Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Hodographenmethode der Gasdynamik bei quadratisch approximierter Adiabate

Von Werner Müller in Weil am Rhein

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 6. November 1953

Mit 3 Figuren

Die Tschaplyginsche Hodographenmethode zur Berechnung von Unterschallströmungen um Profile bei linearer Näherung der Adiabate wurde von Busemann[1] zusammenfassend dargestellt. Tsien[2] erweiterte das Verfahren. Neuerdings haben Christianowitsch und Juriew,[3] Lin[4] und andere auch Strömungen mit Zirkulation behandelt. Richter und der Verfasser[5] haben diese Arbeiten zusammengefaßt und dabei besonders die notwendigen Abbildungen untersucht. Wir wollen im folgenden die Methode auf den Fall der quadratischen Näherung der Adiabate nach Sauer[6] übertragen. Zuvor wird die Sauersche Adiabate explizit angegeben und kurz diskutiert.[7] Als Beispiel wird die Strömung mit Zirkulation um einen Kreisbogen behandelt.

---

[1] A. Busemann, Hodographenmethode der Gasdynamik. Z. angew. Math. Mech. 17 (1937) S. 73–79.

[2] H. S. Tsien, Two-dimensional subsonic flow of compressible fluids. J. Aeron. Sc., Vol. 6 (1939) S. 399–407.

[3] S. A. Christianowitsch und J. M. Juriew, Strömung um ein Flügelprofil mit Unterschallgeschwindigkeit. Prikl. Math. y Mech., Vol. 11 (1947) S. 105–18 (vorgetr. auf d. 6. int. Kongreß f. Mech., Paris 1946).

[4] C. C. Lin, On an extension of the v. Karman-Tsien-method to two-dimensional subsonic flows with circulation around closed profils. Quart. Appl. Math., Vol. 4 (1946) S. 291–97.

[5] H. Richter und W. Müller, Zur Tschaplyginschen Hodographenmethode für Strömungen mit Zirkulation. Z. angew. Math. Mech., im Druck.

[6] R. Sauer, Unterschallströmungen um Profile bei quadratisch approximierter Adiabate. Sitz.-Ber. Bayer. Ak. Wissensch. Math.-naturw. Kl. 1951 S. 65–71.

[7] W. Müller, Gasströmungen bei quadratisch angenäherter Adiabate. Diss. TH München 1953.

Die Herren Professoren R. Sauer und H. Richter haben diese Arbeit entscheidend gefördert, wofür der Verfasser auch an dieser Stelle ergebenst dankt.

§ 1. Voraussetzungen, Grundgleichungen

Wir beschränken uns auf isentropische Strömungen eines Gases ohne innere Reibung, so daß seine Dichte ρ eine eindeutige Funktion des Druckes p gemäß der Adiabatengleichung

$$p = p(\rho) \tag{1.1}$$

ist. Weiter sei die Strömung stationär, eben und isoenergetisch, damit auch wirbelfrei. Die Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ vom Betrage w habe die Komponenten u und v in bezug auf die x- bzw. y-Achse des rechtwinkligen Systems. ϑ sei der Winkel der Strömungsrichtung gegen die positive Richtung der x-Achse.

Aus den Grundgleichungen seien wie üblich durch

$$\begin{aligned} d\varphi &= u\,dx + v\,dy \\ d\psi &= \frac{\rho_1}{\rho} \cdot (-v\,dx + u\,dy) \end{aligned} \tag{1.2}$$

das Geschwindigkeitspotential φ und die Stromfunktion ψ definiert.

Aus (1.2) ergibt sich die Molenbroek-Transformation

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{w} \cdot \left(\cos\vartheta\, d\varphi - \frac{\rho_1}{\rho} \cdot \sin\vartheta\, d\psi\right) \\ dy &= \frac{1}{w} \cdot \left(\sin\vartheta\, d\varphi + \frac{\rho_1}{\rho} \cdot \cos\vartheta\, d\psi\right) \end{aligned} \tag{1.3}$$

oder komplex zusammengefaßt

$$dz = dx + i\,dy = \frac{1}{w} \cdot e^{i\vartheta}\left(d\varphi + \frac{\rho_1}{\rho} \cdot d\psi\right). \tag{1.4}$$

Diese Transformation bildet die (w, ϑ)-Ebene – die Hodographenebene – auf die (x, y)-Ebene – die Strömungsebene – ab.

In (1.3) können wir alle Größen als Funktionen von w und ϑ allein auffassen. Als Integrabilitätsbedingungen ergeben sich dann die Grundgleichungen der Hodographenmethode

$$\left.\begin{aligned} \varphi_w &= -\frac{\rho_1}{\rho}\cdot(1-M^2)\,\frac{1}{w}\,\psi_\vartheta \\ \varphi_\vartheta &= \frac{\rho_1}{\rho}\cdot w\,\psi_w \end{aligned}\right\}, \tag{1.5}$$

wobei M die Machsche Zahl ist.

§ 2. Die Sauersche Adiabate

Die Tschaplyginsche Transformation des Geschwindigkeitsbetrages

$$d\omega = \sqrt{1-M^2}\cdot\frac{dw}{w}$$

führt das System (1.5) über in

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\omega &= -\mathfrak{L}(\omega)\,\psi_\vartheta \\ \varphi_\vartheta &= \mathfrak{L}(\omega)\,\psi_\omega \end{aligned}\right| \tag{2.1}$$

mit
$$\mathfrak{L}(\omega) = \frac{\rho_1}{\rho}\sqrt{1-M^2}$$

und der Integrabilitätsbedingung

$$\psi_{\omega\omega} + \psi_{\vartheta\vartheta} + \psi_\omega\cdot\tilde{\mathfrak{L}}(\omega) = 0.$$

Dabei ist

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\omega) = \frac{d}{d\omega}\,[\ln\mathfrak{L}(\omega)] = \frac{\frac{1}{w}-\left(\frac{1}{w}\right)''}{\left(\frac{1}{w}\right)'}. \tag{2.2}$$

Striche bedeuten Ableitungen nach ω.

