# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

---

Jahrgang 1953

---

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Zum Einbettungssatz der Differentialgeometrie

*Herrn Frank Löbell zum 60. Geburtstag am 11. Mai 1953 gewidmet*

Von **Josef Lense** in München

Vorgelegt am 5. Juni 1953

Einbettungssatz habe ich folgende Aussage genannt: Gegeben sei eine quadratische Differentialform

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu,$$

die $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$ seien, um im folgenden nicht durch Realitätsbetrachtungen gehemmt zu sein, analytische Funktionen der $n$ komplexen Veränderlichen $x_\nu$. Gesucht werden $N$ analytische Funktionen $\xi_\lambda$ der $x_\nu$, so daß identisch in den $x_\nu$ und $dx_\nu$ gilt

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{n} g_{\mu\nu}\, dx_\mu\, dx_\nu = \sum_{\lambda=1}^{N} d\xi_\lambda^2. \tag{1}$$

Es wird behauptet, die Aussage (1) ist immer möglich für $N = \frac{1}{2}\, n(n+1)$.

L. Schläfli[1] hatte zuerst diese Bemerkung gemacht, sie aber nur durch eine Abzählung in folgender Weise zu begründen versucht: Die gegebene Differentialform enthält $\frac{1}{2}\, n(n+1)$ willkürliche Funktionen der $x_\nu$, nämlich die $g_{\mu\nu}$, also muß man ebenso viele Funktionen $\xi_\lambda$ einführen, um die gewünschte Darstellung (1) zu erhalten. Diese Abzählung ist natürlich kein Beweis dafür, daß die Darstellung wirklich möglich ist. Später wurde von G. Ricci[2] darauf hingewiesen, daß die Darstellung bei besonderen Funktionen $g_{\mu\nu}$ auch für kleinere Werte von $N$ gelingen könne. Er nannte den Überschuß von $N$ über $n$ die Klasse der Form, setzte

[1] L. Schläfli, Ann. Mat. pura appl., II. Ser., Bd. 5 (1871) S. 190.
[2] G. Ricci, Ann. Mat. pura appl., II. Ser., Bd. 12 (1887) S. 135.

die Determinante der $g_{\mu\nu}$ von Null verschieden voraus und untersuchte die Bedingungen dafür, daß die Form von der Klasse 1 sei. Für die Klasse 0 ist bekanntlich bei nicht verschwindender Determinante der $g_{\mu\nu}$ das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors notwendig und hinreichend. P. Stäckel,[3] W. Wirtinger[4] und L. Berwald[5] machten darauf aufmerksam, daß die einfache Abzählung nicht genüge, um die Darstellung (1) zu beweisen, sondern man hätte nachzuweisen, daß folgendes mit (1) gleichwertige System von $\frac{1}{2} n(n+1)$ partiellen Differentialgleichungen für die unbekannten Funktionen $\xi_\lambda$ verträglich sei:

$$\sum_{\lambda=1}^{N} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\mu} \frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\nu} = g_{\mu\nu}. \tag{2}$$

Wirtingers Hinweis war der Anlaß, mich mit der genannten Fragestellung zu beschäftigen. In einem während der Versammlung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung in Innsbruck 1924 gehaltenen Vortrag[6] hatte ich unter anderem betont, daß man vier Zahlen zu betrachten habe: den Rang $r$ der Determinante der $g_{\mu\nu}$, den Rang $r'$ der Funktionalmatrix der $\frac{\partial \xi_\lambda}{\partial x_\nu}$, die Minimalzahl $k$ von Veränderlichen, auf die man die gegebene Form durch Einführung passender neuer Veränderlicher statt der $x_\nu$ bringen kann (ich habe sie analog zu den Pfaffschen Differentialformen, aber im Gegensatz zu Ricci, die Klasse der Form genannt), und schließlich die Einbettungszahl $b$, den kleinstmöglichen Wert von $N$.

Die letzte Bezeichnung sowie der Name Einbettungssatz für die obengenannte Behauptung schien mir deswegen gerechtfertigt, weil sich die ganze Fragestellung in folgender Weise geometrisch deuten läßt: Die quadratische Form kann man als Quadrat des Bogenelementes einer in den komplexen euklidischen $R_N$

---

[3] P. Stäckel, J. reine angew. Math., Bd. 113 (1894) S. 102.

