Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Betrachtungen über Flächenabbildungen

X. „Ebenmäßige" Abbildungen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 14. Mai 1954

In der Theorie der Paare von Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$, $\mathfrak{y}(\tilde{u}, \tilde{v})$ des euklidischen Raumes, die durch gleiche Parameterwerte $u = \tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ aufeinander bezogen sind,[1] spielen, sobald die gegenseitigen Lagen entsprechender Linienelemente $d\mathfrak{x}$, $d\mathfrak{y}$ untersucht werden sollen, drei quadratische Differentialformen eine Rolle, nämlich

$$d\mathfrak{x}^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2, \tag{1a}$$

$$d\mathfrak{y}^2 = E'\,du^2 + 2F'\,du\,dv + G'\,dv^2, \tag{1b}$$

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = \bar{E}\,du^2 + 2\bar{F}\,du\,dv + \bar{G}\,dv^2; \tag{1c}$$

hier sind

$$E = \mathfrak{x}_u^2, \quad F = \mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v, \quad G = \mathfrak{x}_v^2, \tag{2a}$$

$$E' = \mathfrak{y}_u^2, \quad F' = \mathfrak{y}_u \mathfrak{y}_v, \quad G' = \mathfrak{y}_v^2 \tag{2b}$$

die Fundamentalgrößen 1. O. der beiden Flächen,

$$\bar{E} = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u, \quad \bar{F} = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v + \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u), \quad \bar{G} = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v \tag{2c}$$

die gemischten Fundamentalgrößen 1. O. des Paares[2] $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$.

Durch die „Grundformen" (1 a, b, c) des Flächenpaares kann u. a. das Quadrat des „*linearen Maßstabes*" m der Abbildung[3]

---

[1] Die reellen Vektorfunktionen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, die wir als Ortsvektoren der beiden betrachteten Flächenstücke verwenden, seien in dem zugrunde gelegten Bereich $\mathfrak{B}$ der reellen u-v-Ebene stetig differenzierbar; ihre partiellen Ableitungen $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ mögen in $\mathfrak{B}$ überall den Bedingungen genügen:

$$\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v \neq 0, \quad \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v \neq 0.$$

[2] Vgl. Math. Zeitschr. 49 (1943) S. 427 ff.

[3] Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, Jahrg. 1942, S. 299 ff.

für das Linienelement $d\mathfrak{x}$,

$$m^2 = d\mathfrak{y}^2 : d\mathfrak{x}^2, \tag{3}$$

und der „*Rißmaßstab*" n der Abbildung[4] für die Richtung $d\mathfrak{x}$,

$$n = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2, \tag{4}$$

ausgedrückt werden.

Im folgenden wollen wir uns mit der Frage beschäftigen: Können diese Formen linear abhängig sein? Und was bedeutet es für die Abbildung, wenn dies zutrifft?

1. Besondere Fälle

Spezielle Beispiele für den Fall der linearen Abhängigkeit bieten die *winkeltreuen* und die „*gleichmäßigen*" Abbildungen,[5] insonderheit die Abbildung durch *Orthogonalität entsprechender Linienelemente* $d\mathfrak{x} \to d\mathfrak{y}$, die einen Sonderfall der Gleichmäßigkeit darstellt; im ersten der aufgezählten Fälle sind die erste und zweite der Grundformen linear abhängig, im zweiten ist die dritte der ersten Form proportional, wobei der Proportionalitätsfaktor n im Sonderfall verschwindet, bei einer Abbildung, deren inverse $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ gleichmäßig ist, besteht lineare Abhängigkeit zwischen der zweiten und dritten der Grundformen. Weitere Möglichkeiten werden wir später kennenlernen.

Daß aber im allgemeinen *nicht* zu erwarten ist, daß die drei Grundformen linear abhängig sind, zeigt eine Beziehung, die für den Fall einer Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ *durch parallele Berührebenen* in entsprechenden Punkten schon bei einer früheren Gelegenheit bewiesen wurde und die mit Hilfe der Funktionen

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u, \tag{5a}$$

$$j = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u, \tag{5b}$$

die Differentialinvarianten gegenüber den gemeinsamen

---

[4] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 15 ff.

[5] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 25 ff.

