Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1952

München 1953
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden

Von Karl Strubecker in Karlsruhe

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 4. Juli 1952

1. In seiner Abhandlung über „*Infinitesimale Verbiegung der Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasi-Rückungsnetz bilden*" (Sitzber. Bayer. Akad. Wiss. München, 1949, 1–12) gelingt es R. Sauer, eine neue umfangreiche Klasse von *Flächen* Φ anzugeben, *deren infinitesimale Verbiegungen* sich in geschlossener Form durch *Quadraturen* darstellen lassen.

Es handelt sich dabei um *jene Flächen* Φ, *deren Asymptotenlinien* ($\mathfrak{u}$ = const, $\mathfrak{v}$ = const) *im Grundriß* (Normalriß auf die Ebene $z = 0$) *ein Rückungsnetz (Schiebnetz) bilden*, die also auf der Fläche Φ selbst (in R. Sauers Ausdrucksweise) ein „*Quasi-Rückungsnetz*" bilden.

R. Sauer leitet in der Arbeit zuerst eine *Integraldarstellung* aller dieser Flächen Φ her. Diese lautet (bis auf unwesentliche affine Umformungen):

$$
\begin{aligned}
x &= U_1(\mathfrak{u}) + V_1(\mathfrak{v}) \\
y &= U_2(\mathfrak{u}) + V_2(\mathfrak{v}) \qquad (1)\\
z &= (U_2 V_1 - U_1 V_2) + \int (U_1' U_2 - U_1 U_2')\, d\mathfrak{u} + \\
&\qquad + \int (V_2' V_1 - V_1' V_2)\, d\mathfrak{v}.
\end{aligned}
$$

Dabei darf die Funktionaldeterminante der willkürlichen Funktionen $U_1(\mathfrak{u})$, $U_2(\mathfrak{u})$, $V_1(\mathfrak{v})$, $V_2(\mathfrak{v})$ nicht verschwinden. $\mathfrak{u}$ = const. und $\mathfrak{v}$ = const. liefert die *Asymptotenlinien* der Fläche Φ.

Aus diesen Normalflächen erhält man den allgemeinen Typus der Flächen Φ durch die Affinitäten der Gruppe $\mathfrak{G}_6$

$$
\begin{aligned}
x' &= a + x \\
y' &= b \qquad\quad + y \qquad (2)\\
z' &= c + c_1 x + c_2 y + k z.
\end{aligned}
$$

Es würde sogar die Untergruppe $\mathfrak{G}_4$ mit $a = b = 0$ genügen.

2. Ich möchte in diesen Zeilen das Augenmerk darauf richten, daß die Flächen Φ der Darstellung (1) schon von verschiedenen Autoren[1] studiert worden sind. Sie lassen sich am einfachsten mittels der von mir entwickelten *Differentialgeometrie des isotropen Raumes* kennzeichnen, in der sie mit den *Flächen* $z = z(x, y)$ *der festen Relativkrümmung*

$$K = z_{xx} z_{yy} - z_{xy}^2 = -1 \tag{3}$$

identisch sind[2].

Da die Metrik des isotropen Raumes das Bogenelementquadrat

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 \tag{4}$$

hat, kann man die Affinitäten (2) als isotrope Bewegungen bezeichnen; ich nenne sie *modulare isotrope Bewegungen*, weil sie die Rauminhalte mit dem Modul k multiplizieren. Durch solche modulare Bewegungen entsteht aus einer Fläche (1) der isotropen Relativkrümmung $K = -1$ eine solche der festen Relativkrümmung $K = -\frac{1}{k^2}$.

Man kann die Darstellung (1) der Flächen Φ von den Integralzeichen befreien, indem man z. B. setzt

$$\begin{aligned} U_1(\mathfrak{u}) &= u & V_1(\mathfrak{v}) &= v \\ U_2(\mathfrak{u}) &= U'(u) & V_2(\mathfrak{v}) &= V'(v), \end{aligned} \tag{5}$$

wodurch die Integrationen ausführbar werden. Man erhält so die folgende *integrallose Darstellung der Flächen* Φ:

---

[1] Die Flächen, deren Asymptotenlinien ein Quasirückungsnetz bilden, hat schon G. Scheffers bestimmt [Math. Z. 5, 112–117 (1919)]. Die Flächen finden sich aber mit anderen Kennzeichnungen u. a. auch bei G. Darboux [Théorie des surfaces III, 273–274 (1894)], E. Müller [Monatshefte Math. Phys. **31**, 1–19 (1921)], W. Blaschke [Vorlesungen über Differentialgeometrie II (Affine Differentialgeometrie, bearbeitet von K. Reidemeister) § 78], E. Salkowski [Sitz.Ber. Berliner Math. Ges. **28**, 114–123 (1929) und Calcutta Math. Soc. Bull. **20**, 295–308 (1930)]. Viele ältere Literaturbelege finden sich bei K. Strubecker, Deutsche Mathematik **6**, 507–524 (1942) in Fußnote 1.

