BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen

II. Direkte Faktorisierung eines Polynoms

Von Friedrich L. Bauer in München

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 6. Juli 1956

Übersicht

1. Fundamentalbeziehungen zwischen den Iterationspolynomen $Q_r^{(i)}(x)$. 168
1.1. Zusammenhang mit Teil I und mit der Lagrange'schen Variante der Bernoullischen Methode 168
1.2. Fundamentalbeziehungen 171
1.3. Berechnung der $Q_r^{(i)}(x)$ aus der Hauptreihe 173

2. Der Algorithmus der Treppeniteration 175
2.1. Rechenvorschrift 175
2.2. Faktorisierung eines Polynoms durch Treppeniteration 176
2.3. Nullstellenbestimmung durch Treppeniteration 179

3. Der Faktorisierungsalgorithmus 180
3.1. Allgemeine Beziehungen zwischen den Iterationspolynomen der Treppeniteration 180
3.2. Rechenvorschrift und Konvergenzverhalten 182

4. Ein wichtiger Spezialfall 184
4.1. Der Fürstenau'sche Spezialfall der Bernoulli-Koeffizienten a_i . . 184
4.2. Ein Gegenstück zur Transformation der Frobeniusmatrix auf Jacobi-Gestalt 184
4.3. Startreihen im Fürstenau'schen Spezialfall 188
4.4. Matrixformulierung des Faktorisierungsalgorithmus: Faktorisierung durch Dreieckszerlegung der zugeordneten Rekurrenten . 191

5. Treppeniteration für Polynome und Faktorisierungsalgorithmus in voller Allgemeinheit 194
5.1. Art und Bedeutung der Verallgemeinerung 194
5.2. Zusammenhang mit der Konvergenz der LR-Transformation von Rutishauser 195
5.3. Zusammenhang mit anderen Faktorisierungsverfahren 200
5.4. Mehrfach-Faktorisierung 200

6. Gesichtspunkte zur praktischen Durchführung 201
6. 1. Stabilität und Selbstkorrektur 201
6. 2. Stellenverlust durch Auslöschung 201
6. 3. Rechenproben 202
Anhang I 202

In der vorliegenden Untersuchung haben wir uns zum Ziel gesetzt, ein den Erfordernissen programmgesteuerter Rechenanlagen entsprechendes Verfahren zu entwickeln, das die Zerlegung eines Polynoms (vom Grad n) in zwei Faktoren von den vorgeschriebenen Graden i und $n-i$ leistet.

Man kann bei dieser Aufgabe zunächst daran denken, die sämtlichen Nullstellen zu bestimmen und dann die beiden Faktoren aus Linearfaktoren aufzubauen – ein Vorgehen, das sowohl verfahrenstechnisch als numerisch nicht völlig befriedigen wird. Insbesondere kann hier beim Aufbau der Faktoren ein nicht zu vermeidender Genauigkeitsverlust durch Auslöschung auftreten. Unsere Untersuchungen über die Bernoulli-Jacobische Methode[1] führten uns auf einen direkten, den Umweg über die explizite Nullstellenbestimmung vermeidenden Faktorisierungsalgorithmus, der eine Zerlegung nach der Größe der Beträge der Nullstellen leistet und (linear) konvergiert, wenn die gesuchte Zerlegung eindeutig ist. Er basiert auf fundamentalen Beziehungen zwischen den Polynomen ${}^{r}\bar{Q}^{(i)}(x)$, die in I eingehend betrachtet wurden und die die euklidschen Reste[2] des Teileralgorithmus zwischen $P(x)$, dem vorgegebenen Polynom und $x^{i}\,Q^{(0)}(x)$ sind, wobei $Q^{(0)}(x)$ ein weitgehend beliebiges Ausgangspolynom ist (§ 1).

Zwei spezielle Durchführungen kommen für die Anwendungen vornehmlich in Betracht: der *Faktorisierungsalgorithmus*, Rechenvorschrift B (§ 3), der unmittelbar die beiden Faktoren liefert,

---

[1] Beiträge zur Entwicklung numerischer Verfahren für programmgesteuerte Rechenanlagen. I. Quadratisch konvergente Durchführung der Bernoulli-Jacobischen Methode zur Nullstellenbestimmung von Polynomen. Sitz.Ber. Bayer. Akad. Wiss. **1954**, 275–303. Als I zitiert. –
Das Verfahren der abgekürzten Iteration für algebraische Eigenwertprobleme, insbesondere zur Nullstellenbestimmung eines Polynoms. ZAMP 7, 17–32 (1956). Als I a zitiert.

[2] Vgl. die Druckfehlerberichtigung am Ende der Arbeit.

und der *Algorithmus der Treppeniteration*, Rechenvorschrift A (§ 2), der den Faktor mit den betragskleineren Nullstellen und sämtliche übrigen Linearfaktoren (bzw. bei konjugiert-komplexen Nullstellenpaaren die ihnen entsprechenden quadratischen Faktoren) unmittelbar ergibt. Die Treppeniteration kann damit insbesondere auch zur simultanen Bestimmung einiger (betragsgrößter) oder aller Nullstellen eines Polynoms dienen.

Faktorisierungsalgorithmus und Treppeniteration sind Spezialfälle eines allgemeinen Algorithmus zur Mehrfachfaktorisierung (§ 5.4).

Wie schon in I bemerkt wurde, stehen die Polynome ${}^{r}\overline{Q}^{(i)}(x)$ (in dieser Arbeit aus typographischen Gründen mit $u_r^{(i)}(x)$ bezeichnet) in engem Zuammenhang mit Rutishausers QD-Algorithmus. In der Tat ist die Treppeniteration mit diesem mathematisch äquivalent, was selbstverständlich nicht besagt, daß beide Verfahren numerisch gleichartig sind. Im Gegensatz zum QD-Algorithmus ist die Treppeniteration (und der Faktorisierungsalgorithmus) selbstkorrigierend. Die Treppeniteration erkauft das durch erhöhten Rechenaufwand pro Nullstelle; da sie aber nicht zur Bestimmung *aller* Nullstellen zwingt, ist sie in vielen Fällen aufwandsmäßig dem progressiven QD-Algorithmus vergleichbar. Insbesondere kann sie in Verbindung mit direkten Verfahren zur Bestimmung des Säkularpolynoms einer Matrix[1] zur Gewinnung einiger der ersten höheren Eigenwerte vorteilhaft angewandt werden.

Treppeniteration und Faktorisierungsalgorithmus erlauben auch in der Durchführung eine wesentliche Verallgemeinerung: die Ausgangsnäherungen brauchen nicht aus dem Schema der euklidschen Reste genommen werden, zwischen den Iterationspolynomen brauchen also nicht dreigliedrige Rekursionsformeln zu bestehen. Damit kann irgendeine zur Verfügung stehende Ausgangsnäherung zum Start dienen (§ 5).