Parametertransformationen des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ sind,[6] folgendermaßen geschrieben werden kann:[7]

$$\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{j}_1^2 \cdot d\mathfrak{y}^2 + j \cdot \mathfrak{j}_1 d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = 0. \qquad (6)$$

Wie man sieht, sind in dem hier betrachteten Fall $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ die drei Grundformen linear abhängig, wenn $j = 0$ ist, d. h. wenn die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ samt ihrer inversen $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ „gerade" ist.[8] Bekanntlich bietet ein Beispiel hierfür die *Gaußsche Abbildung* einer Fläche $\mathfrak{x}$ auf eine Kugel $\mathfrak{y}$ durch parallele Normalen. Da, wenn $\mathfrak{y}^2 = 1$ ist, die Größe $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} : 2\mathfrak{j}_1^2$ die *mittlere Krümmung H* und $\mathfrak{j}_1 \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{j}_1^2$ das Gaußsche *Krümmungsmaß K* der Fläche $\mathfrak{x}$ ist[9] und die Grundformen die I., die III. und die negative II. Fundamentalform des Netzes $\mathfrak{x}(u, v)$ bilden, so geht (6) dann in eine bekannte Formel der Flächentheorie über:[10]

$$K \cdot I + 2H \cdot II + III = 0. \qquad (7)$$

In der Beziehung (6) tritt uns, wie wir sehen, neben den drei Grundformen (1 a, b, c) noch eine weitere quadratische Differentialform entgegen, nämlich $\mathfrak{j}_1 d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$; an ihre Stelle könnte ebensogut die Form $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ treten, in der $\mathfrak{c}$ den Einheitsvektor der posi-

---

[6] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1943, S. 217 ff.

[7] Math. Zeitschr. 49 (1943), S. 438 (18'). Daß die dort durch die Fundamentalgrößen ausgedrückten Koeffizienten der Formen $d\mathfrak{x}^2$ usw. den in (6) angegebenen gleich sind, ergibt sich durch eine kurze Rechnung aus (5a) und (5b); vgl. die in Fußnote 4 angeführte Arbeit S. 18.

[8] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1944, S. 126. Das Kennzeichen der „Geradheit" einer Flächenabbildung ist das Verschwinden der „Schiefe" $J = j : W$, wo $W^2 = \mathfrak{j}_1^2$. Im Hinblick auf das im Text besprochene Beispiel möge man Math. Zeitschr. 49 (1943), S. 439 vergleichen; das dort auf S. 436 eingeführte „Verdrehungsmaß" $\operatorname{tg} \delta$ steht mit der Schiefe in der Beziehung $\operatorname{tg} \delta = Wj : \mathfrak{j}_1 \mathfrak{j} = J : 2H$.

Die Bedingung $j = 0$ für die lineare Abhängigkeit der Grundformen ist, wie die oben aufgezählten Beispiele zeigen, nur hinreichend, aber nicht notwendig; in diesem Sinne ist eine Bemerkung zu korrigieren, die der Verfasser im vorletzten Abschnitt einer in diesen Sitzungsberichten 1952 veröffentlichten Note auf S. 50 in einem ähnlichen Zusammenhang gemacht hat.

[9] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 23.

[10] Gewöhnlich wird die mittlere Krümmung mit anderem Vorzeichen definiert als hier; dieses ist hier so festgelegt, daß die Einheitskugel mit positiver äußerer Normalen die mittlere Krümmung 1 erhält.

tiven Normalen der orientierten Fläche $\mathfrak{x}$ bedeutet, und die mit dem „*Querrißmaßstab*" q der Abbildung[11] für das Linienelement $d\mathfrak{x}$,

$$q = \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2, \tag{8}$$

zusammenhängt.

2. Allgemeine Untersuchung

Wenden wir uns nun wieder der anfangs gestellten Frage zu, wann allgemein die drei Grundformen des Flächenpaares $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ linear abhängig sein können.

a) Es gelte für ein Punktepaar (u, v)

$$\alpha\, d\mathfrak{x}^2 + \beta\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \gamma\, d\mathfrak{y}^2 = 0$$

mit drei nicht sämtlich verschwindenden Zahlen α, β, γ, die nicht von der Richtung und natürlich auch nicht von der Größe von $d\mathfrak{x}$ abhängen.

