Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Bemerkungen zu den Handlichen Tafeln des Ptolemaios

Von **Bartel L. van der Waerden** in Zürich

Vorgelegt von Herrn Oskar Perron am 2. Oktober 1953

Mit 4 Figuren

Die Handlichen Tafeln des Ptolemaios, die bei den Astrologen und Astronomen des Altertums und Mittelalters mit Recht sehr beliebt waren, sind nicht im Urtext auf uns gekommen. Theon und seine Tochter Hypatia sowie andere vor und nach ihnen haben die Tafeln bearbeitet, neue Tafeln hinzugefügt, die Königsliste bis zur spätbyzantinischen Zeit fortgeführt, Tafeln zusammengezogen, Fehler korrigiert und neue Fehler hineingebracht. Unter den Editoren ist Stephanos von Alexandreia hervorzuheben, der um 615 nach Byzanz berufen wurde.[1] Unsere Handschriften enthalten meistens auch Spezialtafeln für Byzanz. Die Reihenfolge der Tafeln ist in den Handschriften sehr verschieden.[2]

Zum Glück ist aber die Gebrauchsanweisung, die Ptolemaios selbst seinen Tafeln vorausgeschickt hat, vollständig erhalten (Heiberg, Ptol. Opera II p. 157–185, franz. Übers. bei Halma I p. 1–26). Durch Vergleich der erhaltenen Tafeln mit dem Text des Ptolemaios kann man feststellen, daß uns nichts fehlt und daß die meisten Tafeln unverändert überliefert sind. Einige Male sind Tafeln miteinander vereinigt, was für den Abschreiber den Vorteil hatte, daß er die beiden Argumentspalten, die meistens von 0 bis 180 und von 360 bis 180 gehen, nur einmal zu schreiben

[1] Für die Geschichte der Handlichen Tafeln siehe J. H. Ideler, Astronom. Beob. der Alten (1806) p. 37 und 293; H. Usener, Fastis Theonis, Monumenta Germ. Hist. Auct. Antiq. 13 p. 359, und vor allem F. Boll, S.-B. Akad. München 1899 (phil. Kl.) p. 110, sowie P. Schnabel, S.-B. Akad. Berlin 1930 (phil. Kl.) p. 221.

[2] Eine Übersicht über die Handschriften gibt Heiberg, Ptol. Opera II, Prolegomena Cap. III. Eine vollständige Tafelsammlung mit französischer Übersetzung findet man bei Halma, Commentaires de Théon sur les tables manuelles I (1822), II (1823), III (1825).

brauchte. In einem Fall waren zwei Tafeln schon zur Zeit des Pappos, also noch vor Theon, miteinander vereinigt, wie A. Rome[1] nachgewiesen hat (Rome I § 9). Es handelt sich um die Tafeln 16 und 18 (Korrekturtäfelchen und Prokanonion) in der Numerierung Heibergs. In der Handschrift Vat. Gr. 208 erscheinen aber nach Heibergs Beschreibung die beiden Täfelchen getrennt. Diese Handschrift hat auch die ursprüngliche Reihenfolge der Tafeln am besten erhalten.

Die Tafeln für Sonne und Mond hat A. Rome (I und III) erläutert. Wesentlich Neues bieten diese Tafeln nicht: sie stimmen größtenteils mit den entsprechenden Tafeln des Almagest überein. Im Gegensatz dazu lehren uns die Planetentafeln, daß Ptolemaios seine Planetentheorie nach Vollendung des Almagest wesentlich verbessert hat. Das soll hier gezeigt werden.

