Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Differentialformen in der Theorie der Flächenabbildungen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 4. Juni 1954

In einer kürzlich in diesen Berichten erschienenen Arbeit[1] wurden die drei quadratischen Differentialformen betrachtet, mit denen man es in der Theorie der Paare punktweise durch gleiche Parameterwerte aufeinander bezogener Flächen $\mathfrak{x}(u, v)$ und $\mathfrak{y}(u, v)$ in erster Linie zu tun hat, sobald man sich für die gegenseitigen Lagen entsprechender Linienelemente interessiert; es sind das die drei „Grundformen"

$$d\mathfrak{x}^2, \quad d\mathfrak{y}^2, \quad d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}. \tag{1}$$

Es wurde besonders die Frage erörtert, was es geometrisch bedeutet, wenn diese drei Formen linear abhängig sind. Dabei wurde an eine Beziehung erinnert, in der sie zu einer gewissen vierten Form stehen, wenn die Flächen einander *mit parallelen Berührebenen* zugeordnet sind, nämlich zu der Form

$$\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}, \tag{2}$$

die aus der vektoriellen quadratischen Differentialform

$$d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} \tag{3}$$

durch skalare Multiplikation mit dem Einheitsvektor $\mathfrak{c}$ der positiven Normalen der Fläche $\mathfrak{x}$ hervorgeht:[2] mit Hilfe der vektoriellen und skalaren Differentialinvarianten vom Gewicht 1 des Flächenpaares $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$,

$$\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v, \quad \mathfrak{j}_2 = \mathfrak{y}_u \times \mathfrak{y}_v, \quad \mathfrak{j} = \mathfrak{x}_u \times \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \times \mathfrak{y}_u, \tag{4a}$$

$$j = \mathfrak{x}_u \mathfrak{y}_v - \mathfrak{x}_v \mathfrak{y}_u, \tag{4b}$$

[1] Diese Sitzungsberichte, 1954, S. 135 ff.
[2] A. a. O. S. 137.

ließ sich, wenn die Normalenvektoren $\mathfrak{j}_1 \neq 0$ und $\mathfrak{j}_2 \neq 0$ der beiden Flächen parallel sind, die Beziehung in der Gestalt schreiben:

$$\mathfrak{j}_1\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j}_1\mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + \mathfrak{j}_1^2 \cdot d\mathfrak{y}^2 + j \cdot \mathfrak{j}_1\, d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = 0; \qquad (5)$$

$\mathfrak{j}_1\, d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ unterscheidet sich von $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y}$ ebenso wie $\mathfrak{j}_1$ von $\mathfrak{c}$ nur durch den skalaren Faktor $W = \mathfrak{c}\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{c}\mathfrak{x}_u\mathfrak{x}_v$.

1. Skalare Formen

a) Die Betrachtung der unter einer speziellen Voraussetzung bewiesenen Gleichung (5) drängt zu der Fragestellung, in welchem linear homogenen Zusammenhang untereinander *im allgemeinsten Falle* die vier in sie eingehenden *quadratischen Differentialformen* stehen. So wenig prinzipielle Schwierigkeiten bestehen, die Koeffizienten einer solchen Beziehung, auch wenn zu den drei Grundformen (1) eine beliebige vierte quadratische Form in du und dv hinzugenommen wird, in jedem Einzelfall zu bestimmen, so werden wir doch wünschen, daß sie eine möglichst einfache geometrische Bedeutung haben; das aber wird eben davon abhängen, welches Formenquadrupel wir zusammenstellen. Wir wollen damit zugleich die allgemeine Bestimmung dieser Koeffizienten in den in der oben erwähnten Arbeit untersuchten Fällen nachholen, die dort, weil sie in dem damaligen Zusammenhang nicht von Belang war, nur in Sonderfällen durchgeführt wurde.