Da stets $d\mathfrak{x}^2 d\mathfrak{y}^2 \neq 0$ ist, wenn $d\mathfrak{x} \neq 0$ ist, nur reelle Vektoren betrachtet werden und die Abbildung an der Stelle (u, v) nicht singulär ist, so kann das Verschwinden von zwei der Zahlen α, β, γ nur auf die Weise zustande kommen, daß $\alpha = \gamma = 0$ und somit

$$d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = 0, \text{ d. h. } n = 0$$

wird für alle tangentialen Richtungen $d\mathfrak{x}$. Dies ist der Fall des Entsprechens der beiden Flächen durch *Orthogonalität der Linienelemente* $d\mathfrak{x} \rightarrow d\mathfrak{y}$.

Daß genau eine der Zahlen α, β, γ verschwindet, kann auf zwei wesentlich verschiedene Arten eintreten:

Entweder dadurch, daß $\beta = 0$ wird, so daß $\alpha\, d\mathfrak{x}^2 + \gamma\, d\mathfrak{y}^2 = 0$ oder

$$d\mathfrak{y}^2 = m^2 d\mathfrak{x}^2$$

ist mit richtungsunabhängigem Abbildungsmaßstab m; dann haben wir den Fall der *Winkeltreue*.

---

[11] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 21.

Oder es wird $\gamma = 0$ bzw. $\alpha = 0$, mithin $\alpha\, d\mathfrak{x}^2 + \beta\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = 0$ bzw. $\beta\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \gamma\, d\mathfrak{y}^2 = 0$ oder

$$d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x}^2 \quad \text{bzw.} \quad d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \bar{n}\, d\mathfrak{y}^2$$

mit richtungsunabhängigem Rißmaßstab n bzw. $\bar{n}$; dann liegt *Gleichmäßigkeit* bei der Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ bzw. bei der Abbildung $\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}$ vor.

Die bisher behandelten Fälle können sich teilweise überschneiden: Wenn der Rang der Koeffizientenmatrix der drei Grundformen den Wert 1 hat, ist zugleich

$$d\mathfrak{y}^2 = m^2 d\mathfrak{x}^2 \text{ und } d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x}^2 \text{ und } d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \bar{n}\, d\mathfrak{y}^2$$

mit $$\bar{n} = n : m^2;$$

in diesem Falle liegt Gleichmäßigkeit zugleich bei $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ wie bei $\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}$ vor, und dies kann, wenn $n \neq 0$, wie an anderer Stelle gezeigt wurde,[12] nur eintreten, wenn sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ *mit parallelen Normalen winkeltreu unter Erhaltung des Drehsinns* entsprechen; die Abbildung $d\mathfrak{x} \rightarrow d\mathfrak{y}$ ist also dann eine Drehstreckung und folgt dem Gesetz

$$d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x} + q\, \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x},$$

wo weder der Rißmaßstab n noch der Querrißmaßstab q von der Richtung von $d\mathfrak{x}$ abhängt.

Es bleiben jetzt nur noch die Fälle zu betrachten übrig, in denen $\alpha\beta\gamma \neq 0$ ist. Man kann dann immer $\beta = -1$ annehmen, so daß man erhält

$$d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} = \alpha\, d\mathfrak{x}^2 + \gamma\, d\mathfrak{y}^2;$$

durch Division durch $d\mathfrak{x}^2$ ergibt sich hieraus nach (3) und (4)

$$n = \alpha + \gamma m^2. \tag{9}$$

Liegt, wie wir annehmen wollen, nicht der schon behandelte Fall der Richtungsunabhängigkeit von m und n vor, so nehmen also hier der Maßstab m und der Rißmaßstab n der Abbildung an der Stelle (u, v) ihre Extremwerte für dieselben Richtungen an, d. h. aber: Es gibt ein Paar von „Hauptrichtungen“[3] und

[12] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1948, S. 335 ff.

ein Paar von „Hauptrißrichtungen"[13] in $\mathfrak{x}$, und diese beiden Paare fallen zusammen; das gleiche gilt für die Fläche $\mathfrak{y}$, da sich ebenso durch Division durch $d\mathfrak{y}^2$ für den Maßstab $\bar{m}$ und den Rißmaßstab $\bar{n}$ der inversen Abbildung

$$\bar{n} = \alpha \bar{m}^2 + \gamma \tag{9'}$$

ergibt, in Übereinstimmung mit den bekannten allgemeingültigen, aus (3) und (4) folgenden Beziehungen