Treppeniteration für Polynome und Faktorisierungsalgorithmus in voller Allgemeinheit sind der Rutishauserschen LR-Transformation einer Hessenberg-Matrix äquivalent (§ 5.2), die

---

[1] Etwa das Danilewski-Verfahren, vgl. F. L. Bauer, Beiträge zum Danilewski-Verfahren. Ber. Kolloqu. Rechentechnik Dresden 1955, im Druck.

sich für den Fall der euklidschen Reste auf eine Jacobi-Matrix (und damit die LR-Transformation auf den QD-Algorithmus) reduziert.

Während im letzteren Fall im allgemeinen zur Aufstellung der Startreihe Vorbereitungsarbeit zu leisten ist, entfällt diese Notwendigkeit im Spezialfall der Wahl von $Q^{(0)}(x) = 1$, die auch in I eine Rolle spielte (§ 4.3). Für die Bernoullische Methode hat schon Fürstenau auf den Zusammenhang mit symmetrischen Funktionen der Nullstellen hingewiesen. Rutishauser hat gezeigt, wie für den QD-Algorithmus daraus Nutzen zu ziehen ist; unsere unabhängig entstandenen Überlegungen führen elementar auf einige auch theoretisch erwähnenswerte Resultate (§ 4.2) über ein Gegenstück zu Jacobi-Matrizen und zum QD-Algorithmus, nämlich Matrizen der Gestalt $M^{-1}N$, – wo M, N untere und obere Kodiagonal-Dreiecksgestalt (Stieltjesgestalt) besitzen – und ihre LR-Transformation. Insbesondere ist die Frobeniusmatrix selbst von dieser Gestalt.

Der Faktorisierungsalgorithmus läßt sich im Fürstenauschen Spezialfall am einfachsten als Dreieckszerlegung einer dem Polynom zugeordneten rekurrenten Matrix formulieren (§ 4.4).

Es soll noch erwähnt werden, daß auch die Bestimmung der nichtbetragsgrößten Nullstellen durch Treppeniteration stabil ist und nicht mit dem Fortschreiten der Iteration zunehmenden Genauigkeitsverlust durch Auslöschung führender Stellen zeigt. Das letztere ist bemerkenswert, da auch unseren Verfahren (vgl. § 5.2) implizit die Bildung von Minoren der Potenzen einer (Frobenius-)Matrix zugrunde liegt, die schon von Perron (und später von Müntz und Aitken) betrachtet wurde.

Im übrigen kann der Algorithmus der Treppeniteration auch auf den Fall einer beliebigen Matrix (an Stelle der Frobeniusmatrix) erweitert werden[1], er ist dann der allgemeinen LR-Transformation mathematisch äquivalent. Diese allgemeinste Treppeniteration für Matrizen beruht auf Dreieckszerlegung der Matrixpotenzen (§ 5.2); es leuchtet ein, daß die Dreieckszerlegung

[1] Siehe F. L. Bauer, Zusammenhänge zwischen einigen numerischen Iterationsverfahren der linearen Algebra. Ber. Kolloqu. Rechentechnik Dresden 1955, im Druck.

numerisch der bequemste Weg zur Bildung von Minoren ist. Die Dreieckszerlegung kann als Orthogonalisierung an einem festen Vektorsystem, nämlich den Spalten der Einheitsmatrix, aufgefaßt werden; offensichtlich stellt das die Stabilisierungsmaßnahme dar und sicher eine bequemere als etwa die des Verfahrens von Koch.

Ein Verfahren zur quadratisch-konvergenten Durchführung der LR-Transformation (AP-Transformation) wurde von Rutishauser und dem Verf. angegeben[1], es kann selbstverständlich auch für die Frobeniusmatrix benützt werden. Es hat mit dem QD-Algorithmus gemeinsam, daß es nicht selbstkorrigierend ist und zwangsläufig die ganze Breite der Iterationspolynome benützt und liefert; die selbstkorrigierende Treppeniteration kann jedoch (als Nachiteration) unmittelbar angeschlossen werden. In seiner numerischen Durchführung entsteht, im Gegensatz zur Treppeniteration, im Falle der Frobeniusmatrix indessen keine Vereinfachung, so daß es im Rahmen der vorliegenden Untersuchungen nicht weiter behandelt werden soll.

Einheitlichkeit und Übersichtlichkeit der Rechenvorschriften der Treppeniteration und des Faktorisierungsalgorithmus wirken sich bei der Programmierung für Rechenautomaten besonders günstig aus, die Durchführung erfordert angesichts der weitgehenden Unabhängigkeit von einer „guten" Ausgangsnäherung, der Selbstkorrektur und Stabilität und der bequemen Verprobungsmöglichkeit (§ 6) keinerlei Überwachung. Die Verfahren wurden für die PERM (Programmgesteuerte elektronische Rechenanlage der Technischen Hochschule München) programmiert und bei den Probeläufen dieser Anlage eingehend untersucht. Es kann gesagt werden, daß es sich um Verfahren handelt, die ausgesprochen für programmgesteuerte Rechenanlagen geeignet sind.

Die Faktorisierungsaufgabe trat vor zwei Jahren an uns heran im Problem der Hurwitzfaktorisierung, das bei der Berechnung von Filtern in der Nachrichtentechnik auftritt. Hier, wo die Faktorisierung so geschehen soll, daß alle Nullstellen des einen Fak-

---

[1] H. Rutishauser und F. L. Bauer, Détermination des vecteurs propres d'une matrice, C. r. Acad. Sc. 240, 1680 (1955).

tors links einer Geraden liegen und allgemein in jedem Fall, in dem die Faktorisierung nach dem Innern und Äußern eines Kreises geschehen soll, ist die Aufgabe durch eine gebrochenrationale Variablensubstitution auf eine Zerlegung nach Nullstellenbeträgen zurückführbar[1].

Die Abfassung der vorliegenden Mitteilung hat sich durch einige Umstände, nicht zuletzt weil die numerische Erprobung auf der PERM abgewartet wurde, verzögert. Über den allgemeinen Faktorierungsalgorithmus wurde im Oktober 1954 in einer internen Institutsmitteilung und Juni 1955 auf der GAMM-Tagung in Berlin berichtet, die Zusammenhänge mit der *LR*-Transformation und die Einordnung in die Verfahrensklasse vom Bernoullischen Konvergenztypus, sowie weitere Einzelheiten wurden in zwei Vorträgen auf der Rechenmaschinentagung in Darmstadt, Oktober 1955 und auf dem Mathematischen Kolloquium in Dresden, November 1955 mitgeteilt.

Herrn Professor Dr. H. Rutishauser, Zürich, danke ich für eingehende Diskussionen, die in Anbetracht der sich als eng herausstellenden Zusammenhänge zwischen seinen[2] und meinen Untersuchungen besonders fruchtbar waren. Herrn Dr. K. Samelson, München, danke ich für seine Mitarbeit bei der numerischen Erprobung.