Mit Sauer[6] führen wir eine „reduzierte Stromfunktion" $\psi^*(\omega, \vartheta)$ ein vermöge

$$\psi(\omega, \vartheta) = N(\omega)\cdot\psi^*(\omega, \vartheta)$$

und fordern

$$\Delta\psi^* = 0.$$

Aus dieser Forderung ergeben sich die Bedingungen

$$N(\omega) = \frac{n}{\omega} \qquad \text{mit } n = \text{const}$$

und

$$\tilde{\mathfrak{L}}(\omega) = \frac{2}{\omega}. \tag{2.3}$$

Daraus folgt

$$\mathfrak{L}(\omega) = \frac{\omega^2}{m} \qquad \text{mit } m = \text{const}.$$

Die Bedingung (2.3) definiert eine hypothetische Zustandsgleichung, von der Sauer[6] gezeigt hat, daß sie eine beliebige Adiabate in jedem Punkte quadratisch annähern kann. Die Gleichung dieser „Sauerschen Adiabaten" erhalten wir durch Integration von (2.3) in Verbindung mit (2.2) zunächst in der Parameterdarstellung

$$\left.\begin{aligned} M^2 &= 1 - \left[\frac{A e^{-\omega} + B e^{\omega}}{A e^{-\omega} - B e^{\omega}} + \frac{1}{\omega}\right]^{-2} \\ w &= \frac{\omega}{A e^{-\omega} - B e^{\omega}} \end{aligned}\right\}. \tag{2.4}$$

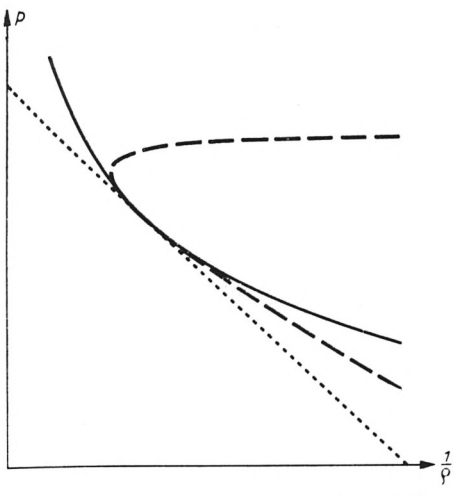
A und B sind Konstante. Elimination des Parameters ω führt auf

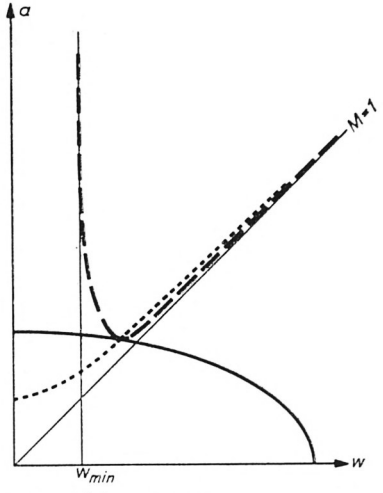
$$\frac{1}{\hat{\rho}} = \ln\left(k \cdot \frac{\hat{p}+1}{\hat{p}-1}\right) \cdot \left\{2 - \hat{p} \ln\left(k \frac{\hat{p}+1}{\hat{p}-1}\right)\right\}$$

als expliziter Gleichung der Sauerschen Adiabaten. $\hat{\rho}$ und $\hat{p}$ sind linear Transformierte von ρ bzw. p. k ist eine Konstante.

Zur quadratischen Näherung sind aus der Schar der Sauerschen Adiabaten nur diejenigen brauchbar, auf denen da/dw (a ist die Schallgeschwindigkeit) auch negative Werte annimmt. Das ist der Fall, wenn in (2.4) $B > A > 0$ ist. Für diese Wahl der Konstanten zeigen die Figuren 1 und 2 schematisch den Verlauf der Sauerschen Adiabaten im $(p, 1/\rho)$- und im (w, a)-Diagramm.

Wir bemerken vor allem, daß die Sauersche Adiabate einen Punkt $w = w_{min} > 0$ enthält, für den $M = 0$ und $a = \infty$ ist. Für $0 < w < w_{min}$ hat M keine reellen Werte. Die quadratische





reale Adiabate ($p \cdot \rho^{-1,4}$ = const)
Sauersche Adiabate
lineare Näherung

Fig. 1 Fig. 2

Näherung versagt hier. Für große Unterschallgeschwindigkeiten zeigt die quadratisch approximierende Adiabate das gleiche Verhalten, das von der linearen Adiabate wohlbekannt ist. Im besonderen ist der kritische Punkt der Näherung nicht zugänglich. Daraus folgt:

Die hypothetische Adiabate nach Sauer erlaubt es, reale Adiabaten in einem beschränkten Bereich quadratisch anzunähern, der nicht die Punkte $M = 0$ und $M = 1$ enthält. Die Adiabate kann daher allein für solche Unterschallströmungen verwendet werden, bei denen die Strömungsgeschwindigkeit nur beschränkt variiert, im besonderen aber nirgends verschwindet.

Der Verfasser[7] hat nach Sauer[6] und Pérès[8,9] weitere fünf quadratisch approximierende Adiabaten angegeben und untersucht. Alle sechs Adiabaten zeigen prinzipiell das gleiche Verhalten.

---

[8] J. Pérès, Quelques transformations des équations du mouvement d'un fluide compressible. Compt. rend. hebd. Ac. Sc. Paris, Tome 219 (1944), p. 501–04.