$$\bar{m} = 1 : m \qquad \text{und} \qquad \bar{n} = n : m^2.$$

Da also unter den hier vorliegenden Umständen die Rißmaßstäbe n und $\bar{n}$ der Abbildungen $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ und $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ nach (9) und (9′) und wegen $m\bar{m} = 1$ ihre Extremwerte für dieselben Paare entsprechender Richtungen $d\mathfrak{x} \rightleftarrows d\mathfrak{y}$ annehmen, so können wir schließen, daß unter der gemachten Voraussetzung den Hauptrißrichtungen in $\mathfrak{x}$ diejenigen in $\mathfrak{y}$ entsprechen, oder, anders ausgedrückt, daß *den Hauptrißrichtungen in $\mathfrak{x}$ zueinander senkrechte Richtungen in $\mathfrak{y}$ zugeordnet sind*, was bekanntlich nicht allgemein zutrifft. Ob umgekehrt aus dieser Eigenschaft der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ die lineare Abhängigkeit der drei Grundformen (1a, b, c) folgt, ist durch die bisherigen Überlegungen noch nicht entschieden.

b) Etwas weiterreichende Ergebnisse finden wir durch die folgende, andersgeartete Betrachtung:

Notwendig und hinreichend dafür, daß die drei Grundformen (1a, b, c) linear abhängig sind, ist, daß die Determinante ihrer Koeffizienten verschwindet:

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} E & F & G \\ E' & F' & G' \\ \bar{E} & \bar{F} & \bar{G} \end{vmatrix} = 0. \tag{10}$$

Die Funktion Δ erweist sich nun als eine Differentialinvariante vom Gewicht 3 gegenüber den gemeinsamen Parametertransformationen der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$. Diese Behauptung kann man durch Berechnung des Wertes $\bar{\Delta}$ verifizieren, den man er-

[13] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 19 ff.

hält, wenn man die Transformation

$$u = u(\bar{u}, \bar{v}), \qquad v = v(\bar{u}, \bar{v})$$

mit nicht verschwindender Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \neq 0$$

ausführt, d. h. in den in der Determinate auftretenden Fundamentalgrößen $\mathfrak{x}_u$ durch $\mathfrak{x}_{\bar{u}} = \mathfrak{x}_u u_{\bar{u}} + \mathfrak{x}_v v_{\bar{u}}$ usw. ersetzt. Man kann jedoch ihre Richtigkeit auch auf dem folgenden, etwas weniger Rechenarbeit erfordernden Wege einsehen: Wenn in Δ die Elemente $E = \mathfrak{x}_u^2$ usw. nicht skalare Produkte von Vektoren $\mathfrak{x}_u$ usw., sondern algebraische Produkte der Ableitungen skalarer Funktionen ξ und η von u und v wären, so wäre die Determinante, wie leicht nachzuprüfen, identisch mit $-(\xi_u \eta_v - \xi_v \eta_u)^3$, also eine relative Differentialvariante vom Gewicht 3, weil die in der Klammer stehende Funktionaldeterminante ja eine solche vom Gewicht 1 ist; es wäre somit die transformierte Determinante

$$\overline{\Delta} = \Delta \cdot \left(\frac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})}\right)^3. \tag{11}$$

Diese Beziehung muß aber auch noch gelten, wenn an die Stelle der Skalare ξ und η wieder die Vektoren $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gesetzt werden und die gewöhnliche Multiplikation von Skalaren durch die skalare von Vektoren ersetzt wird, da die Transformation der Vektoren $\mathfrak{x}_u$, $\mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{y}_u$, $\mathfrak{y}_v$ ebenso wie die der entsprechenden Skalare ξ_u usw. und daher die der skalaren Produkte $E = \mathfrak{x}_u^2$ usw. der Vektoren $\mathfrak{x}_u$ usw. ebenso wie die der entsprechenden algebraischen Produkte ξ_u^2 usw. der Skalare ξ_u, ξ_v, η_u, η_v vor sich geht, die Relationen aber, die zwischen den Elementen ξ_u^2 usw. der Vergleichsdeterminante, nicht jedoch zwischen den Elementen $\mathfrak{x}_u^2$ usw. der ursprünglichen Determinante bestehen, keinen Einfluß auf die hier auszuführenden Umformungen haben.

