Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Herleitung von Dimensionsformeln der projektiven Geometrie aus eingeschränkten Verknüpfungsaxiomen

Von Hanfried Lenz in München

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 5. Juni 1953

Einleitung

Die Verknüpfungssätze der gewöhnlichen projektiven Geometrie des n-dimensionalen Raumes lassen sich zusammenfassen in den einen Satz: *Zwischen den Dimensionszahlen zweier Unterräume* $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$; *ihres Durchschnitts* $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ *und ihres Verbindungsraumes* $\mathfrak{V}$ (d. h. des Durchschnitts aller $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ enthaltenden Unterräume) *besteht die Beziehung*[1,2]

(D) $$\dim \mathfrak{A} + \dim \mathfrak{B} = \dim \mathfrak{D} + \dim \mathfrak{V}.$$

Dabei ist einem Punkt die Dimension 0, der leeren Menge die Dimension -1 zuzuordnen.

Formel (D) gilt auch für projektive Räume unendlicher Dimension[3,4], ist jedoch in diesem Fall durch weitere Formeln zu ergänzen. Zweck dieser Note ist es, zu zeigen, daß bei geeigneten Definitionen zur Herleitung der Dimensionsformeln der projektiven Geometrie die folgenden – zur Einführung von Koordinaten *nicht* ausreichenden – Axiome genügen:

Axiom I: Zu je zwei verschiedenen Punkten A, B gibt es genau eine Gerade, die mit ihnen inzidiert. Sie sei mit $\overline{AB}$ bezeichnet.

---

[1] H. Grassmann, Die Ausdehnungslehre S. 12ff., 1. Aufl., Berlin 1862.

[2] B. L. v. d. Waerden, Einführung in die algebraische Geometrie S. 7. Berlin 1939.

[3] N. Bourbaki, Éléments de mathématique II/2, Algèbre linéaire, Paris 1947.

[4] R. Baer, Linear Algebra and projective geometry S. 17–18. New York 1952.

Axiom II: Sind die Punkte A, B, C, D verschieden und gibt es einen Punkt, der mit den beiden Geraden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ inzidiert, so gibt es auch einen Punkt, der mit den beiden Geraden $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ inzidiert.

Es wird also nicht vorausgesetzt, daß eine Gerade mehr als zwei Punkte enthalten müsse. Daher braucht auch im Raum der Desarguessche Satz nicht zu gelten. Um triviale Fälle auszuschließen, fordern wir jedoch:

Axiom III: Jede Gerade inzidiert mit mindestens zwei Punkten.

§ 1. Graphische Abhängigkeit und Basissatz

Der Einfachheit halber identifizieren wir von jetzt an jede Gerade mit der Menge der mit ihr inzidierenden Punkte und bezeichnen daher auch die Inzidenz durch das mengentheoretische Symbol $\in$.

Definition 1: Eine Punktmenge heißt *Unterraum*, wenn sie mit je zwei Punkten deren Verbindungsgerade enthält. Daraus folgt unmittelbar

Hilfssatz 1: Der Durchschnitt beliebig vieler Unterräume ist ein Unterraum.

Definition 2: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, . . ., $\mathfrak{K}$ beliebige Punktmengen, so wird der *Durchschnitt* aller ihre Vereinigungsmenge enthaltenden Unterräume mit $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}\ldots\ldots\mathfrak{K}}$ bezeichnet und die *Hülle* der gegebenen Punktmengen genannt. Diese Bezeichnung ist offenbar im Einklang mit der Bezeichnung $\overline{AB}$ des Axioms I.

Hilfssatz 2: $\mathfrak{U}$ sei ein Unterraum und $\mathfrak{P} \bar{\in} \mathfrak{U}$ ein Punkt. Dann besteht die Hülle $\overline{P\mathfrak{U}}$ von P und $\mathfrak{U}$ aus allen und nur den Punkten, die auf $\mathfrak{U}$ schneidenden Geraden durch P liegen.

