Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1950

München 1951
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Streifengeometrie, I. Teil[1]

Von

Sebastian Finsterwalder

Mit 9 Figuren

Vorgelegt am 15. Dezember 1950

1. Einleitung

Im Laufe der letzten fünfzig Jahre hat sich allmählich der Begriff des Streifens entwickelt, dessen Ansätze tief in das vorige Jahrhundert hinabreichen. Man versteht darunter folgendes: Man zieht auf einer vorgegebenen Fläche eine Kurve und betrachtet die von den Tangentenebenen der Fläche in den Punkten dieser Kurve erzeugte abwickelbare Fläche. Sie berührt die Ausgangsfläche längs der Flächenkurve und bestimmt längs der Flächenkurve als „Mittellinie" einen „Planstreifen" (oder kurz „Streifen"), dessen Breite unbestimmt bleibt, aber klein sein soll gegenüber den Krümmungsradien der Mittellinie. Die eine Seite des Planstreifens wird als „Oberseite" definiert. Die zu den Tangenten der Mittellinie senkrechten Flächentangenten bezeichnen wir als „Schwellen", die zu den Tangenten der Mittellinie konjugierten Flächentangenten als „Ritzlinien". Die Ritzlinien sind die Erzeugenden der von den Tangentenebenen des Streifens umhüllten Torse, die Schwellen erzeugen, falls sie von den Ritzlinien verschieden sind, eine windschiefe Regelfläche.

Der so definierte Streifen ist ein duales Gebilde. Unter der Menge der Streifen mit gemeinsamer Mittellinie sind zwei Streifen ausgezeichnet, nämlich der von Schmiegungsebenen gebildete „Schmiegstreifen", dessen Ritzlinien mit den Tangenten der Mittellinie zusammenfallen, und der den Schmiegstreifen längs der gemeinsamen Mittellinie senkrecht durchsetzende „geodätische Streifen", dessen Schwellen mit den Binormalen der Mittellinie zusammenfallen.

---

[1] Das Manuskript wurde von H. Graf und R. Sauer druckfertig gemacht. Die Figuren hat H. Graf nach dem Manuskript entworfen und ausgeführt.

Jeder Planstreifen kann mit der ihn enthaltenden abwickelbaren Fläche in die Ebene abgewickelt werden. Bei der Abwicklung eines geodätischen Streifens in die Ebene geht die Mittellinie in eine Gerade über; wir bezeichnen infolgedessen einen geodätischen Streifen auch als „Band“.

Der Begriff des Planstreifens läßt sich zum „Wölbstreifen“ erweitern, indem man die geradlinigen Schwellen durch gekrümmte Schwellen ersetzt. Wir wollen uns jedoch in der vorliegenden Arbeit darauf beschränken, die Differentialgeometrie der Planstreifen[2] darstellend-geometrisch zu behandeln. In einer folgenden Arbeit werden wir aufeinander abrollende Planstreifen sowie die Differentialgeometrie der Wölbstreifen erörtern.

2. Allgemeine Planstreifen

Wir wählen die Bogenlänge s der Mittellinie als unabhängige Veränderliche und ordnen jedem Punkt der Mittellinie ein rechtwinkliges Dreibein dreier ein Rechtssystem bildenden Einheits-

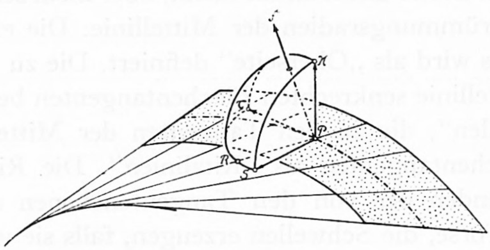

Fig. 1

vektoren zu. Das erste Bein berührt die Mittellinie und ist nach wachsenden s gerichtet. Das zweite Bein liegt in der Schwelle und weist auf der Oberseite des Streifens nach links, das dritte Bein fällt in die Flächennormale und weist nach oben.

Ein Dreibein kann mit einem in Richtung wachsender s benachbarten Dreibein zur Deckung gebracht werden durch eine Parallelverschiebung längs des Linienelements ds der Mittellinie

---

[2] Vgl. z. B. W. Blaschke: Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Auflage, 1945, S. 67–84.

und durch eine Drehung $\mathfrak{F}ds$; der „Formpfeil"[3] $\mathfrak{F}$ gibt die Richtung der Drehachse und der Betrag $|\mathfrak{F}ds|$ die Größe des infinitesimalen Drehwinkels an. Der Formpfeil $\mathfrak{F}$ kennzeichnet die Gestalt des Streifens in der Umgebung seines Aufpunktes. Zerlegen wir ihn nach den Richtungen des Dreibeines, so stellt die „Drillung" F_1 die geodätische Windung der Fläche längs der Mittellinie dar, die „Biegung" F_2 die Normalkrümmung in der Richtung der Mittellinie und die „Rundung" F_3 die geodätische Krümmung der Mittellinie.

Durch $\mathfrak{F}$ als Funktion von s ist die Gestalt des Planstreifens (ohne Rücksicht auf seine Lage im Raum) gegeben. $\mathfrak{F} \equiv 0$ kennzeichnet die ebenen Streifen mit gerader Mittellinie. Der Formpfeil $\mathfrak{F}$ bestimmt den Winkel ν, den die Ritzlinien mit den Tangenten der Mittellinie einschließen, sowie den Winkel μ zwischen den Tangentenebenen des Streifens und den Schmiegebenen seiner Mittellinie[4].

Zu jedem Streifen gehört als „Zwilling" ein ihn längs der gemeinsamen Mittellinie senkrecht durchsetzender Streifen. Die Schwellen des einen Zwillingsstreifens sind die Flächennormalen des anderen Streifens. Außerdem ist die Biegung des einen Streifens bis aufs Vorzeichen gleich der Rundung des anderen Streifens, während die Drillung für beide Zwillingsstreifen dieselbe ist.

Zwischen dem Formpfeil $\mathfrak{F}$ des Streifens und der Krümmung K und Windung W seiner Mittellinie bestehen die bekannten einfachen Beziehungen

$$F_2 = K \sin \mu, \; F_3 = K \cos \mu, \qquad F_1 = W - \frac{d\mu}{ds}, \text{ wobei } \mu = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{F_2}{F_3}\right). \tag{1}$$

3. Schraubenstreifen

Planstreifen mit $\mathfrak{F}(s) = \text{const}$, d. h. mit festen Formpfeilkomponenten F_1, F_2, F_3, bezüglich des begleitenden Dreibeins, sind

[3] Der Formpfeil wird auch Darboux-Cesaro'scher Krümmungsvektor oder kurz Darboux'scher Vektor genannt; siehe M. Lagally: Vorl. über Vektorrechnung, 2. Aufl. Leipzig 1934, S. 61ff. und S. 67ff.