An geeigneten Formen stehen nun zunächst solche zur Verfügung, die sich, wie schon (2), aus dem Vektor $d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}$ durch skalare Multiplikation mit einem invarianten Vektor, also außer $\mathfrak{j}_1$ etwa $\mathfrak{j}_2$ oder $\mathfrak{j}$, ableiten lassen. Man kann aber auch das Quadrat der skalaren linearen Differentialform γds wählen, die in der *allgemeingültigen Darstellung* für den dem Vektor $d\mathfrak{x}$ zugeordneten Vektor[3]

$$d\mathfrak{y} = n\, d\mathfrak{x} + q\, d\mathfrak{x}^* + \mathfrak{c} \cdot \gamma\, ds \qquad (6)$$

[3] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1948, S. 228 oben sowie unten Gl. (1); dort ist unter γ noch die hier mit γds bezeichnete Pfaffsche Form verstanden.

auftritt, wo ds die Länge von $d\mathfrak{x}$ und

$$d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times d\mathfrak{x} \tag{7}$$

den in der Berührebene der Fläche $\mathfrak{x}$ um $+\frac{\pi}{2}$ gedrehten Vektor $d\mathfrak{x}$ bedeutet, ferner[4]

$$n = d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2 \text{ den „}\textit{Rißmaßstab}\text{“,} \tag{8a}$$

$$q = d\mathfrak{x}^*\, d\mathfrak{y} : d\mathfrak{x}^2 \text{ den „}\textit{Querrißmaßstab}\text{“} \tag{8b}$$

der Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$ für die Richtung $d\mathfrak{x}$, endlich die *lineare Differentialform*

$$\gamma\, ds = \mathfrak{c}\, d\mathfrak{y} \tag{8c}$$

die Größe der Normalkomponente von $d\mathfrak{y}$ bezüglich der Fläche $\mathfrak{x}$ bezeichnet, so daß γ der „*Normalrißmaßstab*“ der Abbildung für die Richtung $d\mathfrak{x}$ genannt werden kann. Nun ergab schon eine frühere Untersuchung,[5] daß, wie übrigens an Hand von (4a, b) nachgeprüft werden kann,

$$\mathfrak{c}\, d\mathfrak{y} = -\mathfrak{J}\, d\mathfrak{x} \tag{9a}$$

und

$$\mathfrak{c} \cdot \gamma\, ds = \mathfrak{v} \times d\mathfrak{x} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{v} = \mathfrak{J}_1 \times \mathfrak{J} \tag{9b}$$

ist, wobei

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{j}_1 : \mathfrak{c}\,\mathfrak{j}_1 = \mathfrak{c}, \qquad \mathfrak{J}_2 = \mathfrak{j}_2 : \mathfrak{c}\,\mathfrak{j}_1, \qquad \mathfrak{J} = \mathfrak{j} : \mathfrak{c}\,\mathfrak{j}_1 \tag{10}$$

gesetzt ist;[6] daher wird die singuläre quadratische Form $(\gamma\, ds)^2 = -\mathfrak{J}_1\, d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{J}\, d\mathfrak{x}$, somit nach einer kleinen Umrechnung wegen $\mathfrak{J}_1\, d\mathfrak{x} = 0$

$$(\gamma\, ds)^2 = \mathfrak{v}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}. \tag{11}$$

Auch sie gehört also zu den in der oben gekennzeichneten Weise aus dem Vektor $d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}$ entstehenden Formen.

Es wird sich jedoch zeigen, daß man zu einem besonders einfachen Zusammenhang gelangt, wenn man zu den drei Formen $d\mathfrak{x}^2$, $d\mathfrak{y}^2$, $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ als vierte die Form $(\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})^2$ hinzufügt, die nicht zu den soeben betrachteten gehört, die aber eine sehr einfache

---

[4] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 15 ff.

[5] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1948, S. 228 u. 230.