§ 1. Fundamentalbeziehungen zwischen den Iterationspolynomen $Q_r^{(i)}(x)$

1.1. Zusammenhang mit Teil I und mit der Lagrangeschen Variante der Bernoullischen Methode

Wir haben in I die Bernoullische Methode zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms $P(x)$ vom (genauen) Grad n untersucht und dabei die Variante von Lagrange[3] aufgegriffen. Nach

[1] Die Anwendung des Faktorisierungsalgorithmus zur Hurwitzfaktorisierung wurde in einer gesonderten Arbeit behandelt: F. L. Bauer, Ein direktes Iterationsverfahren zur Hurwitzzerlegung eines Polynoms, Archiv el. Übertr. 9, 285 (1955).

[2] *QD*-Algorithmus: ZAMP 5, 233 (1954); 5, 496 (1954); 6, 387 (1955); 7, 164 (1956); eine Zusammenfassung erscheint bei Birkhäuser, Basel-Stuttgart. *LR*-Transformation: siehe p. 186 a. a. O.

[3] I, p. 278 a. a. O.

Lagrange entwickle man den Quotienten $Q^{(0)}(x)/P(x)$, wo $Q^{(0)}(x)$ ein beliebiges Polynom vom Grad $n-1$ oder geringer ist, nach fallenden Potenzen

$$\frac{Q^{(0)}(x)}{P(x)} = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \cdots + \frac{a_{i-1}}{x^i} + \frac{1}{x^i} \cdot \frac{Q^{(i)}(x)}{P(x)}. \quad (\text{I. } 12\,\text{a})$$

Die Größen a_i, die sodann der Bernoullischen Differenzengleichung genügen, dienen der Nullstellenbestimmung in bekannter Weise (Bernoulli[1], Jacobi[2], Aitken[2]). Die Restzähler $Q^{(i)}(x)$ sind Polynome vom Höchstgrad $n-1$, sie ergeben sich aus

$$Q^{(i+1)}(x) = x\,Q^{(i)}(x) - a_i P(x)$$

und sind also durch die Kongruenz

$$Q^{(i)}(x) = x^i Q^{(0)}(x) \mod P(x) \qquad (\text{I. } 16)$$

eindeutig bestimmt. Sie spielen in der Lagrangeschen Variante keine selbständige Rolle. Ihre tiefere Bedeutung wird beleuchtet durch die Bemerkung (vgl. I. 1.3), daß (I. 16) nichts anderes ist als eine Vektoriteration[3]

$$\mathfrak{u}^{(i)} = \mathfrak{F}^i \mathfrak{u}^{(0)}$$

mit der zu

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$$

gehörenden Frobeniusmatrix

$$F[P(x)] = \begin{pmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und mit Iterationsvektoren

$$u^{(i)} = \begin{pmatrix} U_1^{(i)} \\ U_2^{(i)} \\ \vdots \\ U_n^{(i} \end{pmatrix},$$

[1] I, p. 277 a. a. O.

[2] I, p. 296 a. a. O.

[3] Wir betrachten hier, abweichend von I, Iteration an Spaltenvektoren.

wobei

$$Q^{(i)}(x) = \sum_{\mu=1}^{n} U_{\mu}^{(i)} x^{n-\mu}.$$

Als Gegenstück entspricht die Vektoriteration mit $\mathfrak{F}^T$ (vgl. I. 3.1) der gewöhnlichen Bernoullischen Methode der schrittweisen Berechnung der a_i aus der Differenzengleichung, worauf schon Fry[1] hingewiesen hat.

Obwohl beide Varianten mathematisch völlig gleichwertig sind, insbesondere gleiches Konvergenzverhalten zeigen, läßt sich aus den Iterationspolynomen $Q^{(i)}(x)$ für die numerische Rechnung Vorteil ziehen, insbesondere, da $Q^{(i)}(x)$ bei entsprechender Normierung unmittelbar gegen $P_1 = \frac{P(x)}{x - \zeta_1}$ strebt, wenn die gewöhnliche Bernoullische Methode konvergiert, also $\frac{a_{i+1}}{a_i}$ gegen ζ_1 strebt.

Überdies gestattet die Berechnung der Iterationspolynome $Q^{(i)}(x)$ eine quadratisch konvergente Abkürzung der Iteration.

Diese Abkürzung stand in I im Mittelpunkt. Nur für den Fall betragsgleicher führender Nullstellen führten wir neben der normierten Hauptreihe $Q^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$ von Iterationspolynomen die Nebenreihen ${}^{r}Q^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, \ldots$; $r = 2, 3, \ldots n$ ein, wobei die ${}^{r}Q^{(i)}(x)$ durch

$$ {}^{r}Q^{(i)}(x) = \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \ldots\ldots a_{i+r-2} & Q^{(i)}(x) \\ a_{i+1} & a_{i+2} \ldots\ldots a_{i+r-1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} \ldots\ldots a_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix} \qquad (I.49)$$

als Polynome vom Höchstgrad $n - r$ definiert sind (vgl. I. 46). Angesichts des in (I. 59) formulierten Grenzverhaltens rücken diese Polynome nun in den Vordergrund, wenn wir im folgenden numerische Methoden zur direkten Faktorisierung eines Polynoms in Faktoren vorgegebener Grade betrachten.

---

[1] I, p. 287 a. a. O.

1.2. Fundamentalbeziehungen

Wir werden hinfort statt ${}^{r}Q^{(i)}$ stets $Q_r^{(i)}$ schreiben, definieren also

$$Q_r^{(i)}(x) = \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \ldots a_{i+r-2} & Q^{(i)}(x) \\ a_{i+1} & a_{i+2} \ldots a_{i+r-1} & Q^{(i+1)}(x) \\ \vdots & \vdots \quad\quad \vdots & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} \ldots a_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix} \quad r = 2,3 \ldots n \tag{1 a}$$

und setzen auch

$$Q_1^{(i)}(x) = Q^{(i)}(x). \tag{1 b}$$

und

$$Q_0^{(i)}(x) \equiv P(x) \quad \text{für alle } i. \tag{1 c}$$

Für die r-reihigen Hankeldeterminanten in (1 a) setzen wir

$$H_r^{(i)} = \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & \ldots & a_{i+r-1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & \ldots & a_{i+r} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & \ldots & a_{i+2r-2} \end{vmatrix} \tag{2 a}$$

und

$$H_0^{(i)} \equiv 1 \quad \text{für alle} \quad i. \tag{2 b}$$

Dann gilt für die Polynome $Q_r^{(i)}(x)$ folgende

erste Fundamentalbeziehung:

$$H_{r-1}^{(i)}\, Q_r^{(i+1)}(x) = H_{r-1}^{(i+1)} x \cdot Q_r^{(i)}(x) - H_r^{(i)}\, Q_{r-1}^{(i+1)}(x) \tag{3}$$

$$\text{für } i = 0,\ 1,\ 2, \ldots \quad \text{und} \quad r = 1,\ 2, \ldots n.$$