Beweis: Es genügt, zu zeigen, daß die Menge aller Punkte Q auf von P ausgehenden und $\mathfrak{U}$ schneidenden Geraden ein Unterraum ist. Es sei also $U_1 \in \mathfrak{U}$, $U_2 \in \mathfrak{U}$, $A_1 \in \overline{PU_1}$, $A_2 \in \overline{PU_2}$, $A \in \overline{A_1 A_2}$. Zu beweisen ist, daß die Gerade PA den Unterraum $\mathfrak{U}$ schneidet. Im Fall $A_1 = U_1$, $A_2 = U_2$ ist das trivial; ebenso, falls einer der Punkte A_1, A_2 mit P zusammenfällt. Im Fall

$A_1 \neq U_1$, $A_2 = U_2$ schneiden sich die Geraden $\overline{PU_1}$ und $\overline{AU_2}$ (nämlich in A_1), also nach Axiom II auch die Geraden $\overline{PA}$ und $\overline{U_1 U_2}$, w. z. b. w. Im Fall $A_1 \neq U_1$, $A_2 \neq U_2$ schneiden sich nach Axiom II die Geraden $\overline{A_1 A_2}$ und $\overline{U_1 U_2}$ in einem Punkt V. Die Geraden $\overline{VA}$ und $\overline{PU_2}$ schneiden sich in A_2; daher schneiden sich nach Axiom II auch die Geraden $\overline{PA}$ und $\overline{VU_2} \subseteq \mathfrak{U}$, w. z. b. w.

Definition 3: Ein Punkt P heiße *von* der Punktmenge $\mathfrak{P}$ *über* der Punktmenge $\mathfrak{Q}$ *graphisch abhängig*, wenn $P \in \overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ ist. Falls $\mathfrak{Q}$ leer ist, heißt P einfach *von* $\mathfrak{P}$ abhängig.

Hilfssatz 3: Ist der Punkt P von der Punktmenge $\mathfrak{P}$ über der Punktmenge $\mathfrak{Q}$ (graphisch) abhängig, so ist P von einer *endlichen* Teilmenge $\mathfrak{P}_0 \in \mathfrak{P}$ über einer *endlichen* Teilmenge $\mathfrak{Q}_0 \subseteq \mathfrak{Q}$ abhängig.

Beweis: Die Vereinigungsmenge $\mathfrak{V}$ *aller* Unterräume $\overline{\mathfrak{P}_\mu \mathfrak{Q}_\nu}$, wobei $\mathfrak{P}_\mu$, $\mathfrak{Q}_\nu$ *endliche* Teilmengen von $\mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{Q}$ sind, umfaßt erstens $\mathfrak{P} \cup \mathfrak{Q}$ und ist zweitens ein Unterraum, denn aus $A_1 \in \overline{\mathfrak{P}_\varkappa \mathfrak{Q}_\lambda}$, $A_2 \in \overline{\mathfrak{P}_\rho \mathfrak{Q}_\sigma}$, $A \in \overline{A_1 A_2}$ folgt

$$A \in \overline{\overline{\mathfrak{P}_\varkappa \mathfrak{Q}_\lambda}\ \overline{\mathfrak{P}_\rho \mathfrak{Q}_\sigma}} = \overline{\mathfrak{P}_\varkappa \mathfrak{Q}_\lambda \mathfrak{P}_\rho \mathfrak{Q}_\sigma} = \overline{(\mathfrak{P}_\varkappa \cup \mathfrak{P}_\rho)\ (\mathfrak{Q}_\lambda \cup \mathfrak{Q}_\sigma)} \subseteq \mathfrak{V}.$$

Hilfssatz 4: Der Begriff der graphischen Abhängigkeit eines Punktes P von einer Punktmenge $\mathfrak{P}$ über einer (ein für allemal festgehaltenen) Punktmenge $\mathfrak{Q}$ erfüllt die üblichen drei *Abhängigkeitspostulate*.[5,6]

I. Ist $P \in \mathfrak{P}$, so ist P von $\mathfrak{P}$ abhängig.

II. Ist P von $Q \cup \mathfrak{P}$ abhängig, aber nicht von $\mathfrak{P}$, so ist Q von $P \cup \mathfrak{P}$ abhängig (nach Hilfssatz 2).

III. Ist P von $\mathfrak{P}$ abhängig und ist jeder Punkt aus $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{P}'$ abhängig, so ist P von $\mathfrak{P}'$ abhängig.

Diese Abhängigkeitspostulate reichen bekanntlich (wie bei der linearen und algebraischen Abhängigkeit) zum Beweis eines *Basissatzes* hin.

---

[5] B. L. v. d. Waerden: Moderne Algebra I, S. 111 und 210; 3. Aufl.; Berlin 1950.

[6] G. Pickert: Einführung in die höhere Algebra, S. 65; Göttingen 1951.