[4] Literaturhinweise und Bemerkungen zur Nomenklatur finden sich bei F. Löbell: Jber. Deutsche Math. Ver. I. III, 2. Abt., Heft 2, 1943, S. 33.

ohne Formänderung in sich verschiebbar und heißen „Schraubenstreifen“. Ihre Mittellinien sind Schraubenlinien (die Grenzfälle Kreis und Gerade mit eingeschlossen). Die Schraubungsachse hat dieselbe Richtung wie der Formpfeil. Die Schraubenstreifen kennzeichnen einen beliebigen Streifen in der Umgebung eines Punktes seiner Mittellinie in ähnlicher Weise wie die Krümmungskreise eine beliebige Kurve in der Umgebung eines Kurvenpunktes. Während jedoch die Kreise eine einparametrige Menge bilden mit der Geraden als Sonderfall, ist die Menge der Schraubenstreifen dreiparametrig und enthält mannigfaltigere Sonderfälle:

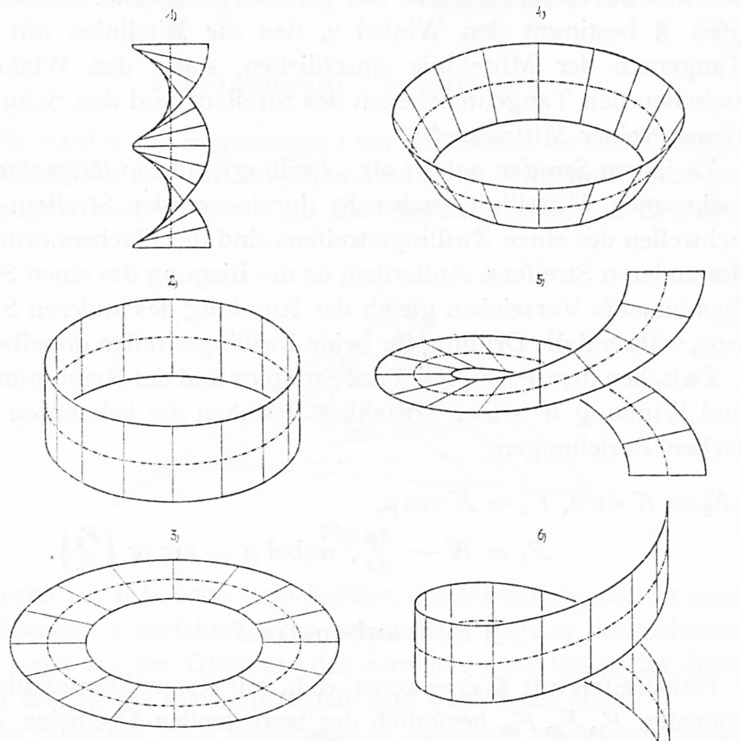

Fig. 2

1. Biegung $F_2 = 0$, Rundung $F_3 = 0$. Die Mittellinie ist eine Gerade; die Schwellenfläche ist eine Wendelfläche mit der Mittellinie als Schraubungsachse.

2. Rundung $F_3 = 0$, Drillung $F_1 = 0$. Die Mittellinie ist ein Kreis; die Streifen- und Schwellenfläche ist der Drehzylinder durch diesen Kreis (Streifengestalt: „Reifen eines Wagenrads").

3. Drillung $F_1 = 0$, Biegung $F_2 = 0$. Die Mittellinie ist ein Kreis; die Streifen- und Schwellenfläche ist die Ebene dieses Kreises (Streifengestalt: „Ring eines Küchenherdes").

4. Drillung $F_1 = 0$. Die Mittellinie ist ein Kreis; die Streifen- und Schwellenfläche ist ein Drehkegel durch diesen Kreis (Streifengestalt: „Kegelzone").

5. Biegung $F_2 = 0$. Die Mittellinie ist eine Schraubenlinie; die Schwellenfläche ist die Wendelfläche durch diese Schraubenlinie, die Streifenfläche ist deren Tangentenfläche (Streifen = „Schraubenschmiegstreifen", vgl. Ziff. 1).

6. Rundung $F_3 = 0$. Die Mittellinie ist eine Schraubenlinie; die Streifenfläche ist der Drehzylinder durch diese Schraubenlinie (Streifen = „geodätischer Schraubenstreifen", vgl. Ziff. 1).

Wir wenden uns nun zu den nichtspeziellen Schraubenstreifen mit nichtverschwindender Drillung, Biegung und Rundung und bezeichnen wie bei den allgemeinen Streifen mit μ den Winkel zwischen den Tangentenebenen des Streifens und den Schmiegebenen der Mittellinie, mit ν den Winkel der Ritzlinien gegen die Mittellinie, mit ψ den entsprechenden Winkel beim Zwillingsstreifen, ferner mit r den Radius des Kreiszylinders durch die Mittellinie, mit K und W Krümmung und Windung der Mittellinie und schließlich mit α, β und γ die Steigungswinkel der Mittellinientangenten, der Schwellen und der Flächennormalen. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$K = \frac{1}{r} \cos^2 \alpha, \quad W = F_1 = \frac{1}{r} \sin \cos \alpha, \tag{2}$$

$$W/K = \operatorname{tg} \alpha = F_1/\sqrt{F_2^2 + F_3^2}, \quad r = \frac{1}{K} \cos^2 \alpha = \frac{\sqrt{F_2^2 + F_3^2}}{F^2},$$

$$\sin \alpha = F_1/F, \quad \sin \beta = F_2/F, \quad \sin \gamma = F_3/F,$$

$$\operatorname{tg} \nu = F_2/F_1, \quad \operatorname{tg} \psi = F_3/F_1, \quad \operatorname{tg} \mu = F_2/F_3,$$

wobei $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ gesetzt ist. Außerdem ergibt sich für die Ganghöhe h des Schraubenstreifens (für den Drehwinkel 1) und den Kehrwert p der Ganghöhe

$$h = r \operatorname{tg} \alpha = F_1/F^2, \quad p = \frac{1}{h} = F^2/F_1. \tag{3}$$

In Abb. 3 ist die Einheitskugel um den Aufpunkt P im Lotriß auf die Basisebene des Zylinders durch die Mittellinie dargestellt. T, S, N sind die Durchstoßpunkte mit der Tangente der