Sie lautet für $r = 1$

$$Q^{(i+1)}(x) = x \cdot Q^{(i)}(x) - a_i P(x)$$

stellt also die Definitionsgleichung der $Q^{(i)}$ dar. Für $r = 2 \ldots n$ betrachte man (3) in der Form

$$H_{r-1}^{(i+1)} \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \ldots a_{i+r-2} & Q^{(i+1)}(x) \\ a_{i+1} & a_{i+2} \quad\quad a_{i+r-1} & Q^{(i+2)}(x) \\ \vdots & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} \quad\quad a_{i+2r-3} & Q^{(i+r)}(x) \end{vmatrix} -$$

$$-H_{r-1}^{(i)} \begin{vmatrix} a_{i+1} & a_{i+2} & \ldots & a_{i+r-1} & Q^{(i+1)}(x) \\ a_{i+2} & a_{i+3} & & a_{i+r} & Q^{(i+2)}(x) \\ \vdots & & & & \\ a_{i+r} & a_{i+r+1} & & a_{i+2r-2} & Q^{(i+r)}(x) \end{vmatrix} =$$

$$H_r^{(i)} \begin{vmatrix} a_{i+1} & a_{i+2} & \ldots & a_{i+r-2} & Q^{(i+1)}(x) \\ a_{i+2} & a_{i+3} & & a_{i+r-1} & Q^{(i+2)}(x) \\ \vdots & & & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & & a_{i+2r-4} & Q^{(i+r-1)}(x) \end{vmatrix} .$$

Nach der letzten Spalte entwickelt, ist der Koeffizient von $Q^{(\mu)}(x)$ auf der linken Seite eine zweireihige Determinante aus $(r-1)$-reihigen Determinanten, die sich nach dem Theorem über zusammengesetzte Determinanten in das auf der rechten Seite auftretende Produkt aus einer r-reihigen und einer $(r-2)$-reihigen Determinante umformen läßt.

In der ersten Fundamentalbeziehung (3) tritt x explizit auf. Das unterscheidet sie von der folgenden

zweiten Fundamentalbeziehung:

$$H_{r-1}^{(i+1)} Q_{r+1}^{(i)}(x) = H_r^{(i)} Q_r^{(i+1)} - H_r^{(i+1)} Q_r^{(i)} \tag{4}$$

$$\text{für } i = 0, 1, 2 \ldots \text{ und } r = 1, 2, \ldots n$$

auf die wir schon in (I.61) hingewiesen haben. Die Beziehung (4) läßt sich wiederum in der Form

$$H_{r-1}^{(i+1)} \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & \ldots & a_{i+r-1} & Q^{(i)} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & & a_{i+r} & Q^{(i+1)} \\ \vdots & & & & \\ a_{i+r} & a_{i+r+1} & & a_{i+2r-1} & Q^{(i+r)} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r-1} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & & a_{i+r} \\ \vdots & & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & & a_{i+2r-2} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} & \dots & a_{i+r-2} & Q^{(i)} \\ a_{i+1} & a_{i+2} & & a_{i+r-1} & Q^{(i+1)} \\ \vdots & & & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & & a_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_{i+1} & a_{i+2} & \dots & a_{i+r} \\ \vdots & & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & & a_{i+2r-2} \\ a_{i+r} & a_{i+r+1} & & a_{i+2r-1} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a_{i+1} & a_{i+2} & \dots & a_{i+r-1} & Q^{(i+1)} \\ & & & & \\ a_{i+r-1} & a_{i+r} & & a_{i+2r-3} & Q^{(i+r-1)} \\ a_{i+r} & a_{i+r+1} & & a_{i+2r-2} & Q^{(i+r)} \end{vmatrix} \end{vmatrix}$$

mittels des Theorems über zusammengesetzte Determinanten verifizieren.

1.3. Berechnung der $Q_r^{(i)}(x)$ aus der Hauptreihe

Der Koeffizient der höchsten Potenz x^{n-r} in $Q_r^{(i)}(x)$ ist gerade $H_r^{(i)}$, vgl. (I. 50). Soweit $H_r^{(i)}$ nicht verschwindet, führen wir wie in I normierte Polynome $\bar{Q}_r^{(i)}(x)$ ein, die wir jetzt mit $u_r^{(i)}(x)$ bezeichnen,

$$u_r^{(i)}(x) = \frac{Q_r^{(i)}(x)}{H_r^{(i)}} = x^{n-r} + \cdots, \tag{5a}$$

falls $H_r^{(i)} \neq 0$ ist, insbesondere

$$u_0^{(i)}(x) \equiv P(x) \tag{5b}$$

und

$$u_n^{(i)}(x) \equiv 1. \tag{5c}$$

Dann nehmen die beiden Fundamentalbeziehungen die Gestalt an

$$q_r^{(i)} u_r^{(i+1)}(x) = x u_r^{(i)}(x) - u_{r-1}^{(i+1)}(x), \quad r = 1 \dots n \tag{6}$$

mit

$$q_r^{(i)} = \frac{H_{r-1}^{(i)} H_r^{(i+1)}}{H_{r-1}^{(i+1)} H_r^{(i)}} \tag{7}$$

und

$$e_r^{(i)} u_{r+1}^{(i)}(x) = u_r^{(i+1)}(x) - u_r^{(i)}(x), \quad r = 1 \dots n-1 \tag{8}$$

mit

$$e_r^{(i)} = \frac{H_{r-1}^{(i+1)} H_{r+1}^{(i)}}{H_r^{(i+1)} H_r^{(i)}}. \tag{9}$$

Die zweite Fundamentalbeziehung allein erlaubt (in der Form (8)) die Berechnung aller Nebenreihen $u_2^{(i)}(x)$, $u_3^{(i)}(x)$, ..., aus der Hauptreihe der $u_1^{(i)}(x) = \frac{Q^{(i)}(x)}{a_i}$. Zur Berechnung eines bestimmten $u_\sigma^{(i)}(x)$ ist, beginnend mit σ sukzessiven Polynomen $u_1^{(i)}(x)$, $u_1^{(i+1)}(x)$ ... $u_1^{(i+\sigma-1)}(x)$, pyramidenförmig ein Prozeß durchzuführen, der, vgl. (I.62), auf fortgesetzte „cross multiplication" hinausläuft.