Definition 4: Eine Punktmenge $\mathfrak{P}$ heißt eine (graphische) *Basis* des Unterraumes $\mathfrak{U}$, wenn erstens $\overline{\mathfrak{P}} = \mathfrak{U}$ ist und zweitens für keine echte Untermenge $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ die Gleichheit $\overline{\mathfrak{P}_0} = \mathfrak{U}$ gilt.

Definition 4a: Eine Punktmenge $\mathfrak{P}$ heiße eine *Basis* des Unterraumes $\mathfrak{U}$ *über der Punktmenge* $\mathfrak{Q}$, wenn erstens $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}} = \mathfrak{U}$ ist und wenn zweitens $\overline{\mathfrak{P}_0\mathfrak{Q}} \subset \mathfrak{U}$ für jede echte Untermenge $\mathfrak{P}_0 \subset \mathfrak{P}$ ist.

Satz 1 (Basissatz): Jeder graphische Raum im Sinne der Einleitung, der den Axiomen I bis III genügt, hat eine Basis. Allgemeiner: Sind $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{A} \subseteqq \mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$ beliebige Punktmengen, so enthält $\mathfrak{P}$ eine Basis $\mathfrak{P}_0$ von $\overline{\mathfrak{P}\mathfrak{Q}}$ über $\mathfrak{Q}$, die ihrerseits eine Basis $\mathfrak{A}_0 \subseteqq \mathfrak{A}$ von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{Q}}$ über $\mathfrak{Q}$ enthält. Alle derartigen Basen sind gleichmächtig.

Der Beweis verwendet die drei Abhängigkeitspostulate und verläuft genau wie der entsprechende für die Existenz der Transzendenzbasis eines Körpers ([5] § 65) und sei daher hier weggelassen. Nur die letzte Aussage über die Gleichmächtigkeit aller Basen sei für unendliche Mächtigkeiten hier noch bewiesen, da die mir bekannten Beweise ([4] S. 14 ff.,[7,8]) nicht ganz so einfach sind.

$\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ seien zwei Basen der Mächtigkeiten $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{b}'$. Jeder Punkt aus $\mathfrak{B}'$ hängt nach Hilfssatz 3 von endlich vielen Punkten aus $\mathfrak{B}$ ab; $\mathfrak{B}'$ insgesamt also von einer Teilmenge $\mathfrak{B}_1 \subseteqq \mathfrak{B}$, deren Mächtigkeit $\mathfrak{b}_1$ für endliches $\mathfrak{b}'$ selbst endlich und sonst höchstens gleich $\mathfrak{b}' \cdot \aleph_0 = \mathfrak{b}'$ ist. Andererseits ist $\mathfrak{B}'$ Basis, daher $\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{B}$, $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b}$. Für endliches $\mathfrak{b}'$ ist also auch $\mathfrak{b}$ endlich und daher $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$ ([4] S. 14, [5] S. 111 ff.). Für unendliches $\mathfrak{b}'$ ist $\mathfrak{b}_1 = \mathfrak{b} \leqq \mathfrak{b}'$. Ebenso folgt $\mathfrak{b}' \leqq \mathfrak{b}$, also $\mathfrak{b}' = \mathfrak{b}$, w. z. b. w.

Definition 5: Die um 1 verminderte Mächtigkeit einer, d. h. jeder, Basis eines Unterraumes $\mathfrak{U}$ (über der Punktmenge $\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{U}$) heißt seine *Dimension* (über $\mathfrak{Q}$); in Zeichen $\dim \mathfrak{U}$ (bzw. ${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{U}$).

Die Dimensionen der leeren Menge, des Punktes, der Geraden sind also -1, 0, 1. Unterräume der Dimension 2 heißen *Ebenen*.

Definition 6: Ist $\mathfrak{U}$ ein Unterraum, so daß der ganze Raum über $\mathfrak{U}$ die Dimension $\mathfrak{d}$ hat, so heißt $\mathfrak{d}$ die *Codimension* von $\mathfrak{U}$ (vgl. [3] S. 34 ff.).

Unterräume der Codimension 0 heißen *Hyperebenen*.

---

[7] E. Steinitz, Algebraische Theorie der Körper, Journ. f. Math. 1910; als Buch: Leipzig 1930; insbes. § 23 sowie Erläuterung 126.

[8] O. Haupt, Einführung in die Algebra II, Leipzig 1929; Kap. 23, 6.