[4] In einem Seminar über die mathematischen Grundlagen der Relativitätstheorie (1919).

[5] L. Berwald, Enzyklop. d. math. Wissensch. III D 11 Nr. 24 S. 156 Fußnote 321 (1923).

[6] J. Lense, J.-Ber. Deutsch. Math. Verein., Bd. 35 (1926) S. 288.

eingebetteten Mannigfaltigkeit deuten, deren Punkte durch die rechtwinkeligen Koordinaten $\xi_\lambda$ als Funktionen der Parameter $x_\nu$ gegeben sind; $r'$ ist dann die Dimension der Mannigfaltigkeit. Zwischen den genannten Zahlen bestehen, wie man leicht erkennt, die Ungleichungen $1 \leqq r \leqq k \leqq r' \leqq n, N$, die Behauptung des Einbettungssatzes drückt sich in den Ungleichungen $1 \leqq b \leqq \frac{1}{2} n(n+1)$ aus.

Bald darauf erschienen zwei Beweise dieses Satzes von M. Janet[7] und E. Cartan,[8] die aber beide nicht vollständig befriedigen. Cartan setzt $r = n$ voraus und benützt den von ihm herrührenden Kalkül der Pfaffschen Differentialformen. Da mir dieser Kalkül nicht geläufig war, hatte ich die Arbeit damals nur flüchtig angesehen; jetzt ist sie mir leider nicht zugänglich und ich kann daher nicht darüber berichten. Jedenfalls bleiben die Fälle $r < n$ unerledigt.

Janet macht über $r$ keine Voraussetzung und verwendet, um die Verträglichkeit des Systems (2) zu beweisen, die vollständige Induktion; er kommt auch zum Ziel, falls eine bestimmte Determinante nicht verschwindet, also im „allgemeinen" Fall, d. h. es gelingt ihm unter dieser Voraussetzung, die Verträglichkeit des Systems für $n$ zu beweisen, falls dessen Verträglichkeit für $n-1$ bewiesen ist. Verschwindet jedoch die erwähnte Determinante identisch, so kommt man auf eine algebraische Fragestellung, die er, wie er selbst sagt, nicht erhellen konnte außer im Fall $n = 2$. Für $n = 1$ ist die Aufgabe natürlich unmittelbar zu lösen:

$$g_{11}\, dx_1^2 = d\xi_1^2 \quad \text{mit} \quad \xi_1 = \int \sqrt{g_{11}}\, dx_1 .$$

Für $n = 2$ gibt Janet in dem genannten Ausnahmefall das Ergebnis mit der Bemerkung an, daß nur eine einfache Rechnung hierzu erforderlich sei, ohne sie jedoch anzuführen.

Wir wollen im folgenden diese Rechnung wirklich durchführen und außerdem nach ihrer geometrischen Deutung fragen, sind wir doch hier im Falle der Einbettung einer Fläche in den euklidischen $R_3$. Aus diesem Grunde sei es mir gestattet, die Bezeich-

[7] M. Janet, Ann. Soc. Polon. Math., Bd. 5 (1926).
[8] E. Cartan, Ann. Soc. Polon. Math., Bd. 6 (1927).

nungen zu ändern: statt $x_1, x_2$ schreiben wir mit Gauß $u, v$, ebenso $E, F, G$ statt $g_{11}, g_{12}, g_{22}$, für $\xi_1, \xi_2, \xi_3$ den Vektor $\mathfrak{x}$ mit den Komponenten $x, y, z$, den rechtwinkeligen Koordinaten des Flächenpunktes $(u, v)$. Die Gleichungen (2) lauten jetzt:

$$\mathfrak{x}_u^2 = E, \quad \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v = F, \quad \mathfrak{x}_v^2 = G.$$

Aus ihnen folgt durch Differentiation

$$\begin{aligned} 2\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uu} &= E_u, \\ 2\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} &= E_v, \\ \mathfrak{x}_{uu} \mathfrak{x}_v + \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uv} &= F_u, \end{aligned}$$

somit

$$\begin{aligned} \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uu} &= \frac{1}{2} E_u, \\ \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} &= F_u - \frac{1}{2} E_v. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten der beiden letzten Gleichungen wollen wir mit $A$ und $B$ bezeichnen.