Ein anderer, horizontal verlaufender Prozeß besteht, ausgehend von einem einzigen Polynom $u_1^{(i)}(x)$ der Hauptreihe und $u_0^{(i)}(x) \equiv P(x)$, im abwechselnden Gebrauch von (6) und (8) für festes i:

$$\begin{aligned} x\, u_r^{(i)}(x) - u_{r-1}^{(i+1)}(x) &\Rightarrow q_r^{(i)} u_r^{(i+1)}(x) \\ u_r^{(i+1)}(x) - u_r^{(i)}(x) &\Rightarrow e_r^{(i)} u_{r+1}^{(i)}(x). \end{aligned} \tag{10}$$

Dieses Formelpaar liefert die Horizontalreihen $u_\varrho^{(i)}(x)$ und $u_\varrho^{(i+1)}$, soweit es fortsetzbar ist, also die normierten Polynome der beiden Horizontalreihen existieren. Es stellt offensichtlich nichts anderes dar als den Euklid'schen Algorithmus zwischen $Q^{(i)}(x)$ und $P(x)$. Man erkennt das deutlich, wenn man aus (10) die $u_\varrho^{(i+1)}(x)$ eliminiert. Man erhält die dreigliedrige Rekursionsformel für die Horizontalreihe der $u_\varrho^{(i)}(x)$

$$\left(x - (q_r^{(i)} + e_{r-1}^{(i)})\right) u_r^{(i)}(x) - u_{r-1}^{(i)}(x) \Rightarrow e_r^{(i)} q_r^{(i)} u_{r+1}^{(i)}(x). \tag{11}$$

Im übrigen erhält man durch Elimination der $u_\varrho^{(i)}(x)$ aus (10) die Beziehung für die $u_\varrho^{(i+1)}(x)$

$$\left(x - (q_r^{(i)} + e_r^{(i)})\right) u_r^{(i+1)}(x) - u_{r-1}^{(i+1)} \Rightarrow e_r^{(i)} q_{r+1}^{(i)} u_{r+1}^{(i+1)}(x). \tag{12}$$

Aus (10) erhält man unmittelbar einen S-Kettenbruch für

$$R(x) = \frac{Q^{(i)}(x)}{P(x)},$$

dessen gerader bzw. ungerader Teil die durch (11) und (12) vermittelten J-Kettenbrüche sind. Ein Vergleich mit Rutishauser[1], p. 239 mag die schon in I, p. 295 erwähnten Zusammenhänge aufzeigen, die unsere Untersuchungen mit dem QD-Algorithmus haben. Insbesondere ergeben sich die Rhombenregeln des QD[2]

$$\begin{aligned} q_r^{(i+1)} + e_{r-1}^{(i+1)} &= q_r^{(i)} + e_r^{(i)} \\ e_r^{(i+1)}\, q_r^{(i+1)} &= e_r^{(i)}\, q_{r+1}^{(i)} \end{aligned} \tag{13}$$

durch Vergleich aus (11) für $i+1$ statt i und (12). Wir werden diese Beziehungen indes nicht zur numerischen Rechnung gebrauchen. Die Polynome $u_r^{(i)}(x)$ andererseits treten im QD-Algorithmus nicht auf.

§ 2. Der Algorithmus der Treppeniteration

2.1. Rechenvorschrift

Die horizontal verlaufenden Prozesse in 1.3 sind zur Berechnung der Polynome der Nebenreihen für hohen Iterationsindex i numerisch unbefriedigend. Falls nämlich die $u_r^{(i)}(x)$ für $i \to \infty$ konvergieren, streben die $e_r^{(i)}$ gegen Null und die benützte zweite Fundamentalbeziehung (8) ergibt zunehmend stärkere Auslöschung. Nur im Falle der Nichtkonvergenz wurde in I die «cross multiplication» empfohlen.

Deshalb empfiehlt es sich, solange man noch weit genug von der Konvergenz entfernt ist, durch horizontale Rechnung nach 1.3 die Ausgangsgrößen für eine weitere Berechnung aller $Q_r^{(i)}(x)$ allein mit Hilfe der ersten Fundamentalbeziehung (6) zu errechnen. Offensichtlich ist es technisch möglich, m Vertikalreihen vollständig zu berechnen, wenn eine Anfangsquerreihe

$$u_1^{(i_1)}(x),\ u_2^{(i_2)}(x),\ \ldots\ u_m^{(i_m)}(x), \quad \text{sowie} \quad u_0^{(i_0)} \equiv P(x),$$

zur Verfügung steht mit

$$i_{\varrho+1} - i_\varrho \geqq -1; \quad \varrho = 1.\ \ldots\ m-1. \tag{14}$$

[1] ZAMP 5, 233 (1954).

[2] A. a. O., Gl. (4).

Für das Folgende soll vorausgesetzt werden, daß die Startreihe eine reine Horizontalreihe ist, wie sie sich etwa durch den Euklid'schen Algorithmus nach 1.3 ergibt. Eine Schrägreihe, die den Bedingungen (14) genügt – wie etwa die durch cross multiplication aus $Q_1^{(0)}(x) = Q(x)$ und den Polynomen der Hauptreihe bis einschließlich $Q_1^{(n-2)}(x)$ entstehende Reihe $u_1^{(n-2)}(x)$, $\ldots\; u_{n-1}^{(0)}(x)$ – läßt sich stets bis zu einer Horizontalreihe fortsetzen. Man beachte auch, daß $u_n^{(i)}(x) \equiv 1$ ist.

Die Koeffizienten der Polynome einer Horizontalreihe ergeben ein treppenartig fallendes Schema (im Beispiel für $n = 6$)

1					
*	1				
*	*	1			
*	*	*	1		
*	*	*	*	1	
*	*	*	*	*	1
$u_1^{(i)}$	$u_2^{(i)}$	$u_3^{(i)}$	$u_4^{(i)}$	$u_5^{(i)}$	$u_6^{(i)}$

Wir wählten deshalb den Namen „Treppeniteration" für nachfolgende Verallgemeinerung der Bernoullischen Iteration:

Rechenvorschrift A (Algorithmus der Treppeniteration)
Gegeben $P(x)$ vom Grad n und
$m \leqq n$ Polynome $u_1^{(0)}(x), \;\ldots\; u_m^{(0)}(x)$.
Für $i = 0, 1, 2, \ldots$
für $r = 1, 2, \ldots\, m$

$$x u_r^{(i)}(x) - u_{r-1}^{(i+1)}(x) \Rightarrow q_r^{(i)} u_r^{(i+1)}(x)$$
$$\left(u_r^{(i)} = x^r + \cdots; \quad u_0^{(i)}(x) \equiv P(x)\right). \tag{15}$$

Für $m = 1$ stellt die Vorschrift A genau die Lagrange'sche Variante der Bernoullischen Methode von I dar.