[9] J. Pérès, Sur l'intégration des équations qui régissent le mouvement d'un fluide compressible. Proc. 7th int. Cong. Appl. Mech., Vol. 2 (1948) p. 382–87.

§ 3. Umformung der Grundgleichungen

Ziel der weiteren Untersuchung ist es, die Differentialgleichung (1.4) unter der Voraussetzung zu integrieren, daß das Gas der Sauerschen Adiabaten gehorcht. Das System (2.1) geht dann über in

$$\left.\begin{aligned} \varphi_\omega &= -\frac{\omega^2}{m}\psi\vartheta \\ \varphi_\vartheta &= \frac{\omega^2}{m}\psi\omega \end{aligned}\right\}. \tag{3.1}$$

Der Stromfunktion ψ der kompressiblen Strömung ordneten wir in § 2 die Stromfunktion ψ^* einer inkompressiblen Strömung zu vermöge

$$\psi = \frac{n}{\omega}\psi^* \quad \text{mit} \quad \Delta\psi^* = 0. \tag{3.2}$$

Wir führen nun die folgende analytische Funktion ein:

$$H(\overline{\Omega}) = \varphi^* + i\psi^*$$

$$\text{mit} \qquad \overline{\Omega} = \frac{1}{c_1}e^{\omega - i\vartheta} = \eta \cdot e^{-i\vartheta}, \quad \text{wo} \quad c_1^2 = \frac{A}{B} \quad \text{ist.} \tag{3.3}$$

(Konjugiert komplexe Werte werden durch Überstreichen gekennzeichnet.)

Aus (3.1), (3.2) und den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen für H kommt

$$\frac{m}{n}\,d\varphi = \omega\,d\varphi^* - \psi^*\,d\vartheta$$

$$\frac{\omega^2}{n}\,d\psi = \omega\,d\psi^* - \psi^*\,d\omega.$$

Diese Ausdrücke setzen wir in (1.4) ein und gewinnen mit (2.4) die Gleichung

$$\frac{m}{n}\,dz = Ae^{-(\omega - i\vartheta)}\{d\varphi^* + i\,d\psi^*\} - Be^{\omega + i\vartheta}\{d\varphi^* - i\,d\psi^*\}$$
$$+ i\,d\left[\frac{1}{\omega}\{Ae^{-(\omega - i\vartheta)} - Be^{\omega + i\vartheta}\}\psi^*\right].$$

Wir setzen

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{A\cdot B}} = C$$

und erhalten mit (3.3)

$$\boxed{C\,dz = \frac{dH}{\bar{\Omega}} - \Omega\,d\overline{H} - d\left[\frac{H-\bar{H}}{\ln(\Omega\cdot\bar{\Omega}) + \ln c_1^2}\left(\Omega - \frac{1}{\bar{\Omega}}\right)\right]} \quad (3.4)$$

Damit haben wir die z-Ebene, d. h. die Strömungsebene der kompressiblen Strömung, auf die $\bar{\Omega}$-Ebene der transformierten Strömungsgeschwindigkeit abgebildet. Analog dem inkompressiblen Fall wird in dieser – allerdings jetzt transformierten – Hodographenebene die Strömung durch eine analytische Funktion beschrieben. Die Umkehrabbildung (3.4) ist aber nicht mehr analytisch, sondern unterscheidet sich von der analogen Formel des inkompressiblen Falles durch den zweiten und dritten Summanden in (3.4). Der letztere fällt im Falle der linearen Näherung weg. In (3.4) repräsentiert also jedes Glied der rechten Seite einen bestimmten Grad der Näherung.

§ 4. Die Eigenschaften der Funktion $H(\bar{\Omega})$

Um Aussagen über die Funktion $H(\bar{\Omega})$ zu gewinnen, untersuchen wir die Abbildung (3.4) genauer. Dabei legen wir die folgenden Annahmen über die Strömung zugrunde:

1. Es handle sich um eine Strömung in einem einfach zusammenhängenden Gebiet, z. B. im Außengebiet T eines Profils R in der Strömungsebene $z = x + iy$.
2. Die Geschwindigkeit w der Strömung sei in T mit Einschluß des Randes R beschränkt und größer Null; denn nur auf solche Strömungen läßt sich die quadratische Näherung nach Sauer anwenden. Die Strömung muß daher in T mit Einschluß von R singularitätenfrei und frei von Staupunkten sein. Die Stromfunktion ψ der Strömung ist dann in T eindeutig.
3. Im Punkte $z = \infty$ sei $\mathfrak{w}$ positiv reell:

$$\mathfrak{w}_{z\to\infty} = w_\infty > w_{min} > 0.$$

D. h. die Richtung der ungestörten Parallelströmung soll mit der Richtung der positiven x-Achse übereinstimmen.

Das Gebiet T haben wir nach Molenbroek eindeutig und stetig auf das $\bar{\mathfrak{w}}$-Gebiet $\hat{B}$ und dieses durch radiale Verzerrung

weiter auf das $\bar{\Omega}$-Gebiet B_1 abgebildet. $\hat{B}$ und B_1 liegen ganz im Endlichen. B_1 wird durch (3.4) eindeutig und stetig auf T zurück abgebildet. Also ist B_1 topologisches Bild von T und wie dieses einfach zusammenhängend mit Rand. Es kann jedoch verzweigt und mehrfach überdeckt sein. Mit S bezeichnen wir denjenigen Punkt von B_1, der $z = \infty$ entspricht. S hat die Koordinate $\bar{\Omega}_\infty = \eta_\infty > 0$. Wegen der möglichen mehrfachen Überdeckung kann B_1 noch weitere Punkte über η_∞ besitzen.