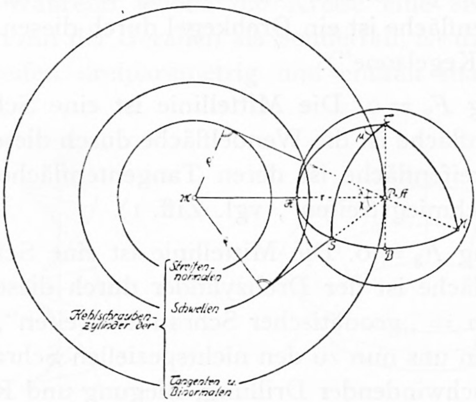

Fig. 3

Mittellinie, der Schwelle und der Flächennormalen, H, B, A die Durchstoßpunkte mit der Hauptnormalen und Binormalen der Mittellinie sowie mit der Mantellinie des Zylinders durch die Mittellinie. M ist der Lotriß der Schraubenachse. Die Schwellen berühren einen Zylinder vom Radius ρ, die Flächennormalen einen Zylinder vom Radius ρ'. Dabei ist (vgl. Abb. 3)

$$\rho = r \sin \chi = \frac{F_1 F_2}{F^2 \sqrt{F_1^2 + F_3^2}}, \quad \rho' = r \sin \lambda = \frac{F_1 F_3}{F^2 \sqrt{F_1^2 + F_2^2}}. \tag{4}$$

Für die Schränkungen Σ der Schwellenfläche und Σ' der Normalenfläche ergibt sich

$$\Sigma = (F_1^2 + F_3^2)/F_1, \qquad \Sigma' = (F_1^2 + F_2^2)/F_1. \tag{5}$$

Beim Übergang von einem Schraubenstreifen zum Zwillingsstreifen vertauschen sich die Zeiger 2 und 3 (Biegung und Rundung). Die durch $F_2 = F_3$ (Biegung = Rundung) ausgezeichneten Zwillingsschraubenstreifen sind deckungsgleich $\left(\mu = \pm \frac{\pi}{2}\right)$.

Bei den durch $F_1 = F_2 = F_3$ (Drillung = Biegung = Rundung) ausgezeichneten Schraubenstreifen ist

$$\mu = \nu = \frac{\pi}{4}, \quad K = F\sqrt{2/3}, \quad W = \frac{F}{\sqrt{3}}, \; r = \frac{2}{F\sqrt{6}}, \; \rho = \frac{1}{F\sqrt{6}}.$$

4. Gleichwinkliges Büschel von Schraubenstreifen

Durch eine vorgegebene Schraubenlinie als Mittellinie läßt sich eine einparametrige Menge (Büschel) von Schraubenstreifen legen. Unter diesen sind zwei ausgezeichnet und bilden ein Zwillingspaar, nämlich ein Schraubenstreifen mit verschwindender Biegung $F_2 = 0$ und ein Schraubenstreifen mit verschwindender Rundung $F_3 = 0$ (Sonderfälle 5 und 6 in Ziff. 3). Der erste Streifen ist ein Schmiegstreifen und berührt die durch die Mittellinie gehende Wendelfläche, der zweite Streifen ist ein geodätischer Streifen und ist der durch die Mittellinie gehender Kreiszylinder. Die übrigen Streifen schneiden diese beiden besonderen Streifen unter konstantem Winkel und lassen sich paarweise zu Zwillingen zusammenfassen, wobei Biegung und Rundung sich gegenseitig vertauschen. Alle Schraubenstreifen des Büschels haben dieselbe, durch die Windung der Mittellinie gegebene Drillung.

5. Abbildung der Schraubenstreifen auf den Punktraum (Polbild)

Sämtliche Schraubenlinien bzw. Schraubenstreifen des Raumes bilden (sofern man von ihren Bewegungen im Raum absieht) eine 2- bzw. 3-parametrige Menge. Die ∞^3 Schraubenstreifen lassen sich auf die Punkte des Raumes umkehrbar eindeutig abbilden dadurch, daß man in jedem Schraubenstreifen in einem raumfesten Dreibein den Formpfeil $\mathfrak{F}$ aufträgt und dem Schraubenstreifen den Endpunkt des Formpfeils als „Polbild" zuordnet. Ähnlichen Schraubenstreifen entsprechen Polbilder auf demselben Strahl. Es genügt daher, zur Kennzeichnung der formverschiedenen Schraubenstreifen jene zu betrachten, deren Form-

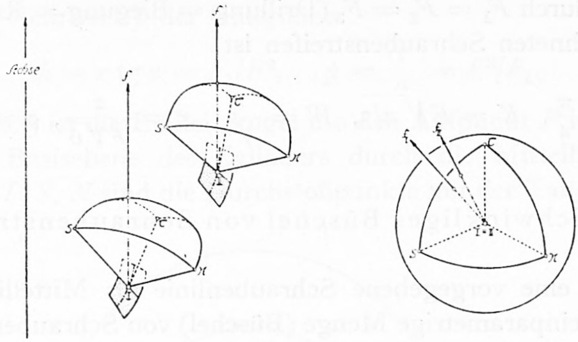

Fig. 4

pfeile die Länge $F = 1$ haben, deren Polbilder also auf der Einheitskugel liegen und „Polrisse“ heißen sollen. Man hat dann nach den Gln. (1), (2) und (3) folgende Beziehungen:

1. Den Punkten eines Kugelmeridians $F_2/F_3 = \text{const}$, dessen Ebene durch das Bein 1 geht, entsprechen Schraubenstreifen, für die der Winkel zwischen den Tangentenebenen des Streifens und den Schmiegebenen der Mittellinie denselben Wert μ hat.

2. Den Punkten eines Kugelbreitenkreises $F_1 = \text{const}$ entsprechen Schraubenstreifen mit demselben Steigungswinkel α und Radius r der Mittellinie, also Schraubenstreifen desselben Büschels.

3. Den Punkten eines Kugelmeridians $F_3/F_1 = \text{const}$, dessen Ebene durch das Bein 2 geht, entsprechen Schraubenstreifen, für die der Winkel zwischen den Ritzlinien des Zwillingsstreifens und den Tangenten der Mittellinie denselben Wert ψ hat.

4. Den Punkten eines Kugelbreitenkreises $F_2 = \text{const}$ entsprechen Schraubenstreifen mit demselben Steigungswinkel β der Schwellen.

5. Den Punkten eines Kugelmeridians $F_1/F_2 = \text{const}$, dessen Ebene durch das Bein 3 geht, entsprechen Schraubenstreifen, für die der Winkel zwischen den Ritzlinien und den Tangenten der Mittellinie denselben Wert ν hat.

6. Den Punkten eines Kugelbreitenkreises $F_3 = \text{const}$ entsprechen Schraubenstreifen mit demselben Steigungswinkel γ der Flächennormalen.

7. Den Punkten des Kugelgroßkreises $F_1 = 0$ entsprechen die „Schrauben“streifen mit kreisförmiger Mittellinie ($\alpha = 0$), den Punkten des Kugelgroßkreises $F_2 = 0$ entsprechen die Schraubenschmiegstreifen ($\beta = 0$) und den Punkten des Kugelgroßkreises $F_3 = 0$ entsprechen die geodätischen Schraubenstreifen ($\gamma = 0$).