(15) kann in Analogie zu (I. 11 a) geschrieben werden

$$q_r^{(i)} u_r^{(i+1)} = x \cdot u_r^{(i)}(x) \;mod\; u_{r-1}^{(i)}(x). \tag{15a}$$

2.2. Faktorisierung eines Polynoms durch Treppeniteration

Die Nullstellen von $P(x)$ mögen wieder nach einer nicht-aufsteigenden Folge der Beträge numeriert sein,

$$|\xi_1| \geqq |\xi_2| \geqq \cdots \geqq |\xi_n| > 0. \tag{16}$$

Sie können ganz beliebig sein; ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann aber angenommen werden, daß keine Nullstelle verschwindet. Die (eindeutige) Zerlegung von $P(x)$ in zwei Polynome $s_k(x)$ und $u_k(x)$ von den Graden k und $n-k$ derart, daß jede Nullstelle von $s_k(x)$ betragsgrößer ist als alle Nullstellen von $u_k(x)$, soll Betragszerlegung von $P(x)$ heißen. Die Betragszerlegung in Faktoren von den Graden k und $n-k$ existiert dann und nur dann, wenn $|\xi_k| > |\xi_{k+1}|$. Mit diesen Bezeichnungen können wir über den Algorithmus der Treppeniteration folgende Aussagen formulieren:

Voraussetzung I: Es existiert eine volle Horizontalreihe von nach (5) definierten normierten Polynomen $u_\varrho^{(0)}(x)$ und dient als Startreihe der Treppeniteration (sie braucht dazu nicht vollständig benützt zu werden).

Satz 1: Unter der Voraussetzung I konvergiert die Vertikalreihe $u_r^{(i)}(x)$ von Polynomen vom genauen Grad $n-r$ (für $i \to \infty$), falls eine Betragszerlegung von $P(x)$ nach Graden r und $n-r$ existiert, das heißt, falls $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$; und strebt gegen $u_r(x)$,

$$u_r^{(i)}(x) \to u_r(x) = \frac{P(x)}{(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_r)}. \tag{17}$$

Die Konvergenz ist linear, als Konvergenzfaktor tritt $\left|\frac{\xi_{r+1}}{\xi_r}\right|$ auf.

Für $r = n$ erhält man den einen Faktor aller Betragszerlegungen von $P(x)$ (einschließlich trivialerweise $u_n(x) = 1$). Die Treppeniteration stellt also ein Verfahren zur direkten Faktorisierung von $P(x)$ dar.

Für den Beweis ist alles in I vorbereitet. Falls voraussetzungsgemäß eine volle Horizontalreihe existiert, bricht der Euklidsche Algorithmus für $u_1^{(0)}(x)$ und $P(x)$ nicht vorzeitig ab, $Q_1^{(0)}(x)$ und $P(x)$ haben also keinen gemeinsamen Teiler. Daraus folgt, daß die Gewichte e_μ in (I.9) bzw. (I.77) sämtlich nicht verschwinden. Für den Fall einfacher Nullstellen ist sodann die Bedingung $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ notwendig und hinreichend zur Konvergenz in der in Satz I angegebenen Weise, vgl. I. p. 293 oben und (I. 59). Auch die lineare Konvergenz ist dort (p. 292) ersichtlich. Die Überlegungen sind auf den Fall mehrfacher Nullstellen unter Heranziehung von (I. 82) ohne weiteres übertragbar. Wir möchten uns hier die etwas umständlichen Umformungen ersparen und nur anmerken, daß Konvergenz einer Vertikalreihe $u_r^{(i)}(x)$ auch dann herrscht, wenn $\xi_r = \xi_{r+1}$ ist und alle von ξ_r verschiedenen ξ_μ auch betragsverschieden sind; allerdings nur noch logarithmische Konvergenz, die sich praktisch kaum einmal bemerkbar machen dürfte. Konvergenz herrscht im übrigen nur in diesen beiden Fällen, also genau dann, wenn die Zerlegung von $P(x)$ in zwei Faktoren von den Graden r und $n-r$, derart daß die Nullstellen der ersteren betragsmäßig *größer oder gleich* den Nullstellen des letzteren sind, eindeutig ist.

Im praktisch recht bedeutsamen Fall $m < n$ kann ohne die Voraussetzung der Existenz einer vollen Horizontalreihe von $u_\varrho^{(0)}(x)$ ein zufälliges Verschwinden gewisser Gewichte eintreten, wodurch theoretisch für die Konvergenzbedingungen diejenigen Nullstellen, deren Gewichte verschwinden, ausfallen. Abgesehen davon, daß dieser Umstand nur zufällig und für numerisch gegebene Polynome unwahrscheinlich ist, ist die Iteration dann offensichtlich instabil. Unter dem Einfluß von Rundungsfehlern kann das Verschwinden dieser Gewichte nicht aufrechterhalten bleiben, so daß sich schließlich die „normale Konvergenz" nach Satz 1 durchsetzen muß. Im übrigen soll die Frage nach dem Verhalten der Iteration unter dem Einfluß von Rundungsfehlern bis § 5 zurückgestellt werden.

Bereits unter der schwächeren Voraussetzung über die Existenz einer Horizontalreihe $u_1^{(0)}(x) \;\ldots\; u_m^{(0)}(x)$ existieren alle $u_\varrho^{(i)}(x)$, $\varrho = 1 \ldots m$. Denn $u_1^{(i)}(x) = x^i Q_1^{(0)}(x)\ mod\ P(x)$ hat mit $P(x)$ keinen anderen Teiler gemeinsam, als $u_1^{(0)}(x)$ es hat, und der Teileralgorithmus ist damit stets bis zum m-ten Glied fortsetzbar. Ein Versagen des Algorithmus kann sonach nur noch durch das Verschwinden oder Kleinwerden eines $q_r^{(i)}$ hervorgerufen werden. Tatsächlich können zum Beispiel betragsgleiche reelle Nullstellen entgegengesetzten Vorzeichens im Limes störend wirken. Im allgemeinen streben jedoch, vgl. den nächsten Abschnitt 2.3, die $q_r^{(i)}$ für $i \to \infty$ endlichen Grenzwerten zu.

2.3. Nullstellenbestimmung durch Treppeniteration

Die bei der Treppeniteration auftretenden Größen $q_r^{(i)}$ konvergieren unter etwas engeren Bedingungen als die Vertikalreihen. Es gilt

Satz 2: Unter der Voraussetzung I und falls die Nullstelle ξ_r betragsisoliert ist,

$$|\xi_{r-1}| > |\xi_r| > |\xi_{r+1}|$$

(die erste bzw. letzte Ungleichung entfällt für $r = 1$ bzw. n) konvergiert die Folge $q_r^{(i)}$, $r = 1 \ldots m$ für $i \to \infty$, und strebt gegen ξ_r,

$$q_r^{(i)} \to \xi_r. \tag{18}$$

Die Konvergenz ist linear.

Die Größen $q_r^{(i)}$ treten auch im *QD*-Algorithmus auf, der nur der Vollständigkeit halber erwähnte Satz 2 ist Rutishausers[1] Satz 3 und Satz 4, Folgerung 1. Ein unmittelbarer Beweis ergibt sich durch Vergleich von

$$x\, u_r(x) - \xi_r\, u_r(x) = u_{r-1}(x) \tag{19}$$

mit

$$x\, u_r^{(i)}(x) - q_r^{(i)}\, u_r^{(i+1)}(x) = u_{r-1}^{(i+1)}(x) \tag{20}$$

im Limes $i \to \infty$.