Die mit Hilfe der skalaren Differentialvariante vom Gewicht 1

$$W = \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{x}_v \neq 0$$

gebildete *absolute Differentialinvariante*

$$\Delta : W^3 \tag{12}$$

muß folglich eine Bedeutung haben, die von der Wahl der die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ überziehenden u-v-Netze unabhängig ist. Um diese „geometrische“ Bedeutung der Größe (12) für das Flächenpaar $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ auf einfachste Weise herauszufinden, führen wir spezielle Koordinaten auf den beiden Flächen ein, derart, daß an der Stelle (u, v), die wir ins Auge fassen, $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ aufeinander senkrecht stehende Einheitsvektoren werden, die in Hauptrichtungen der Fläche $\mathfrak{x}$ weisen; für diese nehmen bekanntlich die linearen Abbildungsmaßstäbe extreme Werte, die „Hauptmaßstäbe“ m' und m'' an, so daß $\mathfrak{y}_u$ und $\mathfrak{y}_v$ die ihnen entsprechenden, ebenfalls aufeinander senkrechten Hauptrichtungsvektoren in $\mathfrak{y}$ werden, deren Längen eben m' und m'' sind. Es wird dann nach (2a)

$$E = 1, \qquad F = 0, \qquad G = 1,$$

ferner nach (2b) und (3)

$$E' = m'^2, \qquad F' = 0, \qquad G' = m''^2,$$

weiter nach (2c) und (4)

$$\bar{E} = n', \qquad \bar{G} = n'',$$

und wegen $\mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_u = \mathfrak{x}_v$, $\mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_v = -\mathfrak{x}_u$ nach (2c) und (8)

$$2\bar{F} = -q'' + q',$$

wo also n' und n'' die Rißmaßstäbe, q' und q'' die Querrißmaßstäbe der Abbildung für die Hauptrichtungen an der betrachteten Stelle sind; da hier $W = 1$ ist, erhalten wir demnach

$$\Delta : W^3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ m'^2 & 0 & m''^2 \\ n' & \frac{1}{2}(q' - q'') & n'' \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(m'^2 - m''^2)(q' - q''). \qquad (12')$$

Da bei Vertauschung von $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$, d. h. beim Übergang von der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ zu ihrer inversen $\mathfrak{x} \leftarrow \mathfrak{y}$ der Wert von Δ nach (10) bis aufs Vorzeichen unverändert bleibt, W aber als skalarer Wert von $\mathfrak{j}_1$ durch den von $\mathfrak{j}_2$, d. h. hier durch $m'm''$ zu ersetzen ist, so wird es interessieren, zu sehen, wie der Ausdruck auf der rechten Seite von (12′) sich ändert, wenn man die in ihm stehenden Größen durch die entsprechenden, zur Abbildung $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ gehörenden ersetzt: An die Stelle der Zahlen m' und m'' treten nach (3) deren reziproke Werte $\overline{m}'$ und $\overline{m}''$, ferner nach (8) an die Stelle von $q' = \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_u = \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u$ und von $q'' = \mathfrak{c}\,\mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_v = -\mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v$ wegen $\mathfrak{y}_u^* = m' \mathfrak{y}_v : m''$ und $\mathfrak{y}_v^* = -m'' \mathfrak{y}_u : m'$ die Zahlen $\overline{q}' = \mathfrak{y}_u^* \mathfrak{x}_u : \mathfrak{y}_u^2 = m'/m''\, \mathfrak{y}_v \mathfrak{x}_u : m'^2 = -q'' : m'm''$ und $\overline{q}'' = \mathfrak{y}_v^* \mathfrak{x}_v : \mathfrak{y}_v^2 = -m''/m'\, \mathfrak{y}_u \mathfrak{x}_v : m''^2 = -q' : m'm''$, so daß der besagte Ausdruck in

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\,(1 : m'^2 - 1 : m''^2)\;(-q'' + q') : m'm'' \\ = \; &-\tfrac{1}{2}\,(m'^2 - m''^2)\;(q' - q'') : m'^3 m''^3 \end{aligned}$$

übergeht, wie zu erwarten war.

Die Determinante Δ verschwindet nach (12′) entweder, wenn $m'^2 = m''^2$, d. h. die Abbildung $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ winkeltreu ist, oder wenn $q' = q''$ ist. Dies tritt im besonderen immer dann ein, wenn die Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ gleichmäßig ist, weil der Querrißmaßstab dann richtungsunabhängig ist,[14] folglich auch, da die Determinante Δ bei Vertauschung von $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{y}$ nur ihr Vorzeichen wechselt, wenn die inverse Abbildung $\mathfrak{y} \to \mathfrak{x}$ gleichmäßig ist. Allgemein aber kennzeichnet die Übereinstimmung der Querrißmaßstäbe zweier zueinander senkrechter Richtungen diese als Hauptrißrichtungen;[15] das Verschwinden von $q' - q''$ deutet also ganz allgemein darauf hin, daß die von uns zugrunde gelegten Hauptrichtungen zugleich Hauptrißrichtungen sind. Da aber speziell im Falle der Winkeltreue die Hauptrißrichtungen zugleich als Hauptrichtungen, im Falle der Gleichmäßigkeit die Hauptrichtungen zugleich als Hauptrißrichtungen anzusprechen sind, so erkennen wir die Gültigkeit des Satzes:

Notwendig und hinreichend dafür, daß das Flächenpaar $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ an einer Stelle ein Paar zusammenfallender Hauptrichtungen und Hauptrißrichtungen besitze, ist die lineare Abhängigkeit der drei Grundformen $d\mathfrak{x}^2$, $d\mathfrak{y}^2$ und $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ des Paares an dieser Stelle.

Die Abbildung heiße in diesem Fall für das betreffende Punktepaar e b e n m ä ß i g.

---

[14] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 26.

[15] Dies zeigt ein Blick auf die Gleichung (18b) auf S. 22 der in Fußnote 13 zitierten Arbeit.

Daß mit einer Flächenabbildung immer auch ihre inverse ebenmäßig ist, folgt daraus, daß die Bedingung $\Delta = 0$ symmetrisch in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ gebaut ist.

Wir erkennen aus (12′), daß im Falle der Ebenmäßigkeit gilt:

$$\alpha : \beta : \gamma = (m'^2 n'' - m''^2 n') : (m''^2 - m'^2) : (n' - n'').$$

Diese drei Größen verschwinden zugleich nur, wenn Winkeltreue und Gleichmäßigkeit zusammentreffen; für diesen Fall wurden die Koeffizienten oben schon bestimmt.

Nach dem Gesagten ist es möglich, diese Abbildungen allgemein noch auf eine andere Art geometrisch zu kennzeichnen:

Das Paar der Flächen $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ *ist an einer Stelle ebenmäßig aufeinander bezogen, falls*[16] *einem Paar von Hauptrißrichtungen in der einen ein Paar von Hauptrißrichtungen in der andern entspricht.*

In den oben besonders hervorgehobenen Sonderfällen kommt das Zusammenfallen von Hauptrichtungen mit Hauptrißrichtungen, wie schon angedeutet, dadurch zustande, daß bei den winkeltreuen Abbildungen jede Richtung als Hauptrichtung, bei den gleichmäßigen Abbildungen jede Richtung in der ersten Fläche, bei den inversen der gleichmäßigen Abbildungen jede Richtung in der zweiten Fläche als Hauptrißrichtung anzusehen ist.

Daß im allgemeinen die drei Grundformen nicht linear abhängig sind, läßt sich, sogar unter der Annahme paralleler Berührebenen, durch Angabe einfacher Beispiele zeigen, in denen $\Delta \neq 0$ ist.

c) Nun möge der Ausdruck (12′) noch mit Hilfe einer früher bewiesenen Beziehung[17] umgeformt werden: Es gilt nämlich für die Querrißmaßstäbe q und q^* zweier zueinander senkrechter Richtungen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x}$, die mit zwei zusammengehörigen Hauptrißrichtungen je den Winkel χ bilden, wenn n_1 und n_2 die zugehörigen Hauptrißmaßstäbe sind, allgemein

$$q - q^* = (n_2 - n_1) \cdot \sin 2\chi;$$

---

[16] „Falls“ bedeute „immer dann und nur dann, wenn“.

[17] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 22, (18b).

daher wird

$$\Delta : W^3 = -\tfrac{1}{2}\,(m'^2 - m''^2)\,(n_1 - n_2)\sin 2\psi\,, \qquad (12'')$$

wenn ψ den *Winkel einer Hauptrichtung gegen eine Hauptrißrichtung* in $\mathfrak{x}$ bedeutet.