Der von Janet erwähnte Ausnahmefall besteht in folgendem: Wir betrachten die fünf Gleichungen

$$(3) \qquad \begin{aligned} \mathfrak{x}_u^2 &= E, \\ \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v &= F, \\ \mathfrak{x}_v^2 &= G, \\ \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_{uu} &= A, \\ \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu} &= B \end{aligned}$$

nicht als Differentialgleichungen für den Vektor $\mathfrak{x}$, sondern bei gegebenen rechten Seiten als algebraische Gleichungen für die neun Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}$. Der Ausnahmefall tritt ein, wenn die Determinante dieser neun Komponenten, also das Spatprodukt $(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu})$, identisch verschwindet für alle möglichen Komponenten, welche die fünf Gleichungen (3) befriedigen.

Gleichbedeutend mit dem Verschwinden der Determinante ist natürlich auch das Verschwinden ihres Quadrates, also gemäß dem

Multiplikationssatz der Determinanten der Determinante

$$D = \begin{vmatrix} E & F & A \\ F & G & B \\ A & B & \mathfrak{x}_{uu}^2 \end{vmatrix}.$$

Von den neun Komponenten der Vektoren $\mathfrak{x}_u, \mathfrak{x}_v, \mathfrak{x}_{uu}$, welche die Gleichungen (3) erfüllen, können wir diejenigen des Vektors $\mathfrak{x}_{uu}$ als willkürlich annehmen. Denn bei willkürlichen $x_{uu}, y_{uu}, z_{uu}$ kann man aus den beiden letzten der Gleichungen (3) z. B. $x_u, x_v$ berechnen, diese in die erste und dritte einsetzen, daraus $y_u, y_v$ berechnen und hat dann noch eine Gleichung für $z_u, z_v$.

Soll also $D$ für beliebige $\mathfrak{x}_{uu}$ identisch verschwinden, so muß $EG - F^2 = 0$ und

$$\begin{vmatrix} E & F & A \\ F & G & B \\ A & B & 0 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Die letzte Gleichung ergibt

$$A(BF - AG) = B(BE - AF),$$
$$A^2G + B^2E - 2ABF = 0,$$

also nach Multiplikation mit $E$ und Verwendung von $EG = F^2$

$$A^2F^2 + B^2E^2 - 2ABEF = 0,$$

daher

(4) $$AF = BE.$$

Wir setzen nun $E = \varphi_u^2$, haben somit $A = \varphi_u \varphi_{uu}$, daher wird (4) $\varphi_u \varphi_{uu} F = (F_u - \varphi_u \varphi_{uv}) \varphi_u^2$. Führen wir in diese Gleichung außerdem $F = \varphi_u \psi$ ein, so verwandelt sie sich in $\varphi_{uu}\psi = \varphi_{uu}\psi + \varphi_u \psi_u - \varphi_u \varphi_{uv}$ oder $\psi_u = \varphi_{uv}$. Daraus ergibt sich $\psi = \varphi_v + \chi'(v)$ oder $\psi = f_v$ mit $f = \varphi + \chi(v)$ ($\chi$ ist Funktion von $v$ allein). Damit erhält man schließlich $E = f_u^2$, $F = f_u f_v$, $G = f_v^2$, worin $f$ eine willkürliche Funktion von $u$ und $v$ bedeutet. Wie man sofort sieht, verschwindet $D$ für diese Fundamentalgrößen tatsächlich.

Die quadratische Differentialform wird $(f_u\,du + f_v\,dv)^2 = df^2$, somit ist $r = k = b = 1$. Was ist die geometrische Deutung dieses

Ergebnisses? $x, y, z$ sind solche Funktionen von $u$ und $v$, daß für das Quadrat des Bogenelements die Beziehung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = df^2 \tag{5}$$

gilt. Fassen wir $x, y, z, if$ als Komponenten eines Vektors $\mathfrak{y}$ des komplexen euklidischen $R_4$ auf, so ist demnach $ds^2$ identisch Null, d. h. $\mathfrak{y}(u, v)$ ist eine Fläche des $R_4$ mit identisch verschwindendem Bogenelement.