Während wir bisher Schraubenstreifen mit der festen Länge $F = 1$ des Formpfeils betrachtet hatten, deren Polbilder also auf der Einheitskugel lagen, betrachten wir jetzt Schraubenstreifen, bei denen eine andere Längenabmessung einen festen Wert hat, deren Polbilder also nicht auf der Einheitskugel liegen.

8. Den Schraubenstreifen gleicher Ganghöhe $\pm h$ entsprechen nach Gl. (3) die Punkte der beiden Kugeln $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = \pm F_1/h$.

9. Den Schraubenstreifen, deren Mittellinien auf ein und demselben Drehzylinder liegen, entsprechen nach Gl. (2) die Punkte der Wulstfläche

$$(F_1^2 + F_2^2 + F_3^2)^2 \, r^2 = F_2^2 + F_3^2.$$

10. Den Schraubenstreifen mit gleicher Schränkung Σ der Schwellenfläche entsprechen nach Gl. (5) die Punkte des Kreiszylinders $F_1^2 + F_3^2 = \Sigma F_1$ und den Schraubenstreifen mit gleicher Schränkung Σ' der Normalfläche die Punkte des Kreiszylinders $F_1^2 + F_2^2 = \Sigma' F_1$.

6. Polbild und Kugelriß von Schraubenstreifen endlicher Länge und von Zusammensetzungen solcher Schraubenstreifen

Ein unbegrenzt gedachter Schraubenstreifen ist durch seinen (konstanten) Formpfeil oder durch sein (punktförmiges) Polbild festgelegt. Zur Kennzeichnung eines Schraubenstreifens endlicher Länge bedarf es noch einer zusätzlichen ziffernmäßigen Angabe dieser Länge gemessen als Bogenlänge s der Streifenmittellinie.

Statt durch ein beziffertes Polbild kann ein Schraubenstreifen endlicher Länge auch durch seinen „Kugelriß“ festgelegt werden; der Kugelriß ist hierbei erklärt als die Gesamtheit der Endpunkte T und R derjenigen Kugelhalbmesser, welche zu den Tangenten der Streifenmittellinie (Schraubenlinien) bzw. zu den Ritzlinien des Streifens parallel verlaufen. Der Kugelriß eines Schraubenstreifens besteht also aus 2 parallelen Kugelkreisen, deren Punkte T und R einander zugeordnet sind. Die Kugelgroßkreise, welche den ersten dieser Parallelkreise in den Punkten T berühren, liegen parallel zu den Schmiegebenen der Streifenmittellinie; die Großkreise, welche den zweiten Parallelkreis in den Punkten R berühren, liegen parallel zu den Tangentialebenen des Schraubenstreifens und schneiden den ersten Parallelkreis in den zugeordneten Punkten T. Wir nennen den Kreis der Punkte T den „Punktort", den Kreis der Punkte R den „Hüllort" des Kugelrisses.

Ähnlich wie man aus tangential aneinandergefügten Kreisbogenstücken allgemeinere ebene Kurven aufbaut (vgl. den in der Baukunst unter der Bezeichnung „Korbbögen" üblichen Ersatz für Ellipsen), kann man Stücke von Schraubenstreifen zu allgemeineren Planstreifen zusammensetzen, indem man dafür sorgt, daß die Tangentenebenen der Schraubenstreifen und die Tangenten der Streifenmittellinien an den Übergangsstellen knicklos ineinander übergehen.

7. Polbild, Polriß und Kugelriß eines allgemeinen Planstreifens

Das Polbild eines allgemeinen Planstreifens wird erzeugt vom jeweiligen Endpunkt des veränderlichen Formpfeils $\mathfrak{F}(s)$ in dem den Streifen begleitenden Dreibein, dessen Ursprung O – zugleich der jeweilige Anfangspunkt des Formpfeils – die Streifenmittelkurve durchläuft. Die Polbildkurve, die den Streifen kennzeichnen soll, muß deshalb mit einer Skala für die Bogenlänge s der Streifenmittelkurve beziffert sein.

Als Ersatz des Polbildes tritt künftig der Polriß, das ist diejenige sphärische Kurve, die sich durch Zentralprojektion der Polbildkurve vom Aufpunkt O aus auf die Einheitskugel um O ergibt. Damit auch die Polrißkurve zur Kennzeichnung des Streifens verwendet werden kann, muß sie außer mit der Skala für die Bogenlänge s noch mit einer zweiten Skala für die Länge $F(s)$ der Formpfeile versehen sein.

Der Kugelriß eines allgemeinen Planstreifens wird – ebenso wie bei den Schraubenstreifen – auf der Einheitskugel um einen festen Mittelpunkt erzeugt, und zwar von den Endpunkten T und R derjenigen Kugelhalbmesser, welche zu den Tangenten der Streifenmittellinie bzw. zu den Ritzlinien des Streifens parallel verlaufen. Der Kugelriß besteht also aus 2 sphärischen Kurven, deren Punkte T und R einander zugeordnet sind. Die Kugelgroßkreise, welche die erste Kurve in den Punkten T berühren, liegen parallel zu den Schmiegebenen der Streifenmittellinie; die Großkreise, welche die zweite Kurve in den Punkten R berühren, liegen parallel zu den Berührebenen des Streifens und schneiden die erste Kurve in den zugeordneten Punkten T. Wir nennen die Kurve der Punkte T den „Punktort", die Kurve der Punkte R den „Hüllort" des Kugelrisses. Die den Streifen kennzeichnenden Winkel ν und μ erscheinen dann unmittelbar im Kugelriß, und zwar ist ν der Zentriwinkel des Großkreisbogens TR, μ der Schnittwinkel der beiden Großkreise, die in T und R den Punkt – bzw. Hüllort berühren und sich in T schneiden.

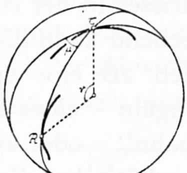

Fig. 5

Man kann den von den Punkten T und R erzeugten Kugelriß ergänzen durch die Endpunkte S und A derjenigen Kugelhalbmesser, welche parallel sind zu den Schwellen bzw. zu den Formpfeilen des Streifens; die Formpfeilrichtung stimmt hierbei überein mit der Richtung der Achsen der sich jeweils dem Streifen anschmiegenden Schraubenstreifen.

Damit der Kugelriß ebenso wie der Polriß den Planstreifen bis auf eine Parallelverschiebung im Raum bestimmt, muß nicht nur die Zuordnung der Punkte T und R des Punktortes und

Hüllortes gegeben sein, sondern Punktort und Hüllort müssen nach der Bogenlänge s der Streifenmittellinie beziffert werden. Ändert man die Bezifferung nach s – unter Beibehaltung der Zuordnung der Punkte T und R –, so erhält man „stellungsverwandte" Planstreifen, die in entsprechenden Aufpunkten parallele Formpfeile von im allgemeinen verschiedener Länge sowie parallele Tangenten der Mittellinien und parallele Tangentenebenen besitzen. Stellungsverwandte Planstreifen ergeben sich z. B., wenn man (nach Ziff. 6) Paare ähnlicher Schraubenstreifen tangential aneinandersetzt, wobei das Ähnlichkeitsverhältnis von Paar zu Paar verschieden sein kann.