[2] K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes II „Die Flächen konstanter Relativkrümmung $K = rt - s^2$", Math. Z. **47**, 743–777 (1942).

$$
(6)\qquad \left|\begin{array}{ll} x = u + v & (U''(u) \neq V''(v)) \\ y = U' + V' & \\ z = 2(U - V) + (v - u)(U' + V'), & \end{array}\right.
$$

die in der Literatur schon bei G. Darboux[1] vorkommt.

3. Die isotrope Differentialgeometrie liefert auch eine sehr einfache *kinematische Erzeugungsweise der Flächen* Φ.

Setzen wir in (2) $k = 1$, so erhält man die Gruppe $\mathfrak{G}_5$ der (inhaltstreuen) *isotropen Grenzbewegungen*, die man als das Produkt zweier Cliffordschen *Schiebungsgruppen* auffassen kann ($\mathfrak{G}_5 = S_3^l \cdot S_3^r = S_3^r \cdot S_3^l$), nämlich der Gruppen von Cliffordschen

Linksschiebungen S_3^l	Rechtsschiebungen S_3^r
$x' = \xi_l + x$	$x' = \xi_r + x$
(7) $y' = \eta_l + y$	$y' = \eta_r + y$
$z' = \zeta_l - \eta_l x + \xi_l y + z$	$z' = \zeta_r + \eta_r x - \xi_r y + z$

Diese Cliffordschen Schiebungen wirken sich im Grundriß als ebene Parallelverschiebungen aus. Ihr Produkt ist kommutativ und liefert die Grenzbewegung

$$
(8)\qquad \begin{array}{l} x' = (\xi_r + \xi_l) + x \\ y' = (\eta_r + \eta_l) + y \\ z' = (\zeta_r + \zeta_l + \xi_r \eta_l - \eta_r \xi_l) + (\eta_l - \eta_r) x + (\xi_r - \xi_l) y + z. \end{array}
$$

Jede dieser Cliffordschen Schiebungsgruppen vertauscht (wie die euklidischen Parallelverschiebungen) die Punkte des isotropen Raumes einfach transitiv.

Die Formeln (6) besagen nun einfach, daß die Fläche Φ erzeugt werden kann einerseits durch Cliffordsche Linksschiebung ihrer u-Linien c_l längs der v-Linien c_r, andererseits durch Rechtsschiebung ihrer v-Linien c_r längs der u-Linien c_l.

4. Die *Asymptotenlinien* c_l ($v =$ const) und c_r ($u =$ const.) der Flächen Φ genügen, wie man leicht bestätigt, den folgenden Pfaffschen Gleichungen:

a) u-Linien $c_l\,(v = \text{const.})$:

$$dz = -2V'(v)\,dx + 2v\,dy - (x\,dy - y\,dx), \tag{9}$$

b) v-Linien $c_r\,(u = \text{const.})$:

$$dz = 2U'(u)\,dx - 2u\,dy + (x\,dy - y\,dx). \tag{10}$$

Die *Asymptotenlinien* der Flächen Φ sind also sämtlich *Gewindekurven* und liegen in den Gewinden (9) und (10) zweier involutorischer Gewindebündel.

Die Kurven $\mathfrak{x}(t)$ dieser Gewinde (9) bzw. (10) sind durch die Eigenschaft gekennzeichnet, daß ihre *isotrope Torsion*

$$\tau = \frac{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}\,\dddot{\mathfrak{x}}]}{[\dot{\mathfrak{x}}\,\ddot{\mathfrak{x}}]^2} = \frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} \\ \ddot{x} & \ddot{y} \end{vmatrix}^2} \tag{11}$$

den *festen Wert* $\tau_l = -1$ (u-Linien c_l) bzw. $\tau_r = +1$ (v-Linien c_r) besitzen.

Das stimmt mit dem (auch im isotropen Raume gültigen) *Satze von Beltrami und Enneper* überein, nach dem die isotrope Krümmung K (Relativkrümmung) der Flächen Φ den konstanten Wert

$$K = \tau_l \cdot \tau_r = -1 \tag{12}$$

hat.