[6] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 219 f.

geometrische Bedeutung hat: die Tangentialkomponente $\mathfrak{c}\times d\mathfrak{y}\times\mathfrak{c}$ von $d\mathfrak{y}$ bezüglich der Fläche $\mathfrak{x}$ hat die Länge $|\mathfrak{c}\times d\mathfrak{y}|$; man kann daher

$$p^2 = (\mathfrak{c}\times d\mathfrak{y})^2 : d\mathfrak{x}^2 \tag{12}$$

als Quadrat des „*Tangentialrißmaßstabes*" der Abbildung $\mathfrak{x}\rightarrow\mathfrak{y}$ für die Richtung $d\mathfrak{x}$ bezeichnen; p läßt sich, wie unmittelbar zu sehen, durch den linearen Abbildungsmaßstab[7] m und den Normalrißmaßstab γ ebenso wie durch den Rißmaßstab n und den Querrißmaßstab q ausdrücken:

$$p^2 = m^2 - \gamma^2 = n^2 + q^2, \tag{12'}$$

im Einklang mit der aus (6) durch skalares Quadrieren zu gewinnenden Relation

$$m^2 = n^2 + q^2 + \gamma^2.$$

Die in Aussicht gestellte einfache Beziehung kann auf folgende Weise abgeleitet werden: Wir berechnen den Wert der Form

$$\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2\cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{J}_1\mathfrak{J}\cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + J\cdot\mathfrak{c}\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + (\mathfrak{c}\times d\mathfrak{y})^2$$

dadurch, daß wir zunächst gemäß (8a, b)

$$d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = n\,d\mathfrak{x}^2, \qquad \mathfrak{c}\,d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = q\,d\mathfrak{x}^2$$

und gemäß (12) und (12')

$$(\mathfrak{c}\times d\mathfrak{y})^2 = p^2\,d\mathfrak{x}^2 = (n^2+q^2)\,d\mathfrak{x}^2$$

setzen, weiter aber die in einer früheren Arbeit bewiesenen Ausdrücke[8]

$$\mathfrak{J}_1\mathfrak{J}_2 = n\,n^* + q\,q^*, \tag{13a}$$

$$\mathfrak{J}_1\mathfrak{J} = n + n^*, \tag{13b}$$

$$J = -(q+q^*) \tag{13c}$$

einführen, in denen sich die mit Sternchen versehenen Größen auf die oben schon definierte Richtung $d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c}\times d\mathfrak{x}$ beziehen, und

[7] Nachrichten aus dem Reichsvermessungsdienst, 1942, S. 299 ff.

[8] Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 23, S. 20 (11a), S. 22 (18a).

die übrigens auch mit Hilfe von (7) auf Grund der Erklärungen (4a, b) und (8a, b) gewonnen werden könnten; die durch $d\mathfrak{x}^2 \neq 0$ dividierte Form wird dann

$$(n n^* + q q^*) - (n + n^*)\, n - (q + q^*)\, q + n^2 + q^2 \equiv 0.$$

Wir erhalten somit das allgemeingültige Ergebnis:

$$\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + J \cdot \mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + (\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})^2 = 0. \qquad (14)$$

Hierin erkennen wir unmittelbar eine Verallgemeinerung der Relation (5), da im Falle $\mathfrak{j}_1 \times \mathfrak{j}_2 = 0$ wegen $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{y} = 0$ ja $(\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})^2 = \mathfrak{c}^2 \cdot d\mathfrak{y}^2 - (\mathfrak{c}\, d\mathfrak{y})^2 = d\mathfrak{y}^2$ wird und $\mathfrak{J}_1$ nach (10) ein Einheitsvektor ist.

Man kann der Beziehung (14) noch eine andere Gestalt geben: In den Funktionen $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2 = K$ und $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J} = 2H$ dürfen wir Verallgemeinerungen der Begriffe des *Krümmungsmaßes* und der *doppelten mittleren Krümmung* einer Fläche sehen;[9] die „*Schiefe*"[10] J tritt in der Flächentheorie nicht in Erscheinung, weil sie dort, d. h. bei der Abbildung einer Fläche auf die Einheitskugel durch parallele Normalen, $\mathfrak{x} \to \mathfrak{c}$, immer verschwindet. Setzen wir diese Größen in (14) ein und ersetzen auch die Formen $d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$, $\mathfrak{c}\, d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y}$ und $(\mathfrak{c} \times d\mathfrak{y})^2$ wie oben schon durch n, q und $n^2 + q^2$, so finden wir:

$$K - 2Hn + Jq + n^2 + q^2 = 0; \qquad (14')$$

hier könnte $n^2 + q^2$ nach (12′) durch $m^2 - \gamma^2$ ersetzt werden. (14′) stellt eine Verallgemeinerung der bekannten Relation der Differentialgeometrie dar, auf die in der am Anfang erwähnten Arbeit bereits hingewiesen wurde.[2]