Über T sind die Funktionen φ, ψ, $\mathfrak{w}$, Ω und ψ^* definiert. ψ^* ist eine eindeutige Funktion von $\omega(w)$ und ψ und wie diese eindeutig von z abhängig, aber nicht umkehrbar eindeutig. ψ^* ist endlich außer bei $z = \infty$.

ψ^* wurde auf B_1 überpflanzt und wird dort der Imaginärteil der analytischen Funktion $H(\bar{\Omega})$. Also hat H in B_1 eindeutigen endlichen Imaginärteil außer an der Stelle $\bar{\Omega}_\infty$.

dH hängt eindeutig von z und der Differentiationsrichtung ab, so daß $dH/d\bar{\Omega}$ bis auf Pole eindeutig analytisch auf B_1 ist. B_1 ist also ein Stück der Riemannschen Fläche von $dH/d\bar{\Omega}$. Eine geschlossene Kurve um $z = \infty$ geht in eine geschlossene Kurve um $\bar{\Omega}_\infty$ über, so daß $dH/d\bar{\Omega}$ dort nur einen Windungspunkt beschränkter Ordnung besitzt. Daher hat H in der Umgebung von $\bar{\Omega}_\infty$ die Entwicklung

$$H = b \cdot \ln(\bar{\Omega} - \eta_\infty) + \text{algebraisch.} \tag{4.1}$$

b ist rein imaginär, da $\psi^* = \operatorname{Im}\{H\}$ eindeutig über B_1 ist.

Mit der Ortsuniformierenden

$$\zeta = \sqrt[l]{\frac{\bar{\Omega}}{\eta_\infty} - 1} \quad \text{bei} \quad l \geqq 1$$

sei also in der Umgebung von $\bar{\Omega}_\infty$

$$\frac{dH}{d\bar{\Omega}} = \frac{b_{-m}}{\zeta^m} + \frac{b_{-m+1}}{\zeta^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{-1}}{\zeta} + \text{reguläre Glieder} \tag{4.2}$$

mit

$$b_{-l} + \bar{b}_{-l} = 0. \tag{4.3}$$

Die Summanden von (3.4) haben dann in der Umgebung von $\bar{\Omega}_\infty$ die folgenden Entwicklungen

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dH}{\overline{\Omega}} &= l\cdot\zeta^{l-1}\cdot\{1-\zeta^l+\zeta^{2l}\pm\cdots\}\times\\
&\quad\times\left\{\frac{b_{-m}}{\zeta^m}+\frac{b_{-m+1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{-1}}{\zeta}+\text{regul. Glieder}\right\}d\zeta\\
\overline{\Omega}\,dH &= \eta_\infty^2\cdot l\zeta^{l-1}\cdot(1+\zeta^l)\times\\
&\quad\times\left\{\frac{b_{-m}}{\zeta^m}+\frac{b_{-m+1}}{\zeta^{m-1}}+\cdots+\frac{b_{-1}}{\zeta}+\text{regul. Glieder}\right\}d\zeta\\
\frac{H-\overline{H}}{\ln(\Omega\cdot\overline{\Omega})+2\ln c_1}&\left(\Omega-\frac{1}{\overline{\Omega}}\right)=\\
&=\frac{l}{2\,\omega_\infty}\left\{\frac{1}{l-m}\left[b_{-m}\cdot\zeta^{l-m}-\overline{b_{-m}\zeta^{l-m}}\right]+\cdots+\right.\\
&\quad\left.+\,b_{-l}\cdot\ln\zeta-\overline{b_{-l}\ln\zeta}+\text{reguläre Glieder}\right\}\times\\
&\quad\times\{\eta_\infty^2-1+\eta_\infty^2\overline{\zeta^l}+\zeta^l\pm\cdots\}\times\\
&\quad\times\left\{1-\frac{1}{2\,\omega_\infty}(\zeta^l+\overline{\zeta^l}+\cdots)+\cdots\right\},
\end{aligned}\right\}\quad(4.4)$$

wobei $\omega_\infty=\ln(\eta_\infty c_1)$ ist.

Durch (3. 4) soll die B_1-Umgebung von $\overline{\Omega}_\infty$ bzw. die schlichte Umgebung von $\zeta=0$ auf die schlichte Umgebung von $z=\infty$ eineindeutig abgebildet werden. Setzen wir die Entwicklungen (4.4) in (3.4) ein und integrieren, so treten als Summanden mit der niedrigsten Potenz von ζ Glieder mit ζ^{l-m} auf, so daß bei $z=\infty$ eine $(m-l)$-blättrige Umgebung entstehen würde. Es ist also $m=l+1$. Dann liefert (3. 4) die Abbildung

$$\begin{aligned}
\frac{C}{l}z &= -\frac{1}{\zeta}\left(1-\frac{1-\eta_\infty^2}{2\,\omega_\infty}\right)b_{-(l+1)}+\frac{1}{\zeta}\left(\eta_\infty^2+\frac{1-\eta_\infty^2}{2\,\omega_\infty}\right)\overline{b_{-(l+1)}}+\\
&\quad+\ln\zeta\cdot\left\{\left(1+\frac{1-\eta_\infty^2}{2\,\omega_\infty}\right)b_{-l}-\delta\cdot b_{-(l+1)}\right\}\\
&\quad-\overline{\ln\zeta}\cdot\left\{\left(\eta_\infty^2+\frac{1-\eta_\infty^2}{2\,\omega_\infty}\right)+\delta\cdot\eta_\infty^2\cdot\overline{b_{-(l+1)}}\right\}\\
&\quad+\text{beschränkte Glieder},
\end{aligned}\quad(4.5)$$

wobei $\delta=1$ für $l=1$ und $\delta=0$ für $l\geqq 2$ ist.