8. Bewegungsgeometrischer Zusammenhang zwischen Polriß und Kugelriß

Während beim Polriß auf eine mit dem begleitenden Dreibein starr verbundene Einheitskugel abgebildet wird, ist die Bildfläche beim Kugelriß eine raumfeste Einheitskugel. Vereinigt man die Mittelpunkte beider Kugeln in einen festen Punkt O, so läßt sich die Zuordnung von Polriß und Kugelriß bewegungsgeometrisch deuten als sphärische Bewegung der Trägerkugel des Polrisses in der ruhenden Trägerkugel des Kugelrisses. Dementsprechend kann diese Bewegung der beiden Kugeln aufgefaßt werden als eine sphärische Rollbewegung zweier Kurven dieser Kugeln – eines sphärischen „Rades" auf einer sphärischen „Rollbahn" – oder als Rollbewegung der beiden Kegel, welche diese sphärischen Kurven als Leitkurven und O als gemeinsame Spitze besitzen. Bei der sphärischen Bewegung erzeugt der Punkt T' der Polrißkugel (= Kugelschnittpunkt des Beines 1 des begleitenden Dreibeins) den Punktort T des Kugelrisses, während der Großkreis $T'\,S'$ der Polrißkugel (= Kugelschnittkreis der Ebene der Beine 1 und 2 des begleitenden Dreibeins) den Hüllort R des Kugelrisses erzeugt.

Das rollende sphärische Rad ist der Polriß selbst, denn der Formpfeil $\mathfrak{F}$ liefert die jeweilige Achse der momentanen Drehung; dementsprechend besteht die sphärische Rollbahn aus den in Ziff. 7 genannten Punkten A des Kugelrisses, also den jeweiligen Berührpunkten von Rad und Rollbahn.

Bezieht man Rad und Rollbahn durch deren gleiche Bogenlänge σ und bezeichnet die geodätischen Krümmungen dieser Kurven im jeweiligen Berührpunkt A mit G bzw. g, so gilt

$$(G-g)\,d\sigma = F\,ds, \quad \text{also} \quad (G-g)\frac{d\sigma}{ds} = F. \tag{6}$$

Die geodätische Krümmung $G(s)$ der sphärischen Radkurve ergibt sich aus deren Parameterdarstellung; da die Radkurve der Polriß ist und dieser aus dem Polbild, dem Endpunkt des Formpfeils $\mathfrak{F}(s)$, durch dessen Reduktion auf den ihm gleichgerichteten Einheitsvektor $\mathfrak{f}(s) = \mathfrak{F}(s)/F(s)$ entsteht, ergibt sich für G

$$G = (\dot{\mathfrak{f}} \times \ddot{\mathfrak{f}})\,\mathfrak{f} = (\mathfrak{f}' \times \mathfrak{f}'')\,\mathfrak{f}\sigma'^3, \tag{7}$$

wobei die Ableitungen nach σ bzw. s durch Punkte bzw. Striche gekennzeichnet sind.

Ferner gilt

$$d\sigma^2 = d\mathfrak{f}^2, \quad \text{also} \quad \sigma'^2 = \mathfrak{f}'^2. \tag{8}$$

9. Wickelriß eines Planstreifens.

Wir gehen aus von den Normalebenen der Mittellinie des Planstreifens und der von ihnen umhüllten Torse. Die Berührlinien der Normalebenen mit der Torse sind die Krümmungsachsen der Mittellinie. Bei der Abwicklung der Normalebenen an der Torse bis in eine feste, durch einen Punkt O der Mittellinie

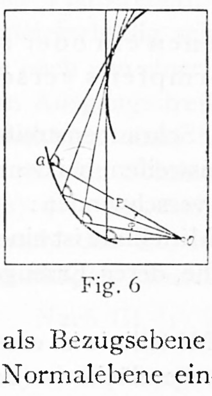

Fig. 6

gehende Normalebene als Bezugsebene durchläuft jeder Punkt der sich abwickelnden Normalebene eine zur Mittellinie gleichabständige Raumkurve. Die Schnittpunkte dieser Raumkurven mit der Bezugsnormalebene werden als „Wickelriß" bezeichnet; der Punkt O selbst ist demnach der Wickelriß der Streifenmittellinie.

Die Hauptnormalen der Streifenmittellinie liefern im Wickelriß Gerade durch O, die Krümmungsachsen dazu senkrechte Gerade. Die Kurve der Fußpunkte Q der Lote von O auf die Wickelrisse der Krümmungsachsen hat als Polarkoordinaten

$$\mathrm{P} = r, \quad \Phi = \int_0^s W\,ds; \tag{9}$$

denn der Abstand der Punkte der Mittellinie von den Krümmungsachsen ist gleich dem Krümmungsradius r und der Winkel zwischen benachbarten Krümmungsachsen ist gleich dem Winkel zwischen benachbarten Schmiegungsebenen der Mittellinie, also gleich der mit dem Bogenelement ds multiplizierten Windung W.

Die Schwellen des Streifens liegen in den Normalebenen der Mittellinie und bilden sich im Wickelriß als Gerade durch O ab; sie schließen mit den Loten auf die Krümmungsachsen, d. h. dem Wickelriß der Hauptnormalen der Mittellinie, den Winkel μ ein.

Die nach der Bogenlänge s bezifferte Kurve der Punkte Q und die zugeordneten, den Schwellen entsprechenden Geraden durch O bilden den Wickelriß des vorgegebenen Planstreifens und legen diesen fest.

10. Streifen, bei denen ein oder zwei Komponenten des Formpfeils verschwinden

Ähnlich wie bei den Schraubenstreifen in Ziff. 3 betrachten wir jetzt allgemeine Planstreifen, bei denen ein oder zwei Komponenten des Formpfeils verschwinden:

1. $F_2 = F_3 = 0$. Die Mittellinie ist eine Gerade; die Schwellenfläche ist eine Regelfläche, deren Erzeugende diese Gerade senkrecht schneiden.

2. $F_3 = F_1 = 0$. Die Mittellinie ist eine beliebige ebene Kurve, die Streifen- und Schwellenfläche ist der Zylinder, dessen Erzeugende auf der Kurvenebene senkrecht stehen.

3. $F_1 = F_2 = 0$. Die Mittellinie ist eine beliebige ebene Kurve; die Streifen- und Schwellenfläche ist die Ebene dieser Kurve.