5. Ersetzt man in unseren Formeln z durch (iz), so erhält man aus den Flächen Φ mit der festen isotropen Krümmung $K = -1$ die Klasse der Flächen Ψ mit der festen isotropen Krümmung $K = +1$. Wir führen dann, um reelle Formeln zu erhalten, die neuen Parameter

$$u = \alpha + i\beta, \quad v = \alpha - i\beta \tag{13}$$

in die willkürlichen analytischen Funktionen

$$\begin{aligned} U(u) &= U(\alpha + i\beta) = A(\alpha, \beta) + i\,B(\alpha, \beta) \\ V(v) &= \bar{U}(\alpha - i\beta) = A(\alpha, \beta) - i\,B(\alpha, \beta) \end{aligned} \tag{14}$$

ein, so daß die Cauchy-Riemannschen Gleichungen

$$(15)\qquad A_\alpha = B_\beta, \quad A_\beta = -B_\alpha$$

gelten und die Ableitungsformeln

$$(16)\qquad U'(u) = A_\alpha - i A_\beta, \quad V'(v) = A_\alpha + i A_\beta.$$

Für die Flächen Ψ mit der festen isotropen Krümmung $K = +1$ erhält man damit aus (6) die *integralfreie Darstellung*

$$(17)\qquad \begin{cases} x = 2\,\Re u & = 2\alpha \\ y = 2\,\Re U'(u) & = 2 A_\alpha(\alpha, \beta) \\ z = 4\,\Im(U(u) - u \cdot \Re U'(u)) & = 4(B(\alpha, \beta) - \beta \cdot A_\alpha(\alpha, \beta)). \end{cases}$$

Um wirklich eine Fläche zu erhalten, ist $A_{\alpha\beta} \neq 0$ vorauszusetzen.

Natürlich haben auch die *Asymptotenlinien* $c_r(u = \alpha + i\beta = \text{const.})$ und $c_l(v = \alpha - i\beta = \text{const.})$ dieser Flächen Ψ konstante isotrope Torsion $\tau_r = -i$ bzw. $\tau_l = +i$, und diese Asymptotenlinien c_l, c_r sind Gewindekurven aus den Gewinden zweier involutorischer Bündel. Man sieht auch leicht, daß die Linien $\alpha = \text{const.}$ und $\beta = \text{const.}$ auf den Flächen Ψ ein konjugiertes Netz bilden.

6. Wegen der Bedeutung, die den Flächen Φ und Ψ in der isotropen, aber auch in der affinen und euklidischen Differentialgeometrie zukommt, ist es begreiflich, daß auch manche besondere Flächen Φ und Ψ in der Literatur schon eingehender studiert wurden. So finden sich R. Sauers Beispiele (10a) und (12a) in meiner Arbeit[2] in Nr. 47 und Nr. 48 als *Normfälle von Drehflächen der festen isotropen Krümmung* $K = -1$ *und* $K = +1$.

Die erste Drehfläche Φ_1 der Relativkrümmung $K = -1$ ähnelt dem *Spindeltypus* der euklidischen Drehfläche mit dem festen Gaußschen Krümmungsmaß -1. Man kann ihre Gleichung in Zylinderkoordinaten (r, φ, z) in der Form

$$(18)\qquad z = \int_1^r \sqrt{1 - r^2}\, dr$$

schreiben. Ihre Asymptotenlinien sind Schraublinien des isotropen Raumes, die sich im Normalriß auf die Ebene $z = 0$

als Drehschar (und Schiebschar) der Kreise vom Radius 1/2 durch den Nullpunkt darstellen. Es gibt ein bei M. Schilling erschienenes Gipsmodell dieser interessanten Fläche mit aufgezeichneten Asymptotenlinien.

Die zweite Drehfläche Ψ_1 der Relativkrümmung $K = +1$ ist mit der *Evolutenfläche des Katenoids* identisch, die für die euklidische Biegungstheorie bedeutsam ist. Man kann ihre Gleichung in Zylinderkoordinaten in der Form

$$z = \int_1^r \sqrt{r^2 - 1}\, dr \tag{19}$$

schreiben. Sie ist wegen $K = +1$ elliptisch gekrümmt und hat einen Rückkehrkreis (Radius 1) und ihre (paarweise konjugiert komplexen) Asymptotenlinien (gleichfalls isotrope Schraublinien) haben als Grundrisse wieder die Drehschar der durch den Nullpunkt gehenden reellen Kreise vom Radius 1/2.

Neben dieser ersten Normalform Ψ_1 von Drehflächen konstanter positiver isotroper Krümmung $K = +1$ gibt es übrigens noch eine zweite Normalform Ψ_2 mit der Zylindergleichung

$$z = \int_0^r \sqrt{1 + r^2}\, dr \tag{20}$$

oder der Parameterdarstellung

$$x = \cos\varphi \,\mathfrak{Sin}\,\psi, \quad y = \sin\varphi \,\mathfrak{Sin}\,\psi, \quad z = \frac{1}{2}(\psi + \mathfrak{Sin}\,\psi \,\mathfrak{Cof}\,\psi). \tag{21}$$

Diese Drehfläche Ψ_2 hat topologisch den Zusammenhang eines Doppelkegels. Der Nullpunkt ist ein konischer Knotenpunkt. Diese Drehfläche hat den nullteiligen Kreis $x^2 + y^2 + 1 = 0$, $z = 0$ als Rückkehrkurve, ihre Asymptotenlinien sind ebenfalls komplexe isotrope Schraublinien, deren Grundrisse komplexe Kreise vom Radius $\frac{i}{2}$ durch den (reellen) Nullpunkt sind. Diese Fläche Ψ_2 tritt auch in der euklidischen Geometrie als Biegungsfläche eines reellen Drehparaboloids auf.