Die Abbildung ist eineindeutig, wenn erstens

$$b_{-(l+1)} \neq 0$$

ist und wenn zweitens die Winkelabhängigkeit bei den logarithmischen Gliedern verschwindet. Unter Beachtung von (4.3) ergibt sich aus der letzteren Forderung

$$b_{-l}(1 - \eta_\infty^2) - \delta(b_{-(l+1)} - \eta_\infty^2 \overline{b_{-(l+1)}}) = 0.$$

Im Falle $\delta = 1$ ist demnach auch $b_{-(l+1)}$ rein imaginär, so daß wir finden

$$b_{-1} = \frac{1 + \eta_\infty^2}{1 - \eta_\infty^2}, \quad \text{bei} \quad l = 1. \tag{4.6}$$

Im Falle $\delta = 0$ ist hingegen

$$b_{-l} = 0, \quad \text{bei} \quad l \geqq 2. \tag{4.7}$$

Zur Diskussion der Fälle $l = 1$ und $l \geqq 2$ bilden wir in der z-Ebene das Integral

$$\mathfrak{Z} = \oint \overline{\mathfrak{w}}\, dz$$

beim Umlauf um $z = \infty$, dessen Realteil unabhängig vom Integrationsweg die Zirkulation Γ angibt. Nach (2. 4) und (3. 3) ist

$$\overline{\mathfrak{w}} = w \cdot e^{-i\vartheta} = \frac{n}{m} C \cdot \frac{\ln(\eta c_1)}{1 - \eta^2} \overline{\Omega} \quad \text{mit} \quad \eta = |\Omega| \text{ und } \ln(\eta c_1) = \omega.$$

Mit (3. 4) kommt daher

$$\frac{m}{n} \overline{\mathfrak{w}}\, dz = \frac{\omega}{1 - \eta^2} dH - \frac{\eta^2 \omega}{1 - \eta^2} \overline{dH} - \frac{\omega}{1 - \eta^2} \overline{\Omega} \cdot d\left[\frac{H - \overline{H}}{2\omega}\left(\Omega - \frac{1}{\overline{\Omega}}\right)\right].$$

Wir integrieren unter Umkehrung des Umlaufungssinnes längs eines Kreises um $\overline{\Omega}_\infty$ mit l-fachem Umlauf oder um $\zeta = 0$ mit einfachem Umlauf. Für einen genügend kleinen Kreis um $\zeta = 0$ dürfen wir mit beliebiger Genauigkeit setzen

$$\eta = \eta_\infty, \quad \omega = \omega_\infty.$$

Unter Verwendung der Entwicklungen (4. 1), (4. 2) und (4. 4) liefert die Integration

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{m}{n} \Gamma = \operatorname{Im} \{\eta_\infty \omega_\infty l \cdot b_{-l} + \delta \cdot \eta_\infty \cdot b_{-2}\}.$$

Im Falle $\delta = 0$ ist wegen (4.7) $\Gamma \equiv 0$. Bei Strömungen mit Zirkulation kann daher $l \geqq 2$ nicht vorkommen. In diesem Falle muß vielmehr $l = 1$ sein. Mit Hilfe von (4.6) und (2.4) folgt aber auch umgekehrt aus $l = 1$ mit $\delta = 1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{m}{n} \Gamma &= -\eta_\infty \omega_\infty b_{-2} \left\{ \frac{1 + \eta_\infty^2}{1 - \eta_\infty^2} + \frac{1}{\omega_\infty} \right\} \\ \frac{1}{2\pi i} \cdot \frac{m}{n} \Gamma &= -\frac{\eta_\infty \cdot \omega_\infty}{\sqrt{1 - M_\infty^2}} \cdot b_{-2} \end{aligned} \tag{4.8}$$

und damit wegen $b_{-(l+1)} = b_{-2} \neq 0$ eine stets von Null verschiedene Zirkulation. Es gehört daher $\Gamma = 0$ stets zu $l \geqq 2$, d. h. B_1 ist bei S mehrblättrig. Dagegen ist $\Gamma \neq 0$ durch die Schlichtheit von B_1 in S charakterisiert.

§ 5. Zuordnung einer inkompressiblen Strömung zu der gegebenen kompressiblen Strömung

Wir erinnern uns an die wohlbekannten Verhältnisse bei einer inkompressiblen Strömung in einer Z-Ebene mit Potential $F(Z)$. Hier gilt für die Strömungsgeschwindigkeit $\mathfrak{W}$

$$\overline{\mathfrak{W}} = \frac{dF}{dZ}.$$

Die Z-Ebene wird also auf die $\overline{\mathfrak{W}}$-Ebene konform abgebildet, wobei das einfach zusammenhängende Gebiet T in ein Gebiet B übergeht, das automatisch ein einfach zusammenhängender Bereich einer Riemannschen Fläche ist. Bei Überpflanzung von F auf B lautet die Umkehrabbildung

$$dZ = \frac{dF}{\overline{\mathfrak{W}}} \tag{5.1}$$

mit der auf B meromorphen Funktion $dF/d\overline{\mathfrak{W}}$.