Dieser Ausdruck (12″) setzt die geometrische Bedeutung der linearen Abhängigkeit der drei Grundformen $d\mathfrak{x}^2$, $d\mathfrak{y}^2$, $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ in Evidenz:

Je nach dem Verschwinden eines oder mehrerer der drei Faktoren auf der rechten Seite liegt Winkeltreue oder Gleichmäßigkeit oder Zusammenfallen der Hauptrichtungen mit den Hauptrißrichtungen ohne Winkeltreue und Gleichmäßigkeit, oder aber Winkeltreue und Gleichmäßigkeit zugleich, in jedem Fall aber Koinzidenz eines Paares von Hauptrichtungen mit einem Paar von Hauptrißrichtungen in wenigstens einer der beiden Flächen $\mathfrak{x}$ oder $\mathfrak{y}$ vor.

d) Noch einen dritten Ausdruck für die Funktion $\Delta : W^3$ kann man dadurch erhalten, daß man statt des Winkels ψ zwischen Haupt- und Hauptrißrichtung in $\mathfrak{x}$ den *Winkel* $\hat{\rho}$ einführt, *den die den Hauptrißrichtungen in* $\mathfrak{x}$ *entsprechenden Richtungen in* $\mathfrak{y}$ *miteinander einschließen.* Wir wollen zunächst die Frage nach dem Zusammenhang zwischen dem Winkel φ, den eine beliebige Richtung $d\mathfrak{x}$ mit einer Hauptrichtung bildet, und dem Winkel ρ zwischen den den Richtungen $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x}$ entsprechenden Richtungen $d\mathfrak{y}$ und $d\mathfrak{y}^*$ in aller Allgemeinheit beantworten, d. h. ohne vorauszusetzen, daß $d\mathfrak{x}$ eine Hauptrißrichtung sei: Wenn wir mit $\mathfrak{e}_1$ und $\mathfrak{e}_2$ die zueinander senkrechten Einheitsvektoren eines Paares von Hauptrichtungen in $\mathfrak{x}$, mit $m'\mathfrak{e}_1'$ und $m''\mathfrak{e}_2'$ die ihnen entsprechenden Vektoren in $\mathfrak{y}$ bezeichnen, so können wir setzen

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi\,, \qquad d\mathfrak{x}^* = -\mathfrak{e}_1 \sin\varphi + \mathfrak{e}_2 \cos\varphi\,,$$

also

$$d\mathfrak{y} = m'\mathfrak{e}_1' \cos\varphi + m''\mathfrak{e}_2' \sin\varphi\,, \qquad d\mathfrak{y}^* = -m'\mathfrak{e}_1' \sin\varphi + m''\mathfrak{e}_2' \cos\varphi\,;$$

es wird folglich wegen $\mathfrak{e}_1'^2 = \mathfrak{e}_2'^2 = 1$ und $\mathfrak{e}_1'\mathfrak{e}_2' = 0$

$$d\mathfrak{y}\,d\mathfrak{y}^* = m m^* \cos\rho = (m''^2 - m'^2)\cos\varphi\,\sin\varphi\,.$$

Für $\varphi = \psi$ wird $\rho = \hat{\rho}$; mithin geht (12'') über in

$$\Delta : W^3 = m_1 m_2 (n_1 - n_2) \cos \hat{\rho}\,, \tag{12'''}$$

wo $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$ die linearen Abbildungsmaßstäbe für die Hauptrißrichtungen sind.

Das Verschwinden dieser Größe im Fall der Winkeltreue rührt daher, daß dann für alle Werte von φ der Winkel $\rho = \pi/2$ wird; im allgemeinen aber bedeutet das Nullwerden von $\cos \hat{\rho}$, daß *den Hauptrißrichtungen wieder zueinander senkrechte Richtungen entsprechen, die* folglich *Hauptrichtungen* sind.

Man kann wünschen, m und m^* durch die Hauptmaßstäbe m' und m'' zu ersetzen; dies kann auf folgende Weise erreicht werden: Der Flächenmaßstab M der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ an der Stelle (u, v) läßt sich, da $d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{e}_1 \times \mathfrak{e}_2 = \mathfrak{c}$ ein Einheitsvektor ist, als Flächeninhalt des von $d\mathfrak{y}$ und $d\mathfrak{y}^*$ aufgespannten Parallelogramms ganz allgemein auf zwei Arten ausdrücken:

$$M = m' m'' = m\, m^* \sin \rho\,.$$

Hieraus ergibt sich für $\Delta : W^3$ der folgende Ausdruck:

$$\Delta : W^3 = M (n_1 - n_2) \operatorname{cotg} \hat{\rho}\,. \tag{12^{IV}}$$

Es sei noch vermerkt, daß aus (12'') und (12^{IV}) eine Beziehung zwischen den Winkeln ψ und $\hat{\rho}$ folgt, die man jedoch sofort als allgemein zwischen φ und ρ bestehend erkennen wird, in die das schon vor längerer Zeit eingeführte „Verzerrungsmaß" der Abbildung[3] $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$

$$V = \left(\frac{m'^2 - m''^2}{2 m' m''}\right)^2$$

eingeht, nämlich

$$\operatorname{cotg}^2 \rho = V \sin^2 2\varphi\,. \tag{13}$$

Dieses Ergebnis steht im Einklang mit der Tatsache, daß das Verschwinden von V kennzeichnend für die Winkeltreue der Abbildung $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ an der betrachteten Stelle ist.