2. Vektorielle Formen

Betrachten wir die Beziehung (5), die unter der Voraussetzung der Parallelität der Normalvektoren $\mathfrak{j}_1$ und $\mathfrak{j}_2$ der Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ in entsprechenden Punkten gilt, aufmerksam, so machen wir die Beobachtung, daß alle Glieder den gemeinsamen vektoriellen

[9] Hieran wurde schon in der in Fußnote 1 angeführten Arbeit erinnert; vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Kl., 1947, S. 23.

[10] Sitz. Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1944, S. 126.

Faktor $\mathfrak{j}_1$ enthalten und daß die anderen in ihnen vorkommenden Vektorfaktoren, nämlich $\mathfrak{j}_1$, $\mathfrak{j}_2$, $\mathfrak{j}$ und $d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y}$ alle untereinander parallel sind; daraus folgt aber, daß man den Faktor $\mathfrak{j}_1$ in allen Gliedern weglassen kann, ohne daß die Gleichung aufhört, richtig zu sein. Das bedeutet, daß die vektorielle quadratische Differentialform

$$\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{j}_1 \cdot d\mathfrak{y}^2 + j \cdot d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} \tag{15}$$

verschwindet, wenn sich die Flächen $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ mit parallelen Berührebenen entsprechen.

Diese Feststellung regt zu der Frage an, wie sich dieser Vektor (15) *im allgemeinen Falle* verhalten mag.

Zunächst kann man sagen, daß er für ein Punktepaar (u, v) die Richtungen der Mantellinien eines Kegels 2.O. annimmt, wenn $du:dv$ alle Werte durchläuft;[11] dieser kann freilich entarten.

Es ist jedoch zu vermuten, daß wir zu einer im einzelnen genaueren Einsicht gelangen, wenn wir von der auch im allgemeinsten Fall verschwindenden skalaren Form ausgehen, die auf der linken Seite der Gleichung (14) steht; denn wir bemerken auch bei ihr, daß alle ihre Glieder den gemeinsamen Vektorfaktor $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{c}$ enthalten, woraus wir hier allerdings nur schließen können, daß die vektorielle quadratische Differentialform

$$\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + j \cdot d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} + d\mathfrak{y} \times \mathfrak{j}_1 \times d\mathfrak{y} \tag{16}$$

einen Berührvektor der Fläche $\mathfrak{x}$ darstellt.

Wir wollen diesen Vektor genauer bestimmen. Zu dem Zweck wählen wir $d\mathfrak{x} = \mathfrak{e}$ als $\mathfrak{x}$ berührenden Einheitsvektor,[12] so daß mit

---

[11] Hierzu vergleiche man Math. Zeitschr. Bd. 49 (1943), S. 430; dort wird ein Kegel 2. O. besprochen, der ebenfalls durch eine vektorielle quadratische Differentialform in du und dv dargestellt wird, und sein Zerfallen diskutiert.

[12] Die Wahl von $d\mathfrak{x}$ als Einheitsvektor schränkt die Allgemeinheit der folgenden Überlegungen nicht ein, sie erspart nur das Mitführen des Faktors $d\mathfrak{x}^2$ auf den rechten Seiten der Gleichungen. – Man könnte auch eine lokale Parametertransformation an der Stelle (u, v) durchführen derart, daß $\mathfrak{x}_u$ und $\mathfrak{x}_v$ zueinander senkrechte Einheitsvektoren mit $\mathfrak{x}_u \times \mathfrak{x}_v = \mathfrak{c}$ werden; die Größen n, q, γ würden sich dann auf die Richtung $\mathfrak{x}_u$ beziehen, n^*, q^*, γ^* auf die Richtung $\mathfrak{x}_v = \mathfrak{c} \times \mathfrak{x}_u$.