4. $F_1 = 0$. Die Mittellinie ist eine beliebige Raumkurve; die Streifen- und Schwellenfläche ist die Tangentenfläche einer Filarevolute dieser Kurve, enthält also diese Kurve als Krümmungslinie. So gehören z. B. alle sphärischen, d. h. eine Kugel berührenden Planstreifen zur Familie dieser Streifen $F_1 = 0$.

5. $F_2 = 0$. Die Mittellinie ist eine beliebige Raumkurve; die Schwellenfläche ist die Regelfläche der Kurvenhauptnormalen, die Streifenfläche ist die Hüllfläche der Schmiegebenen dieser Kurve, enthält also diese Kurve als Schmiegtangentenkurve (Schmiegstreifen).

6. $F_3 = 0$. Die Mittellinie ist eine beliebige Raumkurve; die Streifenfläche ist die Hüllfläche der rektifizierenden Ebenen dieser Kurve, enthält also diese Kurve als geodätische Linie (geodätischer Streifen).

Die Streifen 1, 2 und 3 kommen nur bei speziellen Flächen vor. Dagegen enthält jede Fläche Streifen 4 und 6 (längs der Krümmungslinien bzw. der geodätischen Linien) und jede Fläche negativen Krümmungsmaßes Streifen 5 (längs der Schmiegtangentenlinien).

11. Gleichwinklige Büschel von Planstreifen

Ähnlich wie bei den Schraubenstreifen in Ziff. 4 erhalten wir jetzt Büschel allgemeiner Planstreifen, die sich längs der gemeinsamen Mittellinie gleichwinklig schneiden. Sie hängen bei vorgegebener Mittellinie noch von einer willkürlichen Punktion, z.B. $\mu_0(s)$, ab, welche den Ausgangsstreifen des Bünschels kennzeichnet; die Tangentenebenen eines beliebigen Streifens des Büschels schließen dann mit den Schmiegebenen der Mittellinie die Winkel $\mu(s) = \mu_0(s) + \lambda$ ein, wobei die Konstante λ von Streifen zu Streifen verschieden ist. Nach Gl. (1) haben alle Streifen eines gleichwinkligen Büschels dieselbe Drillung $F_1(s) = W(s) + \frac{d\mu_0(s)}{ds}$. Nach Gl. (1) folgt aus der Beziehung

$$\begin{aligned} F_2 = K \sin(\mu_0 + \lambda) &= K(\sin\mu_0 \cos\lambda + \cos\mu_0 \sin\lambda) \\ &= (F_2)_0 \cos\lambda + (F_3)_0 \sin\lambda \end{aligned}$$

und der entsprechenden Beziehung für F_3, daß sich sowohl die Biegung $F_2(s)$ als auch die Rundung $F_3(s)$ linear aus der Biegung $(F_2)_0$ und der Rundung $(F_3)_0$ des Ausgangsstreifens mit konstanten Koeffizienten $\cos\lambda$, $\sin\lambda$ zusammensetzen.

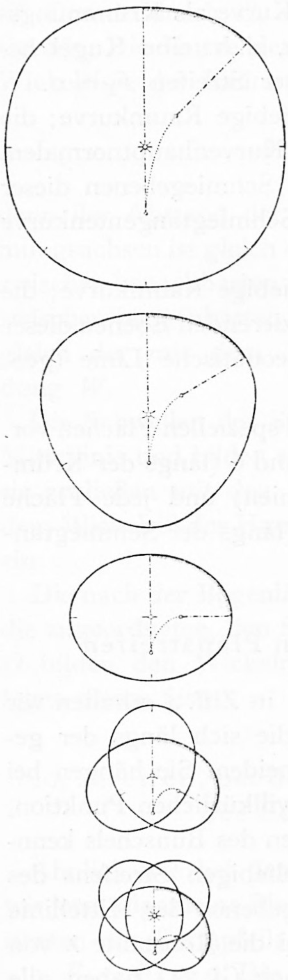

Fig. 7

Unter der Gesamtheit der durch eine vorgegebene Mittellinie gehenden gleichwinkligen Streifenbüschel sind folgende spezielle Büschel enthalten:

1. $\mu_0(s) = \text{const.}$ Das Büschel enthält den Schmiegstreifen ($\mu = 0$) und den geodätischen Streifen $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right)$. Wickelt man alle Streifen des Büschels in die Ebene ab, so liefert die Mittellinie eine Schar „formverwandter" ebener Kurven. Bei diesen sind in entsprechenden, durch gleiche Bogenlänge zugeordneten Punkten die Krümmungen proportional, nämlich gleich der Krümmung der Mittellinie im Raum mal dem konstanten Faktor $\cos\mu$. Abb. 7 vermittelt eine Vorstellung von dem Gestaltenreichtum formverwandter Kurven, wobei nur einige Typen sich schließender Kurven als Beispiele angegeben sind.

2. $\frac{d\mu_0(s)}{ds} = -W(s)$. Alle Streifen des Büschels haben nach Gl. (1) verschwindende Drillung $F_1(s)$. Bei der in Ziff. 9 behandelten Abwicklung der Normalebenen an der Torse der Krümmungsachsen werden die drillungslosen Streifen (vgl. Ziff. 10 Fall 4) von Geraden durch den Aufpunkt O in der sich abwickelnden Normalebene als Schwellen erzeugt; die bei der Abwicklung aus diesen Geraden entstehenden Schwellenflächen sind

bekanntlich Torsen, deren Gratlinien auf der Torse der Krümmungsachsen liegen.

Wenn die Mittellinie eine ebene Kurve ist, sind die Büschel 1 und 2 miteinander identisch.

12. Polriß, Kugelriß und Wickelriß gleichwinkliger Streifenbüschel.

Die Polrisse der Streifen eines gleichwinkligen Büschels sind untereinander deckungsgleich und gehen durch Drehung auseinander hervor; der Drehwinkel ist gleich dem Schnittwinkel der Streifen. Die Gln. (1) liefern nämlich für alle Streifen dasselbe $F_1 = W + \frac{d\mu_0}{ds}$ und außerdem $F_2 = K \sin(\mu_0 + \lambda)$, $F_3 = K \cos(\mu_0 + \lambda)$.

Die Kugelrisse der Streifen eines gleichwinkligen Büschels haben den Punktort der Punkte T gemeinsam. Der Hüllort der Punkte R ist von Streifen zu Streifen verschieden und wird umhüllt von den Großkreisen, welche den Punktort in den Punkten T unter dem Winkel $\mu_0(s) + \lambda$ schneiden. Die von den Punkten R gebildeten Hüllörter ergeben sich demnach als Hüllkurven bei der Bewegung eines Büschels von Großkreisen, dessen Scheitelpunkt den Punktort T beschreibt. Die von einem festen Aufpunkt ausgehenden Ritzlinien des Streifenbüschels bilden einen Kegel zweiter Ordnung, die zu einem festen Punkt T gehörigen Punkte R der Hüllörter also einen sphärischen Kegelschnitt. Die Wickelrisse der Streifen eines gleichwinkligen Büschels bestehen aus kongruenten Strahlenbüscheln, die um deren gemeinsamen Scheitel gegeneinander verdreht sind.