3. Eine Maßgröße

Es möge schließlich eine *Maßfunktion* für die Abweichung von der Ebenmäßigkeit erklärt werden, in Analogie zum Verzerrungsmaß, das die Abweichung von der Winkeltreue zu messen erlaubt. Natürlich können wir auf verschiedenen Wegen vorgehen. Jedenfalls werden wir wünschen, daß diese Funtion den Wert Null annimmt, wenn die Abbildung ebenmäßig ist, und daß sie um so größer wird, je weniger dieser Fall vorliegt; zudem soll sie unbeschränkt sein, jedoch nur bei Ausartung der Abbildung unendlich werden. Man möchte zunächst meinen, daß man sie einfach gleich $\operatorname{cotg}^2 \hat{\rho}$ wählen könnte; doch ist zu bedenken, daß im Falle der Gleichmäßigkeit $\hat{\rho}$ nicht definiert ist. Deshalb wollen wir den gerade in diesem Fall verschwindenden Faktor $n_1 - n_2$ bei $\operatorname{cotg} \hat{\rho}$, so wie er in ($12^{\mathrm{IV}}$) steht, belassen. Würden wir uns nun auf Grund dieser Überlegungen für die Wahl der Funktion $\Delta : W^3 M$ als Maßgröße entscheiden, so würde deren Wert noch durch eine Änderung des Abbildungsmaßstabes, wie sie durch Anfügen eines richtungsunabhängigen Faktors verursacht wird, beeinflußt; denn wenn alle Vektoren $d\mathfrak{y}$ mit einer Zahl μ multipliziert werden, erhält $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ den Faktor μ, $d\mathfrak{y}^2$ den Faktor μ^2, mithin Δ den Faktor μ^3, M aber den Faktor μ^2, während W ungeändert bleibt, so daß die Größe $\Delta : W^3 M$ den Faktor μ erhält. Wir können das vermeiden, wenn wir Δ durch $W^3 M^{3/2}$ dividieren; um Irrationalitäten auszuschließen, arbeiten wir aber lieber mit dem Quadrat dieser Größe, definieren also die Funktion

$$Q = \Delta^2 : W^6 M^3 = \frac{(n_1 - n_2)^2}{m' m''} \operatorname{cotg}^2 \hat{\rho} \tag{14}$$

als Maß für die Abweichung der Abbildung $\mathfrak{x} \rightleftarrows \mathfrak{y}$ von der Ebenmäßigkeit. Da nach (5a), wenn $\mathfrak{c}'$ den Einheitsvektor der positiven Normalen der Fläche $\mathfrak{y}$ bezeichnet, $M = \mathfrak{c}' \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{c}\, \mathfrak{j}_1$ ist, wird demnach

$$Q = \Delta^2 : (\mathfrak{c}\, \mathfrak{j}_1)^3\, (\mathfrak{c}' \mathfrak{j}_2)^3; \tag{14'}$$

dieser Ausdruck macht die Symmetrie der Funktion Q in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ augenscheinlich.

Man beachte die Bedeutung, die das Vorzeichen von Q für die Abbildung besitzt: M und damit Q wird negativ, wenn von den Vektoren $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ einer in die positive, der andere in die negative Normalenrichtung seiner Fläche weist. Q ist also ebenso wie M positiv oder negativ, je nachdem die Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ den positiven Drehsinn in $\mathfrak{x}$ in den positiven Drehsinn in $\mathfrak{y}$ überführt oder nicht. Wir beobachten hier den gleichen Zusammenhang zwischen dem Verhalten einer Maßfunktion hinsichtlich des Vorzeichens und der Orientierungstreue der Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ wie bei der Funktion

$$P = (n_1 - n_2)^2 : M, \tag{15}$$

die als Maß für die Abweichung der Abbildung von der Gleichmäßigkeit erklärt werden kann.