Der einfachste Versuch, der gegebenen kompressiblen Strömung eine inkompressible zuzuordnen, wäre nun der, B_1 als ein B und H als das F einer inkompressiblen Strömung aufzufassen. Bei

Strömungen mit Zirkulation geht das jedoch nicht. In diesem Falle ist $l = 1$, so daß die Windungsfreiheit von $dZ = \frac{dH}{\overline{\Omega}}$ verlangen würde (vgl. (4.5))

$$b_{-1} - b_{-2} = 0.$$

Aus (4. 6) folgt dann sofort

$$b_{-1} = 0, \quad \text{d. h.} \quad \Gamma = 0.$$

Bei Strömungen mit Zirkulation muß daher dieser Weg, den Tsien[2] für die lineare Näherung eingeschlagen hat, versagen. Wir müssen vielmehr den folgenden Weg wählen: Wir bilden zunächst den einfach zusammenhängenden Bereich B_1 der kompressiblen transformierten Hodographenebene auf das Gebiet T ab, das wir uns in der Z-Ebene einer inkompressiblen Strömung gezeichnet denken. Dabei soll $\overline{\Omega}_\infty$ in $Z = \infty$ übergehen mit Erhaltung des Richtungssinnes der Strömung. Die Abbildung wird vermittelt durch eine in T reguläre und beschränkte Funktion

$$\overline{\Omega} = G(Z)$$

mit der Entwicklung bei $Z = \infty$

$$\overline{\Omega} = \Omega_\infty \left\{ 1 + \frac{\beta_1}{Z} + \frac{\beta_2}{Z^2} + \cdots \right\}.$$

H wird auf T überpflanzt und definiert in T eine inkompressible Strömung gemäß

$$\overline{\mathfrak{W}} = \frac{dH}{dZ}. \tag{5.2}$$

$\overline{\mathfrak{W}}$ erfüllt in einer $\overline{\mathfrak{W}}$-Ebene ein einfach zusammenhängendes Gebiet B. Auf B wird H ebenfalls überpflanzt. Auf dem Umweg über Z ist dabei gleichzeitig eine konforme Abbildung von B_1 auf B gewonnen, die die Funktion H überträgt. Nach (5. 2) gilt nun

$$dZ = \frac{dH}{\overline{\mathfrak{W}}} \quad \text{für} \quad \overline{\mathfrak{W}} \in B.$$

Da B und B_1 mit Erhaltung von H eineindeutig konform abgebildet sind, können wir dafür auch schreiben

$$dZ = \frac{dH}{\overline{\Omega}} \cdot \frac{\overline{\Omega}}{\overline{\mathfrak{W}}} \quad \text{für} \quad \overline{\Omega} \in B_1.$$

Nun ist

$$\left.\begin{array}{ll} \overline{\mathfrak{W}} \begin{array}{l}\text{eindeutig}\\ \text{analytisch}\end{array} \text{ in } T \text{ mit } \overline{\mathfrak{W}} = W_\infty \left\{1 + \frac{\alpha_1}{Z} + \frac{\alpha_2}{Z^2} + \cdots\right\} & \\ \text{und} & \text{bei } W_\infty > 0 \\ \overline{\Omega} \begin{array}{l}\text{eindeutig}\\ \text{analytisch}\end{array} \text{ in } T \text{ mit } \overline{\Omega} = \eta_\infty \left\{1 + \frac{\beta_1}{Z} + \frac{\beta_2}{Z^2} + \cdots\right\} & \end{array}\right\} . \quad (5.3)$$

Also ist auch

$$k(Z) = \frac{\overline{\Omega}}{\overline{\mathfrak{W}}} \tag{5.4}$$

eindeutig analytisch und regulär in T mit der Entwicklung bei $Z = \infty$

$$k(Z) = \frac{\eta_\infty}{W_\infty} \cdot \left\{1 + \frac{\varkappa_1}{Z} + \frac{\varkappa_2}{Z^2} + \cdots\right\}. \tag{5.5}$$

Neben die nichtkonforme Abbildung (3. 4) von B_1 auf das Gebiet T der z-Ebene tritt nun also noch als entsprechende konforme Abbildung

$$dZ = \frac{dH}{d\overline{\Omega}} \cdot k. \tag{5.6}$$

Die Abbildungen (3. 4) und (5. 6) fassen wir zu einer einzigen zusammen, die die Z-Ebene auf die z-Ebene abbildet:

$$\boxed{C \cdot dz = \frac{dZ}{k(Z)} - \mathfrak{W}^2(Z) \cdot \overline{k(Z)\, dZ} - d\left[\frac{H - \overline{H}}{2 \ln |\overline{\mathfrak{W}} \cdot k| + 2 \ln c_1}\left(\mathfrak{W}\overline{k} - \frac{1}{\overline{\mathfrak{W}} \cdot k}\right)\right]} \tag{5.7}$$

Es sei noch bemerkt, daß wir in der Z-Ebene an Stelle von T jedes beliebige Gebiet hätten benutzen können, im besonderen auch das Äußere des Einheitskreises. Auf dem Rand von T kann dann $k(Z)$ an den Stellen singulär werden, die den Ecken des Profils entsprechen. Dabei dürfen jedoch die Voraussetzungen des § 4 nicht außer acht gelassen werden, im besonderen hinsichtlich der doppelten Einengung des Variabilitätsbereiches der Geschwindigkeit der kompressiblen Strömung.

§ 6. Ableitung kompressibler Strömungen aus gegebenen inkompressiblen Strömungen

Nachdem wir wissen, unter welchen Voraussetzungen und auf welche Weise einer gegebenen kompressiblen Strömung eine inkompressible zugeordnet werden kann, kehren wir die Problemstellung um und kommen zu unserer eigentlichen Aufgabe zurück, aus bekannten inkompressiblen Strömungen kompressible abzuleiten.

Es sei also in der Z-Ebene eine inkompressible Strömung im Außengebiet T eines Profiles R gegeben. $H(Z)$ sei das komplexe Potential dieser Strömung und $\mathfrak{W} = \overline{dH/dZ}$ ihre Strömungsgeschwindigkeit. Wir suchen nun eine passende Funktion $k(Z)$ in T so, daß Gleichung (5. 7) die Abbildung von R auf ein schlichtes Gebiet T_1 der z-Ebene leistet, das als Äußeres eines Profils R_1 gedeutet werden kann. In der z-Ebene soll dabei in T_1 eine kompressible Strömung eines hypothetischen Gases entstehen, das der Sauerschen Adiabate genügt. Die aerodynamischen Daten dieser Strömung ergeben sich aus (5. 4), (3. 3) und (2. 4).