13. Polriß, Kugelriß und Wickelriß der unter Ziff. 11 genannten speziellen Streifen

1. Bei einem Schmiegstreifen ($\mu = 0$) fallen die Punkte T und R zusammen. Bei einem geodätischen Streifen $\left(\mu = \frac{\pi}{2}\right)$ wird der Hüllort R von den Großkreisen umhüllt, welche den Punktort T senkrecht schneiden, die Punkte R sind also die sphärischen Krümmungsmittelpunkte des Punktorts T.

2. Bei einem drillungslosen Streifen ($F_1 = 0$) fallen die Schwellen mit den Ritzlinien zusammen. Die Bögen TR entsprechender Punktepaare des Kugelrisses sind daher alle gleich den Bögen TS, d.h. der Hüllort R des Kugelrisses ist eine Schleppkurve des Punktortes T. Der Hüllort R eines drillungslosen Streifens läßt sich außerdem auf folgende anschauliche Art erzeugen: Der Polriß eines drillungsfreien Streifens ist ein Großkreis ($F_1 = 0$). Die sphärische Rollbewegung ist demnach eine Evolventenbewegung mit dem Polriß-Großkreis als Rad (Abb. 8). Der Mittelpunkt T' des Rades erzeugt als Rollkurve den Punktort T des Kugel-

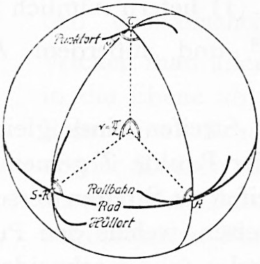

Fig. 8

risses, die Speichen $T'R'$ $\left(= \frac{\pi}{2}\right)$ des Rades umhüllen den Hüllort R des Kugelrisses, die den Hüllort senkrecht schneidenden Großkreise umhüllen die Rollbahn, welche sich hierdurch als duales Gebilde zum Punktort T des Kugelrisses erweist. Bei einem drillungsfreien Schraubenstreifen spezialisieren sich die Rollbahn und der Punktort T zu Kreisen, deren Radien sich um $\frac{\pi}{2}$ unterscheiden. Der Wickelriß eines drillungsfreien Streifens besteht aus einer einzigen Geraden durch O.

14. Besondere Planstreifen

1. Die „schraubenartigen" Planstreifen sind durch einen Formpfeil fester Richtung $\mathfrak{F}(s) = F(s)\,\mathfrak{k}$ ($\mathfrak{k} = \text{const}$) gekennzeichnet. Der Polriß ist ein Punkt und die Rollbewegung im Kugelriß spezialisiert sich zu einer reinen Drehung um einen festen Punkt,

in welchen sowohl das Rad (= Polriß) als auch die Rollbahn entarten. Im Kugelriß ist sowohl der von T' beschriebene Punktort T als auch der vom Großkreis $T'S'$ erzeugte Hüllort R ein Kreis.

Die schraubenartigen Streifen sind eine natürliche Verallgemeinerung der in Ziff. 3 behandelten Schraubenstreifen. Bei diesen hat der Formpfeil auch konstante Länge (F = const) und die Bezifferung der beiden Kreisbögen des Kugelrisses nach der Bogenlänge s ist eine gleichmäßige. Jeder schraubenartige Streifen ist zu einer Schar ähnlicher Schraubenstreifen stellungsverwandt.

Aus der Stellungsverwandtheit folgt, daß die Mittellinie eines schraubenartigen Streifens auf einem allgemeinen Zylinder liegt und die Mantellinien dieses Zylinders unter dem festen Winkel α schneidet; sie ist geodätische Linie des Zylinders. Die von den Tangentenebenen des Streifens umhüllte Torse der Ritzlinien ist eine Böschungsfläche.

Wie aus den Schraubenstreifen kann man auch aus den schraubenartigen Streifen gleichwinklige Büschel aufbauen.

Als Beispiel schraubenartiger Streifen seien die durch $\mathfrak{F}(s) = \mathfrak{k}/s$ definierten „Schneckenstreifen" genannt. Der die Mittellinie enthaltende Zylinder hat eine logarithmische Spirale als Querschnitt, woraus man folgern kann, daß die Mittellinie außerdem auf einem Drehkegel liegt und die Mantellinien dieses Kegels gleichwinklig schneidet („Kegelspirale").

2. Als weiteren Sonderfall betrachten wir nun die Planstreifen, bei denen der Formpfeil $\mathfrak{F}(s) = F \cdot \mathfrak{k}(s)$ eine feste Länge F, jedoch veränderliche Richtung hat. Ein Beispiel hierfür bilden die Streifen, deren Polbilder und demnach auch Polrisse Kreise sind und bei denen die Rollbewegung im Kugelriß durch ein kreisförmiges Rad (= Polriß) und eine kreisförmige Polbahn gegeben wird. Der von dem Punkt T' erzeugte Punktort T des Kugelrisses ist eine sphärische Zykloide, weswegen wir die Streifen dieser Art „Zykloidenstreifen" nennen wollen. Ein besonders einfacher Zykloidenstreifen ist der folgende: Die Mittellinie ist ein Kreis und die Tangentenebene des Streifens dreht sich proportional zur Bogenlänge des Kreises. Wählt man den Proportionalitätsfaktor so, daß auf den vollen Kreisumfang eine Drehung

um $\frac{\pi}{2}$ kommt, dann fällt der Ausgangsstreifen mit seinem Zwillingsstreifen nach einem vollen Umgang zusammen und bildet mit ihm ein verschlungenes Band. Abb. 9 gibt die Schwellenfläche eines solchen Bandes wieder.