$d\mathfrak{x}^* = \mathfrak{c} \times \mathfrak{e} = \mathfrak{e}^*$ wegen $\mathfrak{c} \times \mathfrak{e}^* = -\mathfrak{e}$ nach (6)

$$d\mathfrak{y} = n\mathfrak{e} + q\mathfrak{e}^* + \gamma\mathfrak{c}, \quad d\mathfrak{y}^* = n^*\mathfrak{e}^* - q^*\mathfrak{e} + \gamma^*\mathfrak{c}$$

wird. Sinngemäße Anwendung von (4a) und (4b) führt dann zu folgenden Ausdrücken für die Differentialinvarianten:

$$\begin{aligned} \mathfrak{j}_1 &= \mathfrak{e} \times \mathfrak{e}^* = \mathfrak{c}, \\ \mathfrak{j} &= (n + n^*)\,\mathfrak{c} - \gamma\mathfrak{e} - \gamma^*\mathfrak{e}^*, \\ \mathfrak{j}_2 &= (nn^* + qq^*)\,\mathfrak{c} + (q\gamma^* - n^*\gamma)\,\mathfrak{e} - (q^*\gamma + n\gamma^*)\,\mathfrak{e}^*, \\ j &= -(q + q^*); \end{aligned} \tag{18}$$

ferner wird

$$d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} = q\mathfrak{c} - \gamma\mathfrak{e}^*,$$

$$\begin{aligned} d\mathfrak{y} \times \mathfrak{c} \times d\mathfrak{y} &= (n\mathfrak{e} + q\mathfrak{e}^* + \gamma\mathfrak{c}) \times (n\mathfrak{e}^* - q\mathfrak{e}) \\ &= (n^2 + q^2)\,\mathfrak{c} - n\gamma\mathfrak{e} - q\gamma\mathfrak{e}^*. \end{aligned}$$

Folglich finden wir, wenn wir berücksichtigen, daß $d\mathfrak{x}^2 = 1$, $d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} = n$, $d\mathfrak{x}^*\,d\mathfrak{y} = q$ ist,

$$\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + j \cdot d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} + d\mathfrak{y} \times \mathfrak{j}_1 \times d\mathfrak{y} = (q\gamma^* - n^*\gamma)\,\mathfrak{e};$$

die Bestimmung der, wie wir schon im voraus wissen, verschwindenden Normalkomponente dieses Vektors ist nur eine Wiederholung einer schon früher durchgeführten Umformung. Nun bemerken wir, daß der auf der rechten Seite sich ergebende Vektor gleich der in der dritten der Gleichungen (18) zu findenden $\mathfrak{e}$-Komponente von $\mathfrak{j}_2$ ist; ersetzen wir, um dem in $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ homogenen Charakter der Form Rechnung zu tragen, $\mathfrak{e}$ wieder durch $d\mathfrak{x}$, so erhalten wir also für den Fall einer allgemeinen Abbildung $\mathfrak{x} \to \mathfrak{y}$:

$$\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\,d\mathfrak{y} + j \cdot d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} + d\mathfrak{y} \times \mathfrak{j}_1 \times d\mathfrak{y} = d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{j}_2\,d\mathfrak{x}. \tag{16'}$$

Damit ist die Frage, die wir uns stellten, beantwortet: der tangentiale Vektor, den wir suchten, hat sogar die Richtung $d\mathfrak{x}$.

Bedenken wir aber, daß

$$d\mathfrak{y} \times \mathfrak{j}_1 \times d\mathfrak{y} = \mathfrak{j}_1 \cdot d\mathfrak{y}^2 - d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{j}_1\,d\mathfrak{y}$$

ist, so finden wir nun auch für den Vektor (15) einen einfachen Ausdruck:

$$\mathfrak{j}_2 \cdot d\mathfrak{x}^2 - \mathfrak{j} \cdot d\mathfrak{x}\, d\mathfrak{y} + \mathfrak{j}_1 \cdot d\mathfrak{y}^2 + j \cdot d\mathfrak{x} \times d\mathfrak{y} = d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{j}_2\, d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{j}_1\, d\mathfrak{y}; \tag{15'}$$

beide Seiten dieser Gleichung sind in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ symmetrisch gebaut, wie man erkennt, wenn man berücksichtigt, daß die zur Abbildung $\mathfrak{x} \rightarrow \mathfrak{y}$ inverse $\mathfrak{y} \rightarrow \mathfrak{x}$ die Differentialinvarianten

$$\bar{\mathfrak{j}}_1 = \mathfrak{j}_2, \quad \bar{\mathfrak{j}}_2 = \mathfrak{j}_1, \quad \bar{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}, \quad \bar{j} = -j \tag{19}$$

besitzt.[13]

Wir können jetzt sagen, wann der durch die vektorielle Form (15) dargestellte Kegel zerfällt: Das tritt dann und nur dann ein, wenn die Abbildung $d\mathfrak{x} \longrightarrow d\mathfrak{y}$ mindestens eine Fixrichtung besitzt. Man kann dies in dem nicht trivialen Fall zweier nicht paralleler Berührebenen erkennen, wenn man die Vektoren $d\mathfrak{x}$ und $d\mathfrak{y}$ auf zwei Paare senkrechter Einheitsvektoren $\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2$ und $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3$ in der Form bezieht:

$$d\mathfrak{x} = \mathfrak{e}_1 \cos\varphi + \mathfrak{e}_2 \sin\varphi,$$
$$d\mathfrak{y} = (a\mathfrak{e}_2 + b\mathfrak{e}_3)\cos\varphi + (c\mathfrak{e}_2 + d\mathfrak{e}_3)\sin\varphi;$$

wegen $ad - bc \neq 0$ findet man, daß $d = 0$ sein muß, falls alle Vektoren (15′) einer Ebene parallel sein sollen. In den Differentialinvarianten der Abbildung ausgedrückt lautet die Bedingung[14]:

$$\mathfrak{j}_1\, \mathfrak{j}_2\, \mathfrak{j} = 0.$$

Beachten wir, daß ebenso, wie nach (9a)

$$\mathfrak{j}_1 d\mathfrak{y} = -\,\mathfrak{j}\, d\mathfrak{x} \tag{20a}$$

ist, auch

$$\mathfrak{j}_2 d\mathfrak{x} = -\,\mathfrak{j}\, d\mathfrak{y} \tag{20b}$$

gilt, so sehen wir, daß sich die rechte Seite der Gleichung (15′) auf die Form bringen läßt:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{j}_2 d\mathfrak{x} + d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{j}_1 d\mathfrak{y} &= -\,d\mathfrak{x} \cdot \mathfrak{j}\, d\mathfrak{y} - d\mathfrak{y} \cdot \mathfrak{j}\, d\mathfrak{x} \\ &= -(d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} + d\mathfrak{y} \cdot d\mathfrak{x})\, \mathfrak{j}; \end{aligned} \tag{15''}$$

---

[13] SitzBer. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 220.

[14] Siehe die in der vorigen Fußnote genannte Arbeit, S. 223 ff.

hier tritt somit schließlich noch eine **dyadische quadratische Differentialform**

$$d\mathfrak{x} \cdot d\mathfrak{y} + d\mathfrak{y} \cdot d\mathfrak{x} \tag{21}$$

in Erscheinung.[15]

Solche Formen mögen bei anderer Gelegenheit eingehender untersucht werden.

---

[15] Vgl. Sitz.-Ber. d. Bayer. Akad. d. Wiss., Math.-nat. Abt., 1943, S. 237, und 1944, S. 114 (12); dort wurde auf dyadische Differentialinvarianten aufmerksam gemacht.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1955

Band/Volume: 1954

Autor(en)/Author(s): Löbell Frank

Artikel/Article: Differentialformen in der Theorie der Flächenabbildungen 149-157