = r + 2$: Unter den $(r + 2)$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{C}^*$ sind nach (20) sämtliche gleich Null mit Ausnahme der einen, die aus den ersten $r + 2$ Zeilen und Spalten zusammengesetzt ist; letztere ist wegen des Ranges $r + 2$ wirklich von Null verschieden. Daher ist auch die Summe aller $(r + 2)$-reihigen Hauptunterdeterminanten aus $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{C}^*$ jeweils gleich derjenigen, die in der linken oberen Ecke steht. Außerdem erkennt man leicht, daß die Gleichung (20) richtig bleibt, wenn man sämtliche darin vorkommenden Matrizes durch

die $(r+2)$-reihigen Matrizes ersetzt, die aus den ersten $r+2$ Zeilen und Spalten gebildet sind. Geht man in (20) für die so verkleinerten Matrizes zu den Determinanten über, so erhält man, da auch die Determinanten der reduzierten Translationsmatrizes den Wert Eins haben, in Verbindung mit (21) die Beziehung:

$$C_{r+2} = C^*_{r+2} = A^*_{r+2} = A_{r+2}. \tag{22}$$

Ist $n+1 > r+2$, dann gilt weiter für jede natürliche Zahl ν aus dem Intervall $r+2 < \nu \leqq n+1$:

$$C_\nu = C^*_\nu = 0 = A^*_\nu = A_\nu; \quad r+2 < \nu \leqq n+1; \tag{23}$$

denn alle mehr als $(r+2)$-reihigen Hauptunterdeterminanten von $\mathfrak{A}^*$ bzw. $\mathfrak{C}^*$ haben, falls sie existieren, den Wert Null. Zusammenfassend ergibt sich aus (22) und (23):

$$C_\nu = A_\nu; \quad r+2 \leqq \nu \leqq n+1; \quad R = r+2. \tag{24}$$

2. $R \leqq r+1$: In diesem Fall kommt das Element $\alpha_{0,r+1} = \alpha_{r+1,0}$ entweder überhaupt nicht vor oder es hat den Wert Null. Es gelten im wesentlichen dieselben Schlüsse wie bei 1), wenn wir $r+2$ durch $r+1$ ersetzen. Wir haben also

$$C_\nu = A_\nu; \quad r+1 \leqq \nu \leqq n+1; \quad R \leqq r+1. \tag{25}$$

Die Formeln (24) und (25) lassen sich noch zusammenfassen in die eine Gleichung:[1]

$$C_\nu = A_\nu; \quad \rho \leqq \nu \leqq n+1; \quad \rho = \mathrm{Max}\,(R, r+1). \tag{26}$$

Bei einer Drehung bleiben nach (13) sämtliche Koeffizienten A_ν des charakteristischen Polynoms $|\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{C}|$ invariant; bei einer Translation hingegen nur diejenigen Koeffizienten, deren Indizes dem in (26) angegebenen Intervall angehören. An Beispielen läßt sich leicht nachweisen, daß die Grenzen dieses Intervalles im allgemeinen nicht mehr erweitert werden können. Für eine beliebige Bewegung kommen also unter den Koeffizienten von $|\mathfrak{A} - \mu\,\mathfrak{C}|$ genau die in (26) angegebenen als Invarianten in Frage. Damit haben wir

[1] Nichttrivial ist die Aussage natürlich nur für $\nu = \rho$.

Satz 1: *Sei* $f = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} x_i x_k$, $x_0 = 1$ *ein reeller quadratischer Ausdruck mit symmetrischer Matrix* $\mathfrak{A} = (a_{ik})$ *vom Rang* R; *der Rang der geänderten Matrix, die dem homogenen Teil von* f *entspricht, werde mit* r *bezeichnet. Schließlich sei* $\rho = \mathrm{Max}\,(R, r+1)$. *Unterwirft man die Variablen* x_i *des Ausdruckes* f *einer orthogonalen Transformation*

$$x_0 = z_0;\ x_i = \sum_{s=1}^{n} g_{is}(z_s + t_s);\ \sum_{s=1}^{n} g_{is} \cdot g_{ks} = \delta_{ik};\qquad (i, k = 1, 2, \ldots n)$$