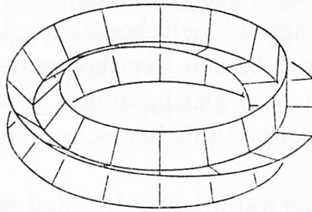

Fig. 9

3. Die „Walzenstreifen" berühren längs der Mittellinie einen Zylinder. Die Ritzlinien fallen mit den Mantellinien des Zylinders zusammen, sind also parallel und liefern im Kugelriß einen in einen festen Punkt R entarteten Hüllort. Vorgegeben sei der nach s bezifferte Polriß der Punkte $A'_1 A'_2 \ldots$ samt den Bezugspunkten T' und S'. Man muß nun die Krümmung der Rollbahn so abstimmen, daß der Hüllort, der bei der Rollbewegung von den Großkreisen TS eingehüllt wird, in einen festen Punkt R der Kugel entartet. Aus den Krümmungen G und g des Polrisses und der Rollbahn und aus der Zuordnung der Bogenlängen σ und s von Polriß und Streifenmittellinie ist hierauf nach Gl. (6) die Länge $F(s)$ der Formpfeile bestimmt. Um die Rollbahn der oben aufgestellten Forderung entsprechend zu ermitteln, denken wir uns von den Punkten $A'_1 A'_2 \ldots$ des Polrisses die sphärischen Lote $A'_1 R'_1$, $A'_2 R'_2$, . . . auf den Großkreis $T' S'$ gefällt. Diese Lote werden sodann vom Punkt R'_1 als gemeinsamem Anfangspunkt aus abgetragen und dabei so gegeneinander verdreht, daß die Bogenlängen zwischen den freien Endpunkten $A''_1 A''_2 \ldots$ gleich den entsprechenden Bogenlängen $A'_1 A'_2 \ldots$ des vorgegebenen Polrisses werden. Die Punkte $A''_1 A''_2 \ldots$ bilden die gesuchte Rollbahn.

4. Zwillinge von Walzenstreifen. Ein bemerkenswertes Beispiel der Walzenstreifen bilden jene, deren Zwillinge wieder Walzenstreifen sind. Die Zwillingspaare solcher Walzenstreifen

haben im Kugelriß dieselbe sphärische Kurve als Punktort T und ein Punktepaar R, $\bar{R}$ als Hüllörter. Da die Großkreise RT und $\bar{R}T$ sich jeweils in den Punkten T rechtwinklig schneiden, ist der Punktort T, d. h. der Kugelriß der Mittellinie des Streifens, ein sphärischer Kegelschnitt.

Man kann außerdem zeigen, daß auch die Rollbahn im Kugelriß ein sphärischer Kegelschnitt ist, der mit dem Punktort T die Achse $R\bar{R}$ gemeinsam hat, und daß der Polriß (= Rad bei der Rollbewegung im Kugelriß) von einem Kegel 4. Ordnung ausgeschnitten wird. Wir geben die Gleichungen der Kegel an, welche den Punktort T des Kugelrisses, die Rollbahn und den Polriß enthalten. Der Nullpunkt des Koordinatensystems soll im Mittelpunkt O der Einheitskugel des Kugelrisses liegen, die z-Achse durch den Mittelpunkt des Großkreisbogens $R\bar{R}$ gehen und die y-Achse auf der Ebene dieses Großkreisbogens senkrecht stehen. Ferner sei 2α der Winkel der Kugelradien OR und $O\bar{R}$. Dann erhält man

$$x^2 \cos^2 \alpha + y^2 \cos 2\alpha - z^2 \sin^2 \alpha = 0 \tag{10}$$

für den Kegel durch den Punktort T des Kugelrisses,

$$x^2 \cos^2 \alpha + \frac{y^2}{\cos 2\alpha} - z^2 \sin^2 \alpha = 0 \tag{11}$$

für den Kegel durch die Rollbahn und

$$(x^2 + z^2)\,(y^2 + z^2) \cos 2\alpha - z^4 = 0 \tag{12}$$

für den Kegel durch den Polriß.

Nachdem der Punktort T, d. h. der Kugelriß der Streifenmittellinie, gefunden ist, kann man diese durch Quadraturen ermitteln, wobei eine beliebige Kurve der x, y-Ebene als Grundriß vorgegeben werden darf. Die beiden durch die Mittellinie hindurchgehenden, sich in ihr senkrecht durchsetzenden und die beiden Walzenstreifen berührenden Zylinder sind dann durch die Richtungen OR und $O\bar{R}$ der Hüllörter des Kugelrisses festgelegt.

15. Parallele Planstreifen

Der Begriff des Parallelismus vereinigt bei den ebenen Kurven die Eigenschaft der Gleichabständigkeit entsprechender Punkte und die Eigenschaft der Parallelität entsprechender Tangenten. Bei nichtebenen Kurven treten diese beiden Eigenschaften nur dann vereinigt auf, wenn die Kurven auf einer gemeinsamen Torse liegen und die Mantellinien dieser Torse senkrecht schneiden.

Unter „parallelen“ Planstreifen verstehen wir solche mit gemeinsamen Flächennormalen. Ausgehend von einem beliebigen Planstreifen tragen wir also auf dessen Normalen eine feste Strecke ab und erhalten mit den Endpunkten der Strecken die Mittellinie des parallelen Streifens. Entsprechende Punkte der Mittellinien paralleler Streifen haben gleichen Abstand, entsprechende Tangentenebenen sind parallel, entsprechende Tangenten der Mittellinien dagegen sind nur dann parallel, wenn die Flächennormalen der parallelen Streifen eine Torse bilden. Die Zwillinge paralleler Planstreifen berühren die Normalenfläche, entsprechende Tangentenebenen der beiden Zwillingsstreifen sind nur dann identisch, wenn die Normalenfläche eine Torse ist.

Über Sonderfälle paralleler Planstreifen ist folgendes zu bemerken:

1. Ist der Ausgangsstreifen ein Schmiegstreifen, so sind die Streifennormalen die Binormalen der Mittellinie und diese ist geodätische Linie und Kehllinie der Normalenfläche. Keine dieser Eigenschaften findet sich im Parallelstreifen wieder.

2. Ist der Ausgangsstreifen ein geodätischer Streifen, so sind die Streifennormalen die Hauptnormalen der Mittellinie und diese ist Schmiegtangentenlinie der Normalenfläche. Keine dieser Eigenschaften findet sich im Parallelstreifen wieder.

3. Ist der Ausgangsstreifen drillungslos, so ist die Normalenfläche eine Torse und auch die Parallelstreifen sind drillungslos. Sowohl die Tangenten der Mittellinien als auch die Berührebenen paralleler drillungsloser Streifen sind zueinander parallel. Die Zwillinge paralleler drillungsloser Streifen haben gemeinsame Schwellen und gemeinsame Tangentenebenen.

4. Ist der Ausgangsstreifen sphärisch, so sind auch die Parallelstreifen sphärisch. Die Zwillinge der sphärischen Parallelstreifen haben als Mittellinien wieder sphärische Kurven; sie sind keine sphärischen Streifen, sondern gegen die sphärischen Streifen durch ihre Mittellinie unter einem rechten Winkel geneigt.

Der Wickelriß eines drillungslosen Streifens reduziert sich nach Ziff. 12 auf einen festen Punkt O als Riß der Mittellinie und eine durch diesen Punkt gehende feste Gerade r als Riß der Schwellen (= Ritzlinien). Parallele drillungsfreie Streifen liefern im Wickelriß parallele Geraden; die Wickelrisse O der Mittellinien liegen auf einer zu den Geraden r senkrechten Geraden.