Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Zusammenhänge zwischen den Theorien der Kurvenkongruenzen und der Flächenabbildungen

Von Frank Löbell in München

Vorgelegt am 6. Juni 1952

In einer an anderer Stelle[1] erschienenen Arbeit hat der Verfasser zu zeigen versucht, wie einfach und geschlossen die von A. Voss und R. v. Lilienthal begründete, von P. Delens und F. Emde weiter entwickelte Lehre von den Kurvenkongruenzen im reellen euklidischen Raum mittels der von E. N. Laguerre stammenden kinematischen Methode des begleitenden Dreibeins aufgebaut werden kann.

Es ist reizvoll, damit einen anderen Weg zu vergleichen, der im folgenden beschritten werden soll: Die Grundbegriffe der Theorie werden durch Zurückführung auf die Begriffsbildungen der allgemeinen Theorie der Abbildung zweier Flächen aufeinder gewonnen werden.

1. Um das Feld der tangentialen Einheitsvektoren $\mathfrak{e}$ einer gegebenen Kongruenz orientierter Kurven in der Umgebung eines regulären Punktes P zu untersuchen, legen wir durch P eine Fläche, die dort zu $\mathfrak{e}$ normal sei und die etwa als Ebene angenommen werden mag; der Ortsvektor ihrer Punkte sei $\mathfrak{r}$. Es liegt nahe, diese Fläche nach dem klassischen Vorbild, das C. F. Gauss in seinen Disquisitiones generales für die Flächentheorie gegeben hat, auf die Einheitskugel der von einem festen Punkt O abgetragenen Vektoren $\mathfrak{e}$ abzubilden, so zwar, daß jedem Flächenpunkt $\mathfrak{r}$ der Endpunkt des von ihm ausgehenden, mit seinem Anfangspunkt nach O parallel verschobenen Vektors $\mathfrak{e}$ entspricht.

Diese sphärische Abbildung wird uns neue Möglichkeiten der Deutung der früher eingeführten, für die Kongruenz maßgebenden Größen bieten, hinsichtlich deren Benennung auf die oben genannte Arbeit hingewiesen sei.

[1] Natürliche Geometrie der Kurvenkongruenzen. Mathematische Zeitschr. 56 (1952), S. 208–218.

2. Die geometrische Ableitung von $\mathfrak{r}$, der Einheitsvektor $\frac{d\mathfrak{r}}{ds}$, werde mit $\mathfrak{a}$, der aus ihm durch Drehung um $\mathfrak{e}$ durch den Winkel $+\frac{\pi}{2}$ hervorgehende Vektor $\mathfrak{e}\times\mathfrak{a}$ mit $\mathfrak{a}^*$ bezeichnet. Dann ist der lineare „Maßstab" der Abbildung $\mathfrak{r}\to\mathfrak{e}$ für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$, d. i. das Verhältnis der Längen von $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ und $\frac{d\mathfrak{r}}{ds}$ zueinander, die *Neigung* g der Kurvenkongruenz an der Stelle P für die Richtung $\mathfrak{a}$. Die „Hauptmaßstäbe" der Abbildung sind die *Hauptneigungen* g' und g'' der Kongruenz.[2]

Die bekannte Relation, die das Quadrat des linearen Maßstabes einer Flächenabbildung als Funktion der Hauptmaßstäbe und des Richtungswinkels χ gegen die erste „Hauptrichtung" gibt, gewinnt hier folgendes Aussehen:

$$g^2 = g'^2 \cos^2\chi + g''^2 \sin^2\chi .$$

Man könnte dies auch durch Quadrieren des *Neigungsvektors* $\mathfrak{g} = \mathfrak{e}\times\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ oder einfach des Vektors $\frac{d\mathfrak{e}}{ds}$ finden.

Der „Flächenmaßstab" der sphärischen Abbildung $\mathfrak{r}\to\mathfrak{e}$ ist

$$M = \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_1}\times\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_2} : \frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial s_1}\times\frac{\partial\mathfrak{r}}{\partial s_2},$$

wo die Indizes die zu zwei verschiedenen, auf $\mathfrak{e}$ senkrechten Richtungen $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ gehörenden Größen kennzeichnen; diese Zahl ist aber das *Neigungsmaß* N der Kongruenz an der Stelle P. Wie bekannt, ist M gleich dem Produkt der linearen Hauptmaßstäbe, in Übereinstimmung mit dem Satze, daß das Neigungsmaß gleich dem Produkt der Hauptneigungen ist.

Soweit haben wir aus der Lehre von den Flächenabbildungen nur solche Größen benützt, die von den Lagen der beiden einander entsprechenden Flächen u n a b h ä n g i g sind;[3] zu beachten ist nur, daß der Flächenmaßstab, weil sich die Flächen $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{e}$ in dem einen Punkte P mit gleichgerichteten Normalen entsprechen, auch dem Vorzeichen nach eindeutig bestimmt ist.

---

[2] Bekannte oder in den später zitierten Arbeiten eingeführte Bezeichnungen sind in der vorliegenden Note in Anführungszeichen gesetzt.

[3] Allgemeine Theorie der Flächenabbildungen. Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, 1942, S. 299 ff.