Falls

$$|\xi_{r-1} = \xi_r| > |\xi_{r+1}| \text{ oder } |\xi_{r-1}| > |\xi_r = \xi_{r+1}| \quad \text{oder}$$

$$\xi_{r-1} = \xi_r = \xi_{r+1}$$

und wiederum alle von ξ_r verschiedenen ξ_μ auch betragsverschieden sind, herrscht ebenfalls Konvergenz, jedoch wiederum nur logarithmische.

---

[1] S. 175 a. a. O.

Gl. (20) verbindet eine Linearkombination zweier Polynome der r-ten Vertikalreihe mit einer der vorausgehenden. Eine analoge Gleichung, die drei Polynome der r-ten Vertikalreihe mit einer der zweitvorausgehenden Vertikalreihe verbindet, ergibt sich durch Elimination aus (20)

$$x^2 u_r^{(i)}(x) - [q_r^{(i)} + q_{r-1}^{(i+1)}]\, x u_r^{(i+1)} + q_r^{(i+1)} q_{r-1}^{(i+1)} u_r^{(i+2)} = u_{r-2}^{(i+2)} \tag{21}$$

$$r = 2 \ldots n.$$

Daraus ergibt sich

Satz 2a: Unter der Voraussetzung I und falls $|\xi_{r-2}| > |\xi_{r-1}|$ *und* $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$, *falls also das Nullstellenpaar* ξ_{r-1}, ξ_r *betragsisoliert ist, strebt*

$$\begin{aligned} q_r^{(i)} + q_{r-1}^{(i+1)} &\rightarrow \xi_r + \xi_{r-1} \\ q_r^{(i+1)}\, q_{r-1}^{(i+1)} &\rightarrow \xi_r\, \xi_{r-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Der Beweis kann unmittelbar durch Vergleich analog (19) geschehen. Nach Satz 2a können insbesondere betragsgleiche (meist konjugiert-komplexe) Nullstellenpaare behandelt werden

§ 3. Der Faktorisierungsalgorithmus

3.1. Allgemeine Beziehungen zwischen den Iterationspolynomen der Treppeniteration

Gl. 21 stellt den ersten nichttrivialen Vertreter einer Reihe von allgemeinen Beziehungen dar, die zwischen den Polynomen, die bei der Treppeniteration auftreten, gelten. Es gilt nämlich der

Satz 3: Innerhalb der Polynome $u_r^{(i)}(x)$, $r = 0 \ldots n$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, *die der Rechenvorschrift A gemäß durch die Beziehungen (20)*

$$u_{r-1}^{(i+1)} = x u_r^{(i)}(x) - q_r^{(i)} u_r^{(i+1)}(x)$$

verknüpft sind, ist durch $p + 1$ *sukzessive Polynome aus der* r*-ten Vertikalreihe jedes Polynom aus der* $(r-p)$*-ten Vertikalreihe darstellbar,*

$$\begin{aligned}u_{r-p}^{(i+p)}(x) = x^p u_r^{(i)}(x) &+ l_1^{(i)}(r,p)\ x^{p-1} u_r^{(i+1)}(x) + \\ &+ l_2^{(i)}(r,p)\ x^{p-2} \cdot u_r^{(i+2)}(x) + \cdots + \\ &+ l_{p-1}^{(i)}(r,p)\ x u_r^{(i+p-1)}(x) + l_p^{(i)}(r,p)\ u_r^{(i+p)}(x)\end{aligned} \tag{23}$$

$$p = 0, 1, \ldots r.$$

Dabei ist

$$l_1^{(i)}(r, 1) = -q_r^{(i)}; \tag{24}$$

die übrigen $l_\mu^{(i)}(r,p)$, $\mu = 2, \ldots p$ ergeben sich rekursiv aus

$$\begin{gathered} l_\mu^{(i)}(r, p+1) = l_\mu^{(i)}(r,p) - q_{r-p}^{(i+p)}\, l_{\mu-1}^{(i+1)}(r,p) \\ (\mu = 1, \ldots p+1; \quad l_0^{(i)}(r,p) \equiv 1, \quad l_{p+1}^{(i)}(r,p) \equiv 0). \end{gathered} \tag{25}$$

Der Induktionsbeweis liegt auf der Hand. Einer späteren Verallgemeinerung (§ 5) wegen merken wir an, daß Satz 3 unabhängig davon gilt, ob die Startreihe der $u_r^{(0)}(x)$ nach (5) definiert (Voraussetzung I) ist oder anders.

Bildet man Polynome mit den Koeffizienten $l^{(i)}(r,p)$, $p = 0, 1, \ldots n$ (26)

$$s_{r,p}^{(i)}(x) = x^p + l_1^{(i)}(r,p)\ x^{p-1} + l_2^{(i)}(r,p)\ x^{p-2} + \cdots + l_p^{(i)}(r,p)$$

die die Rekursionsformel erfüllen

$$x\, s_{r,p}^{(i)}(x) - q_{r-p}^{(i+p)}\, s_{r,p}^{(i+1)}(x) = s_{r,p+1}^{(i)}(x), \tag{27}$$

so erhält man den ganz selbstverständlichen

Satz 4: Falls die Folgen $u_r^{(i)}(x)$ und $u_{r-p}^{(i)}(x)$ konvergieren,

$$\left.\begin{aligned} u_r^{(i)}(x) &\to u_r(x) \\ u_{r-p}^{(i)}(x) &\to u_{r-p}(x) \end{aligned}\right\} \text{ für } i \to \infty,$$

so konvergieren auch die Polynome $s_{r,p}^{(i)}(x)$,

$$s_{r,p}^{(i)}(x) \to s_{r,p}(x) \quad \text{für } i \to \infty;$$

es gilt $$u_{r-p}(x) = s_{r,p}(x)\, u_r(x).$$

Auch Satz 4 wird später in größerer Allgemeinheit benützt werden.

Zusatz: Falls Voraussetzung I erfüllt ist und falls $|\xi_{r-p}| > |\xi_{r-p+1}|$ *sowie* $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$ *gilt, sind nach Satz 1 die Voraussetzungen von Satz 4 erfüllt, es konvergiert* $s_{r,p}^{(i)}(x)$ *und strebt gegen*

$$s_{r,p}(x) = (x - \xi_{r-p+1})(x - \xi_{r-p+2}) \ldots (x - \xi_{r-1})(x - \xi_r).$$

Spezialfälle für $p = 1$ sind Satz 2 und Satz 2a. Für praktische Zwecke dürften sie in der Regel ausreichen.