Die Funktion $k(Z)$ muß in T regulär sein und in $Z = \infty$ die Entwicklung (5. 5) haben. Außerdem muß $\eta_{min} \leqq \eta \leqq \eta_{max}$ in ganz T sein, was wegen der Regularität von $\overline{\mathfrak{W}} \cdot k$ die Bedingung liefert

$$0 \leqq \eta_{min} \leqq \eta = |\overline{\mathfrak{W}} k| \leqq \eta_{max} < 1 \quad \text{auf } R. \tag{6.1}$$

Die Eineindeutigkeit der Abbildung des Außengebietes T von R auf das Äußere T_1 eines Profils R_1 ist genau dann gewährleistet, wenn gilt:

1. $1/k(Z)$ hat in T kein Residuum.
2. Die Jacobische Determinante D der Abbildung (5. 7) ist positiv. In diesem Falle ist T_1 im Endlichen unverzweigt.
3. Die Umgebung von $Z = \infty$ wird eineindeutig auf die Umgebung von $z = \infty$ abgebildet. Ein mehrfaches Umlaufen von $z = \infty$ bei einmaligem Umlauf um $Z = \infty$ ist damit ausgeschlossen.

4. Das Bild R_1 von R hat keine Doppelpunkte. Das neue Profil liegt damit schlicht in der z-Ebene.

Die nähere Diskussion dieser Punkte führt für D nicht wie im Falle der linearen Näherung[4,5] auf einen einfachen, positiv definiten Ausdruck, so daß Einzeluntersuchung notwendig scheint. Setzen wir die Entwicklungen (5. 3) und (5. 5) in Verbindung mit (5. 2) in (3. 4) ein, so erhalten wir als Bedingung für eine eindeutige Abbildung im Unendlichen

$$\varkappa_1 = -\frac{\Gamma^*}{2\pi i} \cdot \frac{2\eta_\infty^2}{W_\infty(1+\eta_\infty^2)}, \tag{6.2}$$

wobei Γ^* die Zirkulation der inkompressiblen Strömung ist. Das Bild R_1 des Profiles R ist in den Fällen der quadratischen und der linearen Näherung identisch, wenn wir den Wert $\psi^* = 0$ R selbst zuordnen. Solange R eine stetige Tangente hat, besitzt auch R_1 stetige Tangente. Neue Ecken kann R_1 nur erhalten, falls $k(Z)$ singulär wird. Singularitäten von $k(Z)$ dürfen jedoch allein auf dem Rande R von T zugelassen werden und auch dort nur in solcher Weise, daß vor allen anderen die Bedingung (6. 1) erfüllt bleibt.

§ 7. Strömung um ein Kreisbogenprofil

Die eben entwickelte Methode wenden wir auf die kompressible Strömung um ein kreisbogennahes Profil an. Da die Strömung frei von Staupunkten und frei von Punkten sein muß, in denen die Strömungsgeschwindigkeit unendlich groß wird, kann allein der Fall behandelt werden, daß an den Ecken des Kreisbogens tangentiales An- bzw. Abströmen statthat, wofür bekanntlich die Zirkulation einen von Null verschiedenen, durch das Wölbungsverhältnis bestimmten Wert haben muß.

Wir schreiben das komplexe Potential dieser speziellen inkompressiblen Umströmung des Kreisbogens in der Parameterdarstellung

$$H(\chi) = W_\infty\left(\chi + \frac{1}{\chi} + 2i\varepsilon \cdot \ln\chi\right) \tag{7.1}$$

$$\text{mit } 0 < \varepsilon < 1,$$

$$Z(\chi) = \chi + i\varepsilon + \frac{1-\varepsilon^2}{\chi + i\varepsilon} \tag{7.2}$$

d. h. wir leiten die Strömung aus der Umströmung des Einheitskreises einer χ-Ebene ab. Ausgehend von

$$k^* = \frac{d\chi}{dZ} = \frac{(\chi + i\varepsilon)^2}{(\chi + i\varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon^2)}$$

wählen wir in Anlehnung an Christianowitsch und Juriew[3] die Hilfsfunktion k in der Form

$$\frac{k}{k_\infty} = \frac{(\chi + im)^2}{(\chi + i\varepsilon)^2 - (1 - \varepsilon^2)} = k^* \cdot \left[1 - \frac{i(\varepsilon - m)}{\chi + i\varepsilon}\right]^2 \text{ mit } 0 < m < 1$$

$$\text{und } k_\infty = \frac{\eta_\infty}{W_\infty}.$$

(Der Bemerkung am Schluß des § 5 folgend hätten wir auch die χ-Ebene selbst als Z-Ebene einführen können.)

Die Funktion k genügt den in § 6 gestellten Bedingungen. Aus (6. 2) folgt

$$m = \varepsilon \cdot \frac{1 - \eta_\infty^2}{1 + \eta_\infty^2}, \tag{7.3}$$

während Bedingung (6. 1) auf die folgenden Forderungen führt:

$$\frac{\eta_{max}}{\eta_\infty} \geqq (1 + m)^2$$

$$\frac{\eta_{min}}{\eta_\infty} \leqq (1 - m)^2.$$

η_{min} und η_{max} sind dabei von der Adiabate her durch $M = 0$ bzw. $p = 0$ bestimmt.