3. Die Größen, die für die relativen Lagen entsprechender Elemente eines Paares einander zugeordneter Flächen charakteristisch sind,[4] der „Rißmaßstab" $\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \mathfrak{a}\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{e}$ und der „Querrißmaßstab" $\mathfrak{e}\,\frac{d\mathfrak{x}}{ds}\frac{d\mathfrak{e}}{ds} = \mathfrak{a}^*\,\mathfrak{g}\,\mathfrak{e}$ erweisen sich als die *Spreizung* $b = \mathfrak{g}\,\mathfrak{a}^*$ und die *negative Schränkung* $-a = -\mathfrak{g}\,\mathfrak{a}$ der Kongruenz für das Linienelement $(P, \mathfrak{a})$. Hierbei ist die Grundformel der Theorie des begleitenden Dreibeins im euklidischen Raum angewandt worden, nach der, mit $\mathfrak{d}$ als momentanem Drehvektor,

$$\frac{d\mathfrak{q}}{ds} = \mathfrak{d} \times \mathfrak{q}$$

ist für jeden mit dem Dreikant fest verbundenen Vektor $\mathfrak{q}$; und zwar wurde $\mathfrak{q} = \mathfrak{e}$ eingesetzt, so daß nur die zu $\mathfrak{e}$ normale Komponente $\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{d}$ zur Geltung kommt.

Die Relationen, die zwischen den „Rißmaßstabsgrößen" für die verschiedenen, von einem Punkt ausstrahlenden Richtungen bestehen, gehen in die Beziehungen zwischen den Neigungsgrößen über, die in der anfangs erwähnten Arbeit bewiesen werden.

4. Ziehen wir schließlich die Differentialinvarianten der Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{e}$ heran, welche die absoluten Lagen entsprechender Elemente der beiden Flächen im Vektorenraum festlegen,[5] so finden wir unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{a}_1$ und $\mathfrak{a}_2$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren sind, als „Schiefe" der Abbildung

$$J = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_1}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_2} - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_2}\frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_1} = \mathfrak{a}_1\,\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{e} - \mathfrak{a}_2\,\mathfrak{g}_1\,\mathfrak{e} = \mathfrak{g}_2\,\mathfrak{a}_2 + \mathfrak{g}_1\,\mathfrak{a}_1$$

das Doppelte der *mittleren Schränkung* der Kongruenz, $2\,A = a_1 + a_2$, und als „Spreizvektor" der Abbildung

$$\mathfrak{J} = \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_1} \times \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_2} - \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial s_2} \times \frac{\partial\mathfrak{e}}{\partial s_1} =$$

$$\mathfrak{a}_1 \times (\mathfrak{g}_2 \times \mathfrak{e}) - \mathfrak{a}_2 \times (\mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{e}) = -\,\mathfrak{e}\cdot\mathfrak{g}_2\,\mathfrak{a}_1 + \mathfrak{e}\cdot\mathfrak{g}_1\mathfrak{a}_2$$

---

[4] Betrachtungen über Flächenabbildungen. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 15 ff.

[5] Differentialinvarianten bei Flächenabbildungen. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 217 ff.

Über einige Integralinvarianten, die bei Flächenabbildungen auftreten. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 107 ff.

den mit der doppelten *mittleren Spreizung* $2B = b_1 + b_2$ multiplizierten Vektor $\mathfrak{e}$.

Der „Spreizwert" $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}$ der Abbildung ergibt sich hiernach, weil $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{e}$ ist, gleich dem Doppelten der mittleren Spreizung der Kongruenz. Der Skalar $\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2$ aber ist, da $\mathfrak{J}_2 = M\,\mathfrak{e}$ ist, wiederum als das Neigungsmaß der Kongruenz an der betrachteten Stelle zu erkennen.

Das „Verdrehungsmaß" der Abbildung, von dem hier gesprochen werden darf, weil die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{e}$ im Punkte P einander mit parallelen Berührebenen zugewiesen sind, stimmt mit dem *Schwenkungsmaß* $\operatorname{tg} \delta_0 = -A:B$ der Kongruenz an dieser Stelle überein.

5. Für die Kurvenkongruenz sind die vier *quadratischen Differentialformen*

$$d\mathfrak{e}^2, \quad d\mathfrak{x}^2, \quad d\mathfrak{e}\,d\mathfrak{x}, \quad \mathfrak{e}\,d\mathfrak{e}\,d\mathfrak{x}$$

bedeutungsvoll. Zwischen ihnen gilt eine Beziehung, die bei einer früheren Gelegenheit[6] allgemein aus dem Entsprechen von Flächen mit gleichgerichteten Normalen hergeleitet wurde und die hier die Form annimmt:

$$d\mathfrak{e}^2 + N\,d\mathfrak{x}^2 - 2\,B\,d\mathfrak{e}\,d\mathfrak{x} - 2\,A\,\mathfrak{e}\,d\mathfrak{e}\,d\mathfrak{x} = 0.$$

Dafür, daß schon die drei ersten der Formen linear abhängig sind, ist demnach notwendig und hinreichend, daß die mittlere Schränkung verschwindet; dies aber ist der Fall bei einer Kongruenz, die Orthogonalflächen besitzt, woraus zu erkennen ist, daß unsere Beziehung eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache der linearen Abhängigkeit der drei Grundformen einer Fläche ist.

6. Zum Schluß sei nur noch auf Folgendes hingewiesen: Im Sonderfall der hauptsächlich von E. E. Kummer und von G. Sannia studierten Strahlensysteme können die Zusammenhänge zwischen den Neigungsgrößen der Kongruenz an zwei Stellen P und $\bar{P}$, die im Abstand l auf einer und derselben Systemgeraden liegen, auch dann mit Hilfe der oben verwendeten Begriffsbildungen leicht angegeben werden, wenn es sich um Größen handelt, die in den früheren Theorien noch nicht betrachtet wurden.

---

[6] Zur Theorie der Flächenabbildungen, Math. Zeitschr. 49 (1943), S. 427 ff., bes. S. 438 (18).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1953

Band/Volume: 1952

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Zusammenhänge zwischen den Theorien der Kurvenkongruenzen und der Flächenabbildungen 47-50