Vermerkt werden soll noch, daß nicht die Polynome $s_{r,p}^{(i)}$ mit Rutishausers Polynomen $\hat{p}_r^{(i)}(x)$ übereinstimmen, sondern die Polynome

$$\hat{s}_{r,p}^{(i)} = x^p + l_1^{(i)}(r,p)\, x^{p-1} + l_2^{(i-1)}(r,p)\, x^{p-2} + \cdots + l_p^{(i-(p-1))}(r,p) \tag{28}$$

was jedoch für das Konvergenzverhalten belanglos ist.

Im übrigen werden im QD-Verfahren die $p_r(x)$ aus den q-, e-Werten berechnet, während bei uns die Iterationspolynome die numerische Rechnung tragen und die q-, e-Werte sich nebenher ergeben.

3.2. Rechenvorschrift und Konvergenzverhalten

Wenden wir uns der Faktorisierungsaufgabe zu, so liefert uns Satz 3 und Satz 4 für $p = r$ ein Mittel, neben dem einen Faktorisierungsbestandteil $u_r(x) = (x - \xi_{r+1})(x - \xi_{r+2}) \ldots (x - \xi_n)$ auch den anderen,

$$s_{r,r}(x) = s_r(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \;\ldots\; (x - \xi_r) = \frac{(Px)}{u_r(x)}$$

direkt mittels der Polynome $s_{r,r}^{(i)}(x)$ zu approximieren.

Daneben besteht die altbekannte Möglichkeit, $s_r(x)$ nachträglich durch einen Divisionsalgorithmus zu gewinnen.

Beim nachfolgend mitgeteilten Algorithmus wird nun $s_r(x)$ zwar auch direkt approximiert, der Divisionsalgorithmus kommt jedoch als Stationaritätsbedingung der Iteration ebenfalls vor; das heißt, die Iterationsvorschrift führt im Konvergenzfall unmittelbar zum Divisionsalgorithmus. Gegenüber der Treppeniteration ist der Faktorisierungsalgorithmus dadurch ausgezeichnet, daß nur noch die $u_r(x)$ unmittelbar approximierenden Polynome $u_r^{(i)}(x)$ vorkommen. Er beruht auf Satz 3, für $p = r$. (23) lautet dann ($l_\mu^{(i)}$ für $l_\mu^{(i)}(r, r)$ geschrieben)

$$\begin{aligned} P(x) = x^r u_r^{(i)}(x) + l_1^{(i)} x^{r-1} u_r^{(i+1)}(x) + l_2^{(i)} x^{r-2} u_r^{(i+2)}(x) + \cdots \\ + l_{r-1}^{(i)} x u_r^{(i+r-1)} + l_r^{(i)} u_r^{(i+r)} \end{aligned} \tag{29}$$

womit $u_r^{(i+r)}(x)$ aus den r vorhergehenden Polynomen $u_r^{(i)}(x) \ldots u_r^{(i+r-1)}(x)$ zu berechnen ist, falls $l_r^{(i)}$ nicht verschwindet. Wegen

$$l_r^{(i)}(r, r) = q_r^{(i+r-1)} q_{r-1}^{(i+r-1)} \ldots q_2^{(i+r-1)} q_1^{(i+r-1)} \cdot (-1)^r \tag{30}$$

nach (25) kann das nur eintreten, wenn irgendeines der $q_\mu^{(i+r-1)}$, $\mu = 1 \ldots r$ verschwindet, wenn also auch die Treppeniteration versagt. Es ergibt sich also die

Rechenvorschrift B (Faktorisierungsalgorithmus):
Gegeben $P(x)$ und r Polynome $u_r^{(0)}, u_r^{(1)}, \ldots u_r^{(r-1)}$,
Für $i = 0, 1, 2, \ldots$

$$\begin{aligned} P(x) - x^r u_r^{(i)}(x) - l_1^{(i)} x^{r-1} u_r^{(i+1)} - l_2^{(i)} x^{r-2} u_r^{(i+2)} - \ldots \\ - l_{r-1}^{(i)} x u_r^{(i+r-1)} \Rightarrow l_r^{(i)} u_r^{(i+r)} \quad (u_r^{(i)} = x^r + \cdots). \end{aligned} \tag{31}$$

Für $r = 1$ fällt die Vorschrift B mit der Vorschrift A zusammen. $r = n$ ist ein Trivialfall. Über das Konvergenzverhalten ist vorbereitend schon alles gesagt, wir können zusammenfassen

Satz 5: Unter der Voraussetzung wie bei I, daß eine volle Horizontalreihe $u_\varrho^0(x)$, $\varrho = 0 \ldots n$ existiert, existiert auch die Start-Vertikalreihe des Faktorisierungsalgorithmus, $u_r^{(\sigma)}$, $\sigma = 0 \ldots r - 1$ nach (5). Dieser konvergiert, falls $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$. Es strebt

$$u_r^{(i)}(x) \rightarrow u_r(x) = (x - \xi_{r+1})(x - \xi_{r+2}) \ldots (x - \xi_n)$$

und $$s_r^{(i)}(x) = x^r + l_1^{(i)} x^{r-1} + \cdots + l_r^{(i)}$$

$$\rightarrow s_r(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \ldots (x - \xi_r),$$

so daß $$s_r(x)\, u_r(x) = P(x)$$
die gewünschte Faktorisierung ist. Die Konvergenz ist linear, als Konvergenzfaktor tritt $\left|\frac{\xi_{r+1}}{\xi_r}\right|$ auf.

§ 4. Ein wichtiger Spezialfall

4.1. Der Fürstenausche Spezialfall der Bernoulli-Koeffizienten a_i

Nach dem Vorangegangenen könnte es den Anschein haben, daß der Algorithmus der Treppeniteration oder der Faktorisierungsalgorithmus, um starten zu können, umständlicher Vorarbeiten zur Aufstellung einer horizontalen oder einer vertikalen Startreihe bedarf. Dem ist nicht so. In § 4 werden wir eine Verallgemeinerung besprechen, bei der die bisherigen Voraussetzungen über die Startreihen größtenteils wegfallen. Zunächst jedoch wollen wir im Rahmen der Definition (1a) bleiben und eine spezielle Wahl von $Q^{(0)}(x)$ betrachten, bei der die Startreihen ziemlich unmittelbar angegeben werden können. Es handelt sich um die Wahl $Q^{(0)}(x) = 1$, die schon in I zur Abkürzung der Bernoullischen Methode eine Rolle spielte. In diesem Fall werden, vgl. I, die Bernoulli-Koeffizienten a_i zu totalsymmetrischen (Aleph-) Funktionen der Nullstellen. Für die Bernoullische Methode hat schon Fürstenau[1] diese Besonderheit bemerkt und benützt. Soweit wir im folgenden die Wahl $Q^{(0)}(x) = 1$ zugrunde legen, wollen wir vom Fürstenauschen Spezialfall sprechen.

