BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Bemerkung über *Galois*-Verbindungen

Von Georg **Aumann** in München

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 7. Oktober 1955

In der Literatur erscheint der Begriff der Galois-Verbindung als eine ordnungstheoretische, axiomatische Verallgemeinerung der Polarität im Sinne von G. Birkhoff;[1] inwieweit aber diese Verallgemeinerung über den Ausgangspunkt hinausführt, wird nirgends erörtert. Die Sachlage klärt der nachfolgend bewiesene *Isomorphiesatz:*

Jede Galois-Verbindung ist einer Verengung einer Polarität isomorph.

Da es ein einfaches Verfahren gibt, das gestattet, bei vorgegebener Polarität jede mögliche Verengung zu konstruieren, so steht einem rein konstruktiven Aufbau der Galois-Verbindungen nichts im Wege.

1. Zum Beweis des Isomorphiesatzes sei an die fraglichen Definitionen erinnert.

Sind A, B zwei Mengen und bezeichnet arb eine Relation zwischen den Elementen a von A und b von B, so ist damit eine *Polarität* (A, r, B) erklärt als das Paar von Abbildungen

$$X \to X^* = \{b : b \in B \text{ und } arb \text{ für alle } a \in X\},$$

$$Y \to Y^+ = \{a : a \in A \text{ und } arb \text{ für alle } b \in Y\},$$

wodurch jedem $X \subseteqq A$ ein $X^* \subseteqq B$ und jedem $Y \subseteqq B$ ein $Y^+ \subseteqq A$ in eindeutiger Weise zugeordnet wird.

Zwei Abbildungen $p \to p^*$, $q \to q^+$ zweier teilweise geordneter Mengen P und Q ineinander ($p^* \in Q$ und $q^+ \in P$ für alle $p \in P$ und $q \in Q$) bilden eine *Galois-Verbindung* $(P, *, Q, +)$, wenn dabei gilt:

(1) Wenn $p_1 \leqq p_2$, dann $p_1^* \geqq p_2^*$; wenn $q_1 \leqq q_2$, dann $q_1^+ \geqq q_2^+$.

---

[1] G. Birkhoff, Lattice Theory, 1948, New York; S. 54.

(2) Stets ist $p \leqq p^{*+}$ und $q \leqq q^{+*}$.

Es hat Jürgen Schmidt[2] bemerkt, daß die Forderungen (1) und (2) mit der einzigen

(3) $p \leqq q^{+}$ dann und nur dann, wenn $q \leqq p^{*}$

äquivalent sind.

$(P', *, Q', +)$ heißt eine *Verengung der Galois-Verbindung* $(P, *, Q, +)$, wenn $P' \subseteqq P$, $Q' \subseteqq Q$ und für die Bildmengen P'^{*} und Q'^{+} gilt: $P'^{*} \subseteqq Q'$, $Q'^{+} \subseteqq P'$.

Es ist klar, daß jede Polarität eine Galois-Verbindung und jede Verengung einer Galois-Verbindung wieder eine Galois-Verbindung ist.

Die Gesamtheit aller Verengungen einer Galois-Verbindung $(P, *, Q, +)$ liefert die folgende Konstruktion:

Es sei $P_0 \subseteqq P$ und $Q_0 \subseteqq Q$ beliebig gewählt. Man bildet

$$P' = \bigcap_{n=0}^{\infty} P_n, \quad Q' = \bigcap_{n=0}^{\infty} Q_n,$$

wobei P_n die größte Teilmenge T von P_{n-1} ist mit $T^{*} \subseteqq Q_{n-1}$; analog ist Q_n erklärt, $n = 1, 2, 3, \ldots$. P' und Q' erfüllen ersichtlich die Bedingungen für eine Verengung; ist im übrigen $(P_0, *, Q_0, +)$ selbst schon eine Verengung von $(P, *, Q, +)$, so ist $P' = P_0$, $Q' = Q_0$. Man erhält also auf diese Weise alle Verengungen der vorgegebenen Polarität.

Schließlich sei bemerkt, daß es Galois-Verbindungen gibt, die zu keiner Polarität isomorph sind. Beispiel: $P = \{1, 2, 3\} = Q$ mit den Ordnungsrelationen $1 < 2 < 3$; die Abbildungen seien $p \to p^{*} = 3$, $q \to q^{+} = 3$ für alle p und q. Es liegt eine Galois-Verbindung vor. Da es aber keine Potenzmenge $\mathfrak{P}E$ mit der Mächtigkeit 3 gibt, so gibt es auch keine Polarität, die mit der konstruierten Galois-Verbindung isomorph wäre.