Die Handlichen Tafeln für die Planeten

In der Theorie des Ptolemaios bewegt sich jeder Planet auf einem Epizykel, dessen Mittelpunkt einen Exzenter durchläuft. Die Lage des Epizykels und des Planeten auf dem Epizykel ist durch zwei Größen bestimmt, die Ptolemaios „Zahl des Epizykels" und „Zahl des Planeten" (oder Zahl des Sternes) nennt. Ist E die Erde, A das Apogeum des Exzenters, G der Ausgleichspunkt, von wo aus die Bewegung des Epizykelmittelpunktes M gleichmäßig erscheint, EMB die Gerade von der Erde aus durch M zum „genauen Apogeum des Epizykels" B, ferner GMC die Gerade vom Ausgleichspunkt durch M zum Punkt C des Epizykels und P der Ort des Planeten auf dem Epizykel (Fig. 1), so ist der Winkel $AGC = x$ die „Zahl des Epizykels" und $CMP = y$ die „Zahl des Planeten". Beide „Zahlen" ändern sich gleichmäßig im Laufe der Zeit; sie können also durch Addition der Beiträge für die Jahre, Monate, Tage und Stunden zu den Ausgangswerten am Anfang der 25jährigen Perioden gewonnen werden. Die Tafeln für die 25jährigen Perioden, ausgehend vom 1. Thoth des 1. Jahres nach dem Tode Alexanders

[1] A. Rome, Commentaires de Pappus et Théon sur l'Almageste, Bibl. Vat. Studi e Testi 54 (1931) und 106 (1943), zu zitieren als Rome I und III.

des Großen, sowie für die Jahre, Monate, Tage und Stunden sind bei Halma II p. 112–133 genau so eingerichtet, wie Ptolemaios sie beschreibt. Für jeden Planeten gibt es zwei Spalten, eine für den Epizykelmittelpunkt und eine für den Stern selbst. Vor der ersten Saturnspalte steht noch eine Spalte für das „Herz des Löwen", d. h. für Regulus, dessen Länge sich durch die Präzession nach Ptolemaios alle 100 Jahre um 1° ändert. Ptolemaios erwähnt die Regulustafel; ob sie bei ihm schon mit den Planetentafeln vereinigt war, wissen wir nicht.

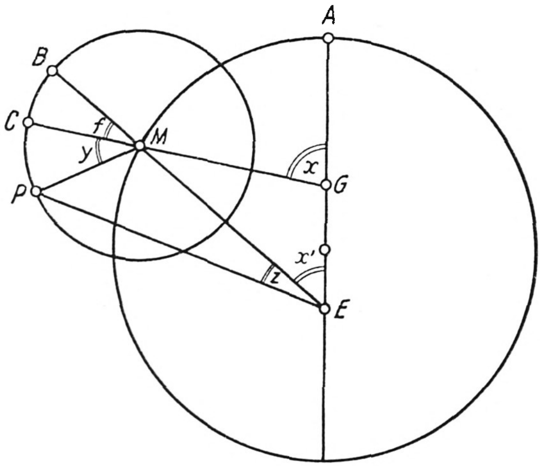

Fig. 1

Die Vereinigung ist jedenfalls sehr praktisch. Der erste Schritt in der Berechnung der Planetenpositionen besteht nämlich nach Ptolemaios darin, daß man zur Länge des Regulus einen festen Winkel addiert (für Saturn 110° 30′, für Jupiter 38° 30′, usw.) und so die Länge des Apogeums A erhält.

Zur Berechnung des genauen Abstandes des Planetenortes vom Apogeum dienen die Anomalietafeln (Halma II 134–193). In der ersten oder zweiten Spalte der Anomalietafel des betreffenden Planeten sucht man die „Zahl des Epizykels" und findet daneben in der dritten Spalte die „Prosthapheresis des Exzenters" oder Mittelpunktsgleichung f. Wenn das Argument in der ersten Spalte steht (0 bis 180°), so wird f von der Zahl des Epizykels subtrahiert und zur Zahl des Planeten addiert; wenn es aber in der zweiten Spalte steht, so wird f zur Zahl des Epizykels addiert und von der Zahl des Planeten subtrahiert. Die so korrigierte Zahl des Epizykels $x' = x \mp f$ stellt den Winkel AEM dar (Fig. 1). Die korrigierte Zahl des Planeten $y' = y \pm f$ mißt den Winkel BMP oder den Epizykelbogen BP.