Ich habe solche Mannigfaltigkeiten in der unter [6] angegebenen Arbeit ametrisch oder später[9] besser vollisotrop vom Rang Null genannt und gezeigt, daß es in einem komplexen euklidischen Raum von der Dimension $2n$ derartige Mannigfaltigkeiten gibt, wenn ihre Dimension $\leqq n$ ist. Die von der höchstmöglichen Dimension $n$ sind immer linear. Ist der Raum von der Dimension $2n + 1$, so ist die höchstmögliche Dimension einer derartigen Mannigfaltigkeit $n$. Diese braucht nicht linear zu sein. Sie läßt sich also in unserem Fall durch zwei linear unabhängige Gleichungen ersten Grades zwischen $x, y, z, f$ mit passenden Koeffizienten darstellen. Wir können annehmen, daß sich diese bei entsprechender Wahl der Bezeichnung nach $x$ und $y$ oder wegen der Ausnahmestellung von $f$ nach $x$ und $f$ auflösen, also in der Gestalt schreiben lassen

$$\begin{aligned} x &= a_1 z + a_2 f + a_3, \\ y &= b_1 z + b_2 f + b_3 \end{aligned} \tag{6}$$

oder

$$\begin{aligned} x &= a_1 y + a_2 z + a_3, \\ f &= b_1 y + b_2 z + b_3. \end{aligned} \tag{7}$$

Tritt im Fall (7) in der zweiten Gleichung $y$ oder $z$ auf der rechten Seite wirklich auf, so kommt man bei passender Bezeichnung doch wieder auf den Fall (6), ist dagegen $f$ eine Konstante, so ist $ds^2$ für unsere Mannigfaltigkeit im $R_3$ identisch null, sie ist vollisotrop vom Rang Null, daher von der Dimension 1, somit eine isotrope Kurve und keine Fläche. Wir brauchen also nur mehr den Fall (6) zu betrachten.

Wir führen $z$ und $f$ als neue Parameter statt $u$ und $v$ ein und erhalten damit im $R_3$ eine Ebene. Wegen der Beziehung

[9] J. Lense, Math. Ann., Bd. 116 (1939) S. 297.

$EG - F^2 = 0$ fallen die durch jeden ihrer Punkte gehenden isotropen Geraden zusammen, sie berührt den absoluten Kegelschnitt, ist also eine sogenannte isotrope Ebene. Die Konstanten $a_\nu$ und $b_\nu$ sind natürlich so zu wählen, daß die Beziehung (5) erfüllt ist. Man erhält nach einfacher Rechnung

$$\begin{aligned} a_1^2 + b_1^2 + 1 &= 0, \quad a_1 = \pm i\sqrt{1 + b_1^2}, \\ a_2^2 + b_2^2 - 1 &= 0, \quad a_2 = \pm \sqrt{1 - b_2^2}, \\ a_1 a_2 + b_1 b_2 &= 0, \end{aligned}$$

aus der dritten Gleichung $1 + b_1^2 - b_2^2 = 0$, somit $a_1 = \pm i b_2$, $a_2 = \pm i b_1$, $b_2 = \pm\sqrt{1 + b_1^2}$; für die Determinante $a_1 b_2 - a_2 b_1$ ergibt sich $\pm i$. Die Gleichungen (6) stellen also zusammen mit $z = z$ tatsächlich eine Ebene dar, $z$ und $f$ sind die Gaußschen Parameter. Da umgekehrt für jede Ebene das Spatprodukt $(\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \mathfrak{x}_{uu})$ verschwindet, können wir sagen, daß durch die Bedingung von Janet unter den Flächen die isotropen Ebenen charakterisiert werden.

Die genannten Arbeiten von Janet und Cartan sind die letzten Versuche, den Einbettungssatz zu beweisen, so daß bis heute ein für alle Fälle gültiger Beweis noch nicht erbracht ist.