2. Nun sei $(P, *, Q, +)$ die vorgegebene Galois-Verbindung, die als isomorph mit einer Verengung einer Polarität nach-

---

[2] Jürgen Schmidt, Beiträge zur Filtertheorie II, Math. Nachr. 10 (1953), S. 205.

gewiesen werden soll. Wir definieren zwischen den Elementen von P und Q die Relation σ durch

$$p\,\sigma\,q \text{ dann und nur dann, wenn } p \leqq q^+ \text{ und } q \leqq p^*,$$

und dazu die Polarität (P, σ, Q) mit

$$X \to X^{(*)} = \{q : q \in Q \text{ und } p\,\sigma\,q \text{ für alle } p \in X\},\ X \subseteq P,$$

$$Y \to Y^{(+)} = \{p : p \in P \text{ und } p\,\sigma\,q \text{ für alle } q \in Y\},\ Y \subseteq Q.$$

Hierüber gilt nun: Ist $p \in P$ und setzt man $\underline{p} = \{z : z \in P$ und $z \leqq p\}$, so hat man wegen (3) $\underline{p}^{(*)} = \{q : q \in Q$ und $q \leqq z^*$ für alle $z \in \underline{p}\}$. Da aber bereits aus $q \leqq p^*$ folgt $p \leqq q^+$, also $z \leqq q^+$ für alle $z \in \underline{p}$, also $q \leqq z^*$ für alle $z \in \underline{p}$, so dürfen wir schreiben $\underline{p}^{(*)} = \{q : q \in Q$ und $q \leqq p^*\} = \underline{p^*}$. Genau so beweist man die Gleichung $\underline{q}^{(+)} = \underline{q^+}$.

Daher existiert die Verengung $(\underline{P}, (*), \underline{Q}, (+))$ der Galois-Verbindung $(\mathfrak{P}P, (*), \mathfrak{P}Q, (+))$, d. h. der Polarität (P, σ, Q), auf die Teilmengensysteme $\underline{P}$ aller $\underline{p}$ bzw. $\underline{Q}$ aller $\underline{q}$. Da der Mengenverein $\underline{P}$ bzw. $\underline{Q}$ zu P bzw. Q isomorph ist, so ist vermöge der obigen Gleichungen die gegebene Galois-Verbindung $(P, *, Q, +)$ isomorph zur eben genannten Verengung der Polarität (P, σ, Q), w. z. z. w.

3. Trotz dieses Isomorphiesatzes ist die unmittelbare Erzeugung von Galois-Verbindungen auf anderen Wegen als durch Polaritäten keineswegs überflüssig; denn in vielen Fällen dürfte es umständlich sein, auf die durch den Isomorphiesatz angegebene Darstellung mittels einer Polarität zurückzugehen. Hierzu sei als wichtiges Beispiel genannt die *Hüllen-Kern-Konstruktion* einer Galois-Verbindung; sie geschieht nach folgendem Muster:

Es sei $(A, \leqq)$ eine teilweise geordnete Menge und in A seien unabhängig voneinander eine Hüllenoperation[3,4], $x \to x^h$, und

---

[3] Siehe l. c.[1], „closure operation" S. 49.

[4] G. Aumann, Über Hüllen- und Kernbildungen auf Verbänden, J. f. reine und angew. Math. 191 (1953), 50–53.

eine Kernoperation $x \to x^k$, $x \in A$, definiert. Man geht über zu A^h, der Menge aller Hüllen x^h, und zu A^k, der Menge aller Kerne x^k. Bezeichnet $[A^h]$ die invers geordnete Menge A^h, so ist, wie man leicht bestätigt $([A^h], k, A^k, h)$ eine Galois-Verbindung.[5]

---

[5] Der zu jeder Galois-Verbindung gehörige Isomorphiesatz (siehe l. c.[1], S. 56, Theorem 10) gestattet hier auch eine Auslegung ohne Übergang von A^h zu $[A^h]$; vgl. hierzu [4], wo sich auch wichtige Beispiele finden.