Die Sauersche Fläche (10c) habe ich[3] mit Hilfe der Methoden der parataktischen Abbildung[4] studiert. Sie hat bei mir die Gestalt

$$x = u + v, \quad y = u^2 + v^2, \quad z = \frac{1}{3}(u - v)^3 \tag{22}$$

und die Gleichung

$$9z^2 = (2y - x^2)^3 \tag{23}$$

ist also algebraisch und von 6. Ordnung und besitzt die Parabel $u = v$ als Rückkehrkante, hat die Parameterlinien als *kubische Asymptotenlinien*, und gestattet eine stetige zweigliedrige Gruppe von affinen Automorphien.

7. Als weitere wichtige *Beispiele von Flächen* Φ und Ψ möchte ich noch die folgenden Flächen aufschreiben.

Die Formeln

$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(a\cos u + b\cos v) \\ y &= \frac{1}{2}(a\sin u + b\sin v) \\ z &= \frac{1}{4}[a^2 u - b^2 v - ab\sin(u - v)] \end{aligned}\right. \tag{24}$$

liefern den *Normfall der Schraubflächen* Φ_2 *mit der festen isotropen Krümmung* $K = -1$.

Ihre beiden Scharen von Asymptotenlinien bestehen aus isotropen Schraublinien. (Die Grundrisse sind Kreise der Radien $a/2$ und $b/2$, deren Mitten auf konzentrischen Kreisen der Radien $b/2$ und $a/2$ liegen. Diese beiden Drehscharen (und Schiebscharen) von Kreisen umhüllen zwei konzentrische Kreise k_1 und k_2 der Radien $\frac{|a \pm b|}{2}$, denen auf der Fläche Φ_2 zwei von den Schraublinien $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ umhüllte singuläre

---

[3] K. Strubecker, Differentialgeometrie des isotropen Raumes IV, „Theorie der flächentreuen Abbildungen der Ebene", Math. Z. 50, 1–92 (1944), insbes. Nr. 40, Beispiel 4, Sonderfall, S. 53.

[4] K. Strubecker, „Über die parataktischen Abbildungen der Flächenelemente des isotropen Raumes auf Punktepaare der Ebene", Crelle-Journ. f. Math. 186, 1–36 (1948).

Asymptotenlinien entsprechen, nämlich zwei schraublinige Rückkehrkanten der Fläche Φ_2.

Ähnlich stellen die Formeln

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\varphi\,\operatorname{Cof}\psi + s\sin\varphi\,\operatorname{Sin}\psi\\
y &= r\sin\varphi\,\operatorname{Cof}\psi - s\cos\varphi\,\operatorname{Sin}\psi\\
z &= \frac{r^2+s^2}{2}\operatorname{Sin}\psi\,\operatorname{Cof}\psi - \frac{r^2-s^2}{2}\psi - rs\varphi
\end{aligned}
\tag{25}
$$

den *Normfall der Schraubflächen* Ψ_3 *mit der festen isotropen Krümmung* $K = +1$ dar. Für $s = 0$ bzw. $r = 0$ umfassen sie die beiden Drehflächen Ψ_1 und Ψ_2 konstanter isotroper Krümmung $K = +1$ vom Typ (19) bzw. (20).

Auf den Schraubflächen (25) sind die φ-Linien und ψ-Linien konjugiert. Da die φ-Linien die Bahnschraublinien der Flächen sind, bilden die ψ-Linien ihre *Fallinien.* Die Bahnschraublinie $\psi = 0$ ist eine Rückkehrkante der Fläche und singuläre Asymptotenlinie, nämlich Einhüllende ihrer regulären *Asymptotenlinien* $\varphi \pm i\psi = \text{const}$, die ihrerseits wieder *isotrope Schraublinien der festen Torsion* $\tau = \pm i$ sind, deren Grundrisse ein Rückungsnetz aus konjugiert-komplexen Kreisen bilden. Auch diese Schraubflächen Ψ_3 selbst lassen sich wieder erzeugen durch isotrope Cliffordsche Schiebung zweier schneidender Asymptotenlinien aneinander.