so möge f *übergehen in den Ausdruck* $f^{(1)} = \sum_{i,k=0}^{n} b_{ik} z_i z_k$, $z_0 = 1$ *mit der Matrix* $\mathfrak{B} = (b_{ik})$. *Bedeuten* A_ν *bzw.* B_ν *die Summen aller* ν*-reihigen Hauptunterdeterminanten von* $\mathfrak{A}$ *bzw.* $\mathfrak{B}$, *dann gilt*

$$A_\nu = B_\nu \text{ für } \rho \leqq \nu \leqq n+1.$$

Nach dem Vorhergehenden ist es jetzt leicht, ein vollständiges Invariantensystem der betrachteten quadratischen Ausdrücke (7) hinsichtlich der Bewegungsgruppe anzugeben; wir werden zeigen, daß die Invarianten

$$R, r, \lambda_1 \ldots \lambda_r, A_\varrho \tag{27}$$

ein vollständiges System darstellen. Jeder Ausdruck (7) läßt sich orthogonal auf eine der Normalformen transformieren, welche durch die linken Seiten von (4) repräsentiert werden. Die darin auftretenden Konstanten lassen sich nun alle durch die Größen (27) ausdrücken; zu zeigen ist das nur noch von den Konstanten D bzw. E.

Im Falle $R \leqq r+1$, also $\rho = r+1$ gilt (4a). Die Matrix des Ausdruckes hat die Form

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} D & 0 & . & . & 0 & \\ 0 & \lambda_1 & . & . & 0 & \\ . & . & . & . & . & 0 \\ 0 & 0 & . & . & \lambda_r & \\ \hline & & 0 & & & \end{array}\right).$$

Es ist also

$$A_\varrho = A_{r+1} = D \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_r; \quad D = \frac{A_\varrho}{\lambda_1 \ldots \lambda_r}. \tag{28}$$

Für $R = r + 2$, $\rho = r + 2$ gilt (4b) mit der Matrix

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & E \\ 0 & \lambda_1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_r & 0 \\ E & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \hdashline & & & 0 & & \end{array}\right).$$

Wir haben daher

$$A_\varrho = A_{r+2} = -E^2 \cdot \lambda_1 \ldots \lambda_r; \quad E = \sqrt{-\frac{A_\varrho}{\lambda_1 \ldots \lambda_r}}.[1] \tag{29}$$

Zweckmäßigerweise führen wir noch die Größe

$$K = \left(-\frac{A_\varrho}{\lambda_1 \ldots \lambda_\varrho}\right)^{\frac{r+3-\varrho}{2}} \tag{30}$$

ein; dann ist auch

$$R, r, \lambda_1, \ldots \lambda_r, K$$

ein vollständiges Invariantensystem; denn die Normalform des Ausdruckes (7) läßt sich jetzt nach (28), (29) und (30) in der Form schreiben

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 - K, \text{ für } \rho = r + 1;$$
$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2K z_{r+1}, \text{ für } \rho = r + 2.$$

Zusammenfassend ergibt sich:

Satz 2: *Sei* $f = \sum_{i,k=0}^{n} a_{ik} x_i x_k$, $x_0 = 1$ *ein reeller quadratischer Ausdruck mit symmetrischer Matrix und*[2] $K = \left(-\frac{A_\varrho}{\lambda_1 \ldots \lambda_r}\right)^{\frac{r+3-\varrho}{2}}$. *Die Größen* $R, r, \lambda_1, \ldots \lambda_r, K$ *stellen ein vollständiges Invarian-*

[1] Hieraus folgt nebenbei für $\rho = r + 2$: sign $(\lambda_1 \ldots \lambda_r) = -$ sign A_ϱ.
[2] Bzgl. der Bezeichnungsweise siehe Satz 1.

tensystem bzgl. der Bewegungsgruppe dar. Der Ausdruck f läßt sich orthogonal auf eine der beiden Normalformen transformieren:

$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 - K, \quad \text{für } R \leqq r + 1;$$
$$\lambda_1 z_1^2 + \ldots + \lambda_r z_r^2 + 2K \cdot z_{r+1}, \quad \text{für } R = r + 2.$$

Bei den Hyperflächen zweiter Ordnung, deren Gleichung sich durch Nullsetzen von f ergibt, ist natürlich zu beachten, daß es bei den Invarianten $\lambda_1, \ldots \lambda_r, K$ auf einen gemeinsamen Proportionalitätsfaktor nicht ankommt.