§ 2. Die Dimensionsformeln

Hilfssatz 5: $\mathfrak{K}$ sei ein Unterraum der *endlichen* Dimension $k \geqq 0$ über dem Unterraum $\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{K}$. $\mathfrak{H}$ sei eine Hyperebene, die $\mathfrak{Q}$, aber nicht $\mathfrak{K}$ enthält. Dann hat $\mathfrak{K} \cap \mathfrak{H}$ die Dimension $k-1$ über $\mathfrak{Q}$.

Beweis: Es sei $A_0, A_1, \ldots, A_k$ eine Basis von $\mathfrak{K}$ über $\mathfrak{Q}$ und $A_0 \,\overline{\in}\, \mathfrak{H}$. Die k Punkte $B_i = \overline{A_0 A_i} \cap \mathfrak{H}$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ existieren nach Hilfssatz 2. Denn jede Gerade hat danach mit jeder Hyperebene mindestens einen Punkt gemein.

$\mathfrak{B}$ sei die von den Punkten B_i gebildete Menge. (Sie ist leer im Fall $k = 0$). Dann ist

$$\overline{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}} \subseteqq \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H} \subset \mathfrak{K} = \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}A_0}\,.$$

Nach dem Basissatz ist

$$^{\mathfrak{Q}}\dim \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}} + 1 = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}A_0} = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{K} = k, \quad \text{also}$$

$$k - 1 = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \overline{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}} \leqq {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{K} \cap \mathfrak{H} < k, \quad \text{w. z. b. w.}$$

Satz 2: $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{Q}$ *seien Unterräume mit* $\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$. *Dann gelten die Dimensionsformeln* ($\mathfrak{n}$ sei die Dimension des ganzen Raumes)

(1) $$\dim \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \mathfrak{A} + 1 = \mathfrak{n};$$

(2) $$^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{B} = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}};$$

(3) $$^{\mathfrak{A}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}}\dim \mathfrak{B};$$

(4) $$\operatorname{codim} \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \mathfrak{B} = \operatorname{codim} \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} + \operatorname{codim} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}};$$

(5) $$^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + \operatorname{codim} \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \operatorname{codim} \mathfrak{B} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}.$$

Beweis: 1. Formel (1) folgt unmittelbar aus dem Basissatz.

2. Falls in (2) eine der Dimensionen $\mathfrak{a} = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A}$, $\mathfrak{b} = {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{B}$ unendlich ist, ist die Behauptung eine einfache Tatsache der Mengenlehre, denn dann sind beide Seiten offenbar gleich $\operatorname{Max}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$. $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{b}$ seien also jetzt endlich.

3. Wir bezeichnen die Dimensionen (über $\mathfrak{Q}$) von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$, $\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ jetzt mit a, b, d, v. $\mathfrak{A}$ hat eine Basis $\mathfrak{A}_0$, die

eine Basis $\mathfrak{D}_0$ von $\mathfrak{D}$ enthält, ebenso hat $\mathfrak{B}$ eine $\mathfrak{D}_0$ enthaltende Basis (stets über $\mathfrak{Q}$) $\mathfrak{B}_0$. Wegen $\mathfrak{V} = \overline{\mathfrak{A}_0\mathfrak{B}_0\mathfrak{Q}}$ folgt

$$v \leqq a + b - d. \quad \text{Zu zeigen ist also noch } v \geqq a + b - d.$$

4. Die Behauptung ist offenbar richtig für $v = -1$ (d. h. $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{Q}$) und für $v = 0$. Sie sei bewiesen für $v \leqq n$ und es sei nun $v = n + 1$. Wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, $\mathfrak{V}$ sei der ganze Raum, da in jedem Unterraum die Geradenaxiome I, II, III gelten. Im Fall $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{D} = \mathfrak{V}$ ist die Behauptung trivial. Andernfalls gibt es eine Hyperebene $\mathfrak{H}$, die $\mathfrak{A}$ oder $\mathfrak{B}$, etwa $\mathfrak{B}$, enthält. $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ ist der ganze Raum, also $\mathfrak{A} \subsetneqq \mathfrak{H}$.
Wir setzen

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{H};\ \mathfrak{B}' = \mathfrak{B} \cap \mathfrak{H} = \mathfrak{B};\ \mathfrak{D}' = \mathfrak{A}' \cap \mathfrak{B}' = \mathfrak{D};\ \mathfrak{V}' = \overline{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}.$$

Nach Hilfssatz 5 ist ${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A}' = a - 1$; ${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{B} = b$; ${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{D} = d$. Ferner sei ${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{V}' = v'$. $\mathfrak{V}'$ liegt in $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{V} \supseteqq \mathfrak{V}'$ nicht; daher ist $v > v'$; wegen der Induktionsvoraussetzung wird also

$$v > v' = a - 1 + b - d \text{ oder } v \geqq a + b - d, \text{ w. z. b. w.}$$

5. Um die Dimensionsformel (3) zu beweisen, benötigen wir

Hilfssatz 6: Sind $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ Unterräume und $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$ Basen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ *über ihrem Durchschnitt* $\mathfrak{D}$, so ist $\mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{B}_0$ eine Basis von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ über $\mathfrak{D}$.

Beweis des Hilfssatzes: Der Einfachheit halber definieren wir: Eine Punktmenge $\mathfrak{P}$ heiße *über einer Punktmenge* $\mathfrak{Q}$ *in sich abhängig*, wenn ein Punkt $P \in \mathfrak{P}$ existiert, der von der Komplementärmenge $\mathfrak{P} - P$ über $\mathfrak{Q}$ abhängig ist; *andernfalls in sich unabhängig über* $\mathfrak{Q}$. Zu zeigen ist also, daß $\overline{(\mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{B}_0)\mathfrak{D}} = \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ ist, was klar ist; und daß $\mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{B}_0$ in sich unabhängig über $\mathfrak{D}$ ist.

Wir nehmen an, diese Behauptung sei falsch. Dann gibt es nach Hilfssatz 3 *endliche* Teilmengen $\mathfrak{A}_1 \subseteq \mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_1 \subseteq \mathfrak{B}_0$, so daß $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1$ über $\mathfrak{D}$ in sich abhängig ist. Die Mächtigkeit von $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1$ ist also größer als die einer Basis von $\overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}}$ über $\mathfrak{D}$; d. h. es wird

$$({}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{D}} + 1) + ({}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}} + 1) > {}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathfrak{D}} + 1.$$

Das widerspricht aber der bereits bewiesenen Dimensionsformel (2), die wegen

$$\mathfrak{D} \subseteqq \overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}} \cap \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}} \subseteqq \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B} = \mathfrak{D} \text{ und } {}^{\mathfrak{D}}\dim \mathfrak{D} = -1$$

in unserem Fall

$${}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{D}} + {}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}} = {}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_1 \mathfrak{D}} - 1$$

lautet. Wir fahren nun im Beweis der Formel (3) fort.

6. Mit den Bezeichnungen des soeben geführten Beweises ist $\mathfrak{A}_0 \cup \mathfrak{B}_0$ Basis von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ über $\mathfrak{D}$; also ist $\mathfrak{B}_0$ Basis einerseits von $\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}$ über $\overline{\mathfrak{A}_0 \mathfrak{D}} = \mathfrak{A}$, andererseits von $\mathfrak{B}$ über $\mathfrak{D}$, woraus (3) folgt.

7. $\mathfrak{R}$ sei der ganze Raum. Nach (2) ist

$${}^{\mathfrak{D}}\dim \mathfrak{B} + {}^{\mathfrak{D}}\dim \mathfrak{A} = {}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} - 1\,,$$

also nach (3)

$${}^{\mathfrak{A}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + {}^{\mathfrak{B}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{D}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + {}^{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}},$$

und daher auch

$${}^{\mathfrak{A}}\dim \mathfrak{R} + {}^{\mathfrak{B}}\dim \mathfrak{R} = {}^{\mathfrak{D}}\dim \mathfrak{R} + {}^{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\dim \mathfrak{R}.$$

Das ist nichts anderes als Formel (4).

8. Aus dem Basissatz folgt, wenn wieder $\mathfrak{Q} \subseteqq \mathfrak{D} = \mathfrak{A} \cap \mathfrak{B}$ ist:

$${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + 1 = ({}^{\mathfrak{D}}\dim \mathfrak{A} + 1) + ({}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{D} + 1);$$

nach (3) also

$${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + {}^{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = {}^{\mathfrak{B}}\dim \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{D},$$

und daher auch

$${}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{A} + {}^{\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}\dim \mathfrak{R} = {}^{\mathfrak{B}}\dim \mathfrak{R} + {}^{\mathfrak{Q}}\dim \mathfrak{D}.$$

Das ist Formel (5) und damit ist alles bewiesen. Im Fall endlicher Dimension folgt nach dem Beweis von (1) und (2) natürlich alles weitere ganz elementar; im allgemeinen Fall mußte der Weg des Textes beschritten werden, weil man beliebige Kardinalzahlen zwar addieren, aber nicht eindeutig subtrahieren kann.