Setzen wir $H(\chi)$ und $k(\chi)$ in (5.7) ein, so ergibt die Integration

$$\begin{aligned} Cz = {} & \frac{1}{k_\infty}\left\{\chi + 2i(\varepsilon - m)\ln(\chi + im) + \frac{1 - m(2\varepsilon - m)}{\chi + im}\right\} \\ & - k_\infty W_\infty^2 \left\{\bar{\chi} - 2i(\varepsilon + m)\ln\bar{\chi} + \frac{1}{\bar{\chi}}\left[1 + m(m + 4\varepsilon)\right]\right. \\ & \left. - \frac{1}{\bar{\chi}^2} im(1 + \varepsilon m) - \frac{1}{\bar{\chi}^3}\frac{m^2}{3}\right\} \\ & - \frac{1 - \eta^2}{\eta^2 \ln(\eta^2 c_1^2)} W_\infty k_\infty \left\{(\chi - \bar{\chi})\left(1 - \frac{1}{\chi\bar{\chi}}\right) + i\varepsilon \ln(\chi \cdot \bar{\chi})\right\} \times \\ & \times \frac{(\chi + im)^2}{\bar{\chi}^2} + \frac{i\varepsilon}{k_\infty}. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Die Integrationskonstante wurde so gewählt, daß (7. 4) mit $W_\infty \to 0$ und $m \to \varepsilon$ in (7. 2) übergeht.

ε und m sind klein gegen Eins, aber von gleicher Größenordnung. Wenn wir für x Glieder dritter Ordnung in ε und m, für y ebenso Glieder vierter Ordnung vernachlässigen und nach (7. 3)

$$\eta_\infty^2 = \frac{\varepsilon - m}{\varepsilon + m}$$

setzen, so werden die Koordinaten eines beliebigen Punktes $\chi = \cos\mu + i \cdot \sin\mu$ des Einheitskreises die folgenden:

$$\hat{C} \cdot x = 4m \cos\mu - 2\varepsilon m \cdot \sin 2\mu$$

$$\begin{aligned}\hat{C} \cdot y = {} & \sin\mu(m^3 + 7\varepsilon m^2) + \sin^2\mu(\varepsilon m + 3m^2) + \\ & + \cos^2\mu(\varepsilon m - m^2) - \frac{1}{3}\sin^3\mu(13\varepsilon m^2 + 11m^3) + \\ & + \sin\mu\cos^2\mu(\varepsilon m^2 - m^3) - m(\varepsilon + m) + \varepsilon(\varepsilon + m),\end{aligned}$$

wobei $k_\infty \cdot (\varepsilon + m) C = \hat{C}$ gesetzt wurde. Im besonderen finden wir daher für die Eckpunkte z_1 und z_2 des Kreisbogens:

$$\begin{aligned}\hat{C} \cdot x_{1,2} &= \pm 2m \cdot (2 + \varepsilon^2) \\ \hat{C} \cdot y_{1,2} &= -2m^2 + \varepsilon(\varepsilon + m).\end{aligned}$$

Die Scheitelpunkte z_3 und z_4 haben die Koordinaten

$$\begin{aligned}x_{3,4} &= 0 \\ \hat{C} \cdot y_3 &= \frac{8}{3} m^2\left(\varepsilon - m + \frac{3}{4}\right) + \varepsilon(\varepsilon + m) \\ \hat{C} \cdot y_4 &= \frac{8}{3} m^2\left(-\varepsilon + m + \frac{3}{4}\right) + \varepsilon(\varepsilon + m).\end{aligned}$$

Der Kreisbogen wird durch die Abbildung (7. 4) also zu einem Profil aufgeweitet, das einem Kreisbogenzweieck ähnelt. Die maximale Profildicke d_R ist:

$$\hat{C} \cdot d_R = \hat{C} \cdot (y_3 - y_4) = \frac{16}{3} m^2 (\varepsilon - m).$$

Die Pfeilhöhe f des Profils erhalten wir zu

$$\hat{C} \cdot f = \frac{y_3 + y_4}{2} - y_1 = 4m^2$$

und das Wölbungsverhältnis zu

$$\frac{f}{x_1} = \frac{2\,m}{2+\varepsilon^2}.$$

Als Zahlenbeispiel sei für das Wölbungsverhältnis $f/x_1 = 0{,}05$ und für den Wert $\eta_\infty = 0{,}6750$ das Profil berechnet und in Fig. 3 gezeichnet, wobei die Maßstäbe von Abszissen und Ordinaten sich wie 1:10 verhalten. (Der genannte Wert von η_∞ ergibt sich z. B., wenn Sauersche und reale Adiabate in ihrem Berührungspunkt in den folgenden Werten übereinstimmen:

$$M = 0{,}862; \qquad p/p_0 = 0{,}616;$$
$$w/a_0 = 0{,}801; \qquad a/a_0 = 0{,}933;$$
$$\rho/\rho_0 = 0{,}707; \qquad da/dw = -0{,}172.)$$

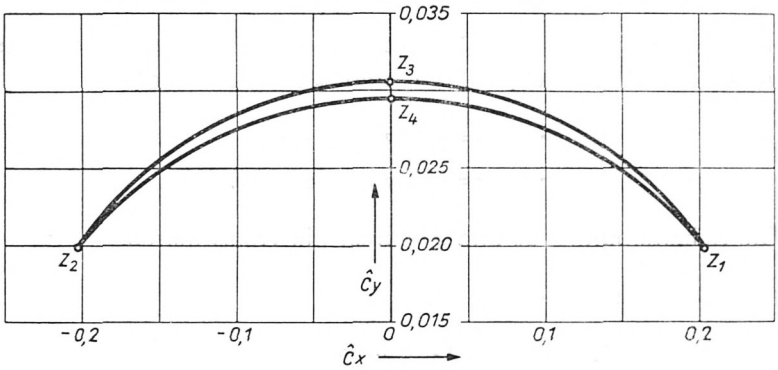


Fig. 3

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1954

Band/Volume: 1953

Autor(en)/Author(s): Müller Werner

Artikel/Article: Hodographenmethode der Gasdynamik bei quadratisch approximierter Adiabate 313-330