Die korrigierte Zahl des Planeten y' trägt man nun von neuem in die Argumentspalten hinein und findet in der 6. Spalte die „Prosthapheresis des Epizykels", d. h. den Winkel $MEP = z$, den man zu x' zu addieren oder von x' zu subtrahieren hat, um den Winkel AEP oder den Ekliptikbogen vom Apogeum A zum Ort des Planeten zu erhalten. Die Größe (6), die man in der 6. Spalte abliest, ist aber für den Fall berechnet, daß der Epizykelmittelpunkt M in mittlerer Entfernung von der Erde E steht. Für größte Entfernung (also wenn M im Apogeum A steht) ist $z = (6) - (5)$, für kleinste Entfernung $z = (6) + (7)$, wobei die Korrekturbeträge (5) und (7) als Funktionen von y' in den Spalten 5 und 7 abzulesen sind. Für zwischenliegende Entfernungen nimmt man von dem vollen Korrekturbetrag (5) oder (7) so viele Sechzigstel, wie in Spalte 4 angegeben sind. Das Argument zur Spalte 4 ist die korrigierte Zahl des Epizykels x'. Die richtige „Prosthapheresis des Epizykels" ist also

$$z = (6) - (5) \cdot (4) : 60 \quad \text{oder} \quad z = (6) + (7) \cdot (4) : 60$$

Der genaue Abstand des Planetenortes in Länge vom Apogeum ist schließlich $x' + z$ oder $x' - z$, je nachdem das Argument y' zwischen 0 und 180 oder zwischen 180 und 360 liegt. Addiert man das zur Länge des Apogeums, so erhält man die Länge des Planeten.

Im Almagest sind die Anomalietafeln der Planeten fast genau so eingerichtet. Die Spalten 3 und 4 des Almagest (XI 11) ergeben, addiert, Spalte 3 der Handtafeln. Spalte 8 des Almagest entspricht unserer Spalte 4, nur dient als Argument dieser „Sechzigstel"-Spalte im Almagest die unkorrigierte Zahl x, in den Handtafeln die korrigierte Zahl x'. Das letztere ist für den Rechner praktischer: hat er einmal die korrigierten Zahlen x' und y', so rechnet er nur mit diesen weiter.

Die Tabellen für die Breite der Planeten sind viel interessanter, denn sie weichen von den Breitentabellen des Almagest (XII 5) vollständig ab. Sie enthalten für jeden Planeten zwei Argumentspalten (von 0 bis 180 und von 180 bis 360, wie üblich) und 5 weitere Spalten, bei Halma mit A B C D E überschrieben, die Ptolemaios „die dem Sterne eigentümlichen Spalten" nennt. Die Tafel für Saturn z. B. fängt so an:

Erster Zusatz 220°				Zweiter Zusatz 40°						Sechzigstel
Gemeinsame Zahlen		A		B		C		D		E
3	357	0	60	0	1	0	27	0	1	60

Die Gebrauchsanweisung des Ptolemaios lautet so (übersetzt aus Heiberg, Ptol. Opera II p. 171):

„Breite der 5 Planeten

a) Für die 5 Planeten tragen wir die korrigierte Zahl des Sternes in die ersten zwei Spalten hinein und schreiben die danebenstehenden Zahlen aus den drei dem Sterne eigentümlichen Spalten nach der ersten Spalte heraus. Dann nehmen wir die korrigierte Zahl des Epizykels und suchen dazu die Sechzigstel in der ersten dem Sterne eigentümlichen Spalte, und wenn die Sechzigstel subtraktiv sind, so nehmen wir ebenso viele (Sechzigstel) von der Zahl in der zweiten Spalte und subtrahieren sie von der in der dritten, aber wenn die Sechzigstel additiv sind, so nehmen wir ebenso viele von der Zahl in der vierten Spalte und addieren sie zu der in der dritten. Das Ergebnis schreiben wir auf. Sodann addieren wir zu der vom Anfang an gerechneten Zahl des Epizykels für Saturn 220°, für Jupiter 160°, für Mars 180°, für Venus 270°, für Merkur 90°, addieren zum Ergebnis die vom Anfang an gerechnete Zahl des Sternes und tragen die Summe in dieselbe Spalten hinein, und so viele (Sechzigstel) danebenstehen in der fünften Spalte der gemeinsamen Sechzigstel, so viele (Sechzigstel) nehmen wir von der aufgeschriebenen Zahl. Das Ergebnis schreiben wir auf. Wenn es in den ersten 30 Zeilen steht, wird es nach Norden gerechnet, in den nachfolgenden Zeilen aber nach Süden.

b) Zu den vom Apogeion der Exzentrizität aus gerechneten Graden des scheinbaren Ortes des Planeten in Länge addieren wir für Saturn 40, für Jupiter 340, für Mars und Venus lassen wir sie, wie sie sind, für Merkur addieren wir 180. Das Ergebnis tragen wir in dieselbe Spalten hinein und nehmen die danebenstehenden Sechzigstel in der fünften Spalte für Saturn $2\frac{1}{2}$mal, für Jupiter $1\frac{1}{2}$mal, für Mars nehmen wir sie wie sie sind, für Venus und Merkur aber nehmen wir den sechsten Teil. Das Ergebnis schreiben wir auf. Wenn es in die ersten 30 Zeilen fällt, rechnen wir es nach Norden, in den nachfolgenden Zeilen aber nach Süden.

c) Die beiden herausgeschriebenen Größen miteinander vereinigend, erhalten wir durch Kombination die genaue Abweichung des Sternes in der Breite."

Wie man aus c) sieht, setzt sich die Breite des Planeten additiv aus zwei Bestandteilen β' und β'' zusammen, die nach a) und b) berechnet werden. Der zweite Bestandteil β'' ist leicht zu deuten. Die Zahlen $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$, 1, mit denen die Werte der Spalte E für Saturn, Jupiter und Mars multipliziert werden, sind nämlich nach dem Almagest die Neigungswinkel der Exzenterebene zur Ebene der Ekliptik. Die „Hypothesen der Planeten" haben für Saturn und Jupiter dieselben Neigungswinkel. Für Venus und Merkur haben die „Hypothesen" den Neigungswinkel $10'$, d. i. ein Sechstel-Grad. Die Koeffizienten $i = 2^1/_2, 1^1/_2, 1$ und $^1/_6$ bedeuten also einfach den Neigungswinkel der Exzenterebene gegen die Ekliptik. Die Spalte E aber ist für alle Planeten dieselbe: sie gibt einfach den Cosinus des Argumentwinkels. Die Vorschrift des Ptolemaios bedeutet also, daß man

$$\beta'' = i \cos u \tag{1}$$

bilden soll.

Die geometrische Deutung der Rechenvorschrift (1) ist sehr einfach. Man nimmt eine feste Exzenterebene an, die einen kleinen Winkel i mit der Ebene der Ekliptik bildet. Die steilste

Halbgerade EN in dieser Ebene schließt mit der Richtung zum Apogeum EA einen festen Winkel v ein, der für Saturn 40° beträgt, für Jupiter 340°, für Mars und Venus 0°, für Merkur 180°.

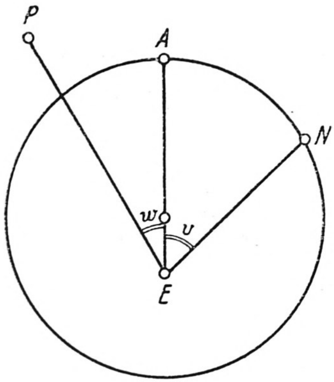

Fig. 2

Ist $w = x' + z$ der Winkel AEP zwischen der Richtung zum Apogeum und der Richtung zum Planeten, so ist $u = v + w$. Berechnet man nun die Breite β'' des Planeten so, als ob der Planet in der Exzenterebene läge, so erhält man

$$\sin \beta'' = \sin i \cos u. \tag{2}$$

Da aber i und β'' sehr klein sind, ist (1) eine gute Näherung für (2).

Im Almagest führt die Exzenterebene für Venus und Merkur eine „Zitterbewegung" aus, so daß der Neigungswinkel i bei Venus und Merkur zwischen 0 und $+10'$ schwankt, bei Merkur zwischen 0 und $-45'$. Diese Zitterbewegung gibt es in den „Hypothesen" und in den „handlichen Tafeln" nicht mehr, sondern die Exzenterebene ist bei allen Planeten fest, und zwar beträgt ihr Neigungswinkel i bei Venus und Merkur nur $10'$. Das ist eine bedeutende Verbesserung gegenüber dem Almagest. Das Richtigste wäre $i = 0$ gewesen.

Legt man durch EP eine Ebene senkrecht zur Ebene der Ekliptik oder (was bei der Kleinheit von i praktisch auf das gleiche hinauskommt) senkrecht zur Exzenterebene, so hat man in dieser senkrechten Ebene die in Fig. 3 dargestellte Situation. ET liegt in der Ebene der Ekliptik, EQ in der Exzenterebene, PQS in der Ebene des Epizykels. Der Planet befindet sich in P. Seine Breite ist

$$\beta = \beta' + \beta'', \tag{3}$$

wobei β'' wie vorhin nach (1) oder (2) berechnet werden kann, während β' der Winkel zwischen EP und der Exzenterebene ist.

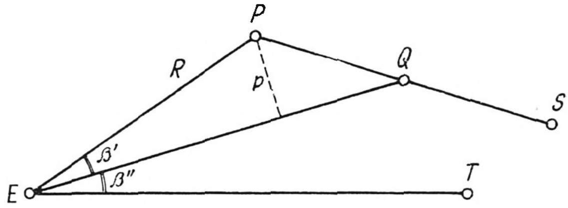

Fig. 3

Ptolemaios lehrt die Berechnung von β' im Abschnitt a). Sind A, B, C, D, E die Zahlen, die man aus den Spalten A, B, C, D, E nach der Vorschrift des Ptolemaios abliest, so ist

$$\beta' = (C - B \cdot A : 60) \cdot E : 60 \quad \text{oder}$$

$$\beta' = (C + D \cdot A : 60) \cdot E : 60.$$

Man sieht leicht, daß das Hauptglied mit C für mittlere Entfernung des Epizykelmittelpunktes berechnet ist; die Korrekturglieder $B \cdot A : 60$ und $D \cdot A : 60$ sind für größere oder kleinere Entfernungen zu subtrahieren oder zu addieren. Beschränkt man sich auf das Hauptglied

$$C \cdot E : 60, \tag{4}$$

so hängt C nur von der korrigierten „Zahl des Planeten" y' ab, während $E : 60$ der Cosinus des Winkels

$$s = x' + y' + \gamma \tag{5}$$

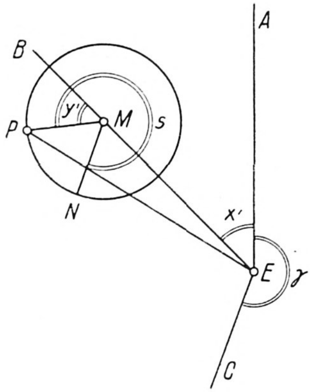

Fig. 4

ist, der durch Addition eines festen Winkels γ zu $x' + y'$ entsteht. s ist also der Winkel, den der Epizykelradius MP mit einer im Raume festen Richtung $MN \,||\, EC$ bildet (Fig. 4). Diese Richtung ist offenbar die Richtung der steilsten Steigung der Epizykelebene gegen die Exzenterebene, denn cos s ist maximal für $s = 360°$.

Ist r der Epizykelradius, j die Neigung der Epizykelebene zur Exzenterebene, R der Abstand EP und p das von P auf die Exzenterebene gefällte Lot, so lautet die exakte Formel für β'

$$\sin \beta' = \frac{p}{R} = \frac{r \sin j \cos s}{R}. \tag{6}$$

Bei der Kleinheit des Winkels β' ist sin β' proportional zu β'. Also kann man statt (6) schreiben

$$\beta' = \frac{b}{R} \cos s \tag{7}$$

mit konstantem b. Die Formel (7) stimmt mit (4) überein, sofern C umgekehrt proportional zu R ist. In der Tat lehrt die Rechnung, daß das C der Tafel umgekehrt proportional zum Abstand R ist. Aus dem Proportionalitätsfaktor b kann man den Neigungswinkel j berechnen und findet

für Saturn	$j = 4° 30'$	für Venus	$j = 3° 30'$
für Jupiter	$j = 2° 30'$	für Merkur	$j = 6° 30'$
für Mars	$j = 2° 15'$		

Die Werte für Saturn, Jupiter und Mars stimmen mit dem Almagest überein. Die Werte für Venus und Merkur stimmen nicht mit dem Almagest, wohl aber mit den „Hypothesen der Planeten" überein.

Im Almagest schließen die Epizykel nicht einen festen Neigungswinkel mit der Exzenterebene ein, sondern der Epizykeldurchmesser *MB* und der dazu senkrechte Durchmesser werden in verschiedener Weise durch besondere Mechanismen gehoben und gesenkt. Die maximalen Abweichungen dieser beiden Durchmesser von der Exzenterebene sind verschieden. Diese ganzen Komplikationen fallen in den Handlichen Tafeln weg. Die Epizykelebene bleibt immer parallel zu einer festen Richtung im Raum, wie es nach der Keplerschen Theorie auch sein soll.

In den „Hypothesen der Planeten" ist die Theorie der Breitenbewegung der Planeten noch weiter vereinfacht und verbessert. Die Epizykelebenen sind jetzt nämlich parallel zur Ekliptik, wie es nach der Keplerschen Lehre sein soll. Die Neigung der Exzenterebene ist nach den „Hypothesen"

für Saturn $2^\circ\,30'$ (Almagest $2^\circ\,30'$, modern $2^\circ\,30'$)
für Jupiter $1^\circ\,30'$ (Almagest $1^\circ\,30'$, modern $1^\circ\,19'$)
für Mars $1^\circ\,50'$ (Almagest 1° , modern $1^\circ\,51'$)
für Venus u. Merkur $10'$ (Almagest wechselnd, modern 0°).

Ptolemaios hat also nach der Fertigstellung des Almagest seine Theorien immer mehr verbessert, und zwar in den „Hypothesen" noch mehr als in den „Handtafeln". Er sagt auch selbst in den „Hypothesen", daß er manche Einzelheiten auf Grund fortgesetzter Beobachtung gegen den Almagest berichtigt hat.

Die Phasen der Planeten

Im Almagest, Buch 13, Kap. 10, gibt es eine kleine Tabelle für die heliakischen Auf- und Untergänge der Planeten, berechnet für die Breite von Phönizien, wo der längste Tag $14\frac{1}{4}$ Stunden hat, „weil auf diesem Parallel oder beiderseits desselben die meisten zuverlässigen Beobachtungen gemacht worden sind, nahezu auf ihm die chaldäischen, beiderseits desselben die in Griechenland und in Ägypten angestellten". Die Tabelle gibt, unter der Annahme, daß der Planet jeweils am Anfang des Widders, Stiers usw. steht, die Elongation von der Sonne, die der Planet haben muß, damit er sichtbar werden kann. Der zugrunde gelegte „Sehungsbogen", d. h. die Tiefe der Sonne unter dem Horizont, wenn der Planet im Horizont steht, ist für Saturn 11°, für Jupiter 10°, für Mars 11½°, für Venus 5° und für Merkur 10°.

In den Handlichen Tafeln gibt es ganz ähnliche Tabellen, diesmal für 7 verschiedene Klimata oder geographische Breiten berechnet. Von Klima zu Klima steigt die Dauer des längsten Tages immer mit einer halben Stunde auf, von 13 bis 16 Stunden.

Vergleicht man nun die Spalten für 14 und 14½ Stunden mit denen des Almagest für 14¼ Stunden, so fällt sofort auf, daß für Saturn und Mars die Elongationen durchwegs größer, für Jupiter aber kleiner sind als im Almagest. Das bedeutet, daß andere Sehungsbogen zugrunde liegen. Aus dem allgemeinen Verlauf der Zahlen leitet man leicht die folgenden Schätzungen für die Sehungsbogen ab: Saturn 13, Jupiter 9, Mars 14½.

Daß diese Schätzungen genau richtig sind, ergibt sich aus der Betrachtung der Spalte für den Parallel von Syene (zweites Klima, 13½ Stunden). Die Breite von Syene ist nämlich nach Ptolemaios genau gleich der Schiefe der Ekliptik. Das hat zur Folge: wenn der Planet im Punkte Aries am Abendhorizont untergeht oder im Punkte Libra am Morgenhorizont aufgeht, so steht die Ekliptik genau senkrecht zum Horizont. Daher ist der Sehungsbogen genau gleich der Elongation, gleichgültig wie groß die Breite des Planeten ist.

In der Tat finden wir bei Halma III, p. 16–21 in Spalte 2 in der Zeile Aries bei den Abenduntergängen und in der Zeile Libra bei den Morgenaufgängen jedesmal dieselben Zahlen: 13,0 für Saturn, 9,0 für Jupiter und 14,30 für Mars.

Für Venus und Merkur ist der Vergleich dadurch erschwert, daß die Überschriften der Tafeln durcheinander geraten sind. Es soll heißen:

p. 22 Morgenuntergang der Venus
p. 23 Abendaufgang der Venus
p. 24 Morgenaufgang der Venus
p. 25 Abenduntergang der Venus

p. 26 Morgenuntergang des Merkur
p. 27 Morgenaufgang des Merkur
p. 28 Abendaufgang des Merkur
p. 29 Abenduntergang des Merkur

In der Spalte 2 findet man für Merkur bei den Abendphasen in der Zeile Aries und bei den Morgenphasen in der Zeile Libra jedesmal dieselbe Zahl 12,0. Der Sehungsbogen für Merkur ist also 12°. Für Venus findet man beim Abendaufgang und Morgenuntergang 7,0, beim Morgenaufgang und Abenduntergang 5,0. Beim Morgenaufgang ist die Zahl 5,0 aus Versehen in die nächste Zeile gerutscht, aber aus dem allgemeinen Verlauf der Zahlen sieht man leicht, daß der Sehungsbogen zu 5° angenommen wurde.

Ptolemaios hat also bei der Berechnung der Handlichen Tafeln die folgenden verbesserten Sehnungsbogen benutzt:
Saturn 13 (Alm. 11), Jupiter 9 (Alm. 10), Mars $14\frac{1}{2}$ (Alm. $11\frac{1}{2}$), Venus Abenderst und Morgenletzt 7, Morgenerst und Abendletzt 5 (Alm. immer 5), Merkur 12 (Alm. 10).

Die neuen Zahlen sind viel besser in Übereinstimmung mit der Größe der Planeten. Venus ist bei der unteren Konjunktion heller als bei der oberen. Merkur, Saturn und Mars sind bedeutend schwächer als Jupiter.

Wieder sehen wir, daß Ptolemaios die Grundlagen seiner Theorie durch fortgesetzte Beobachtung immerfort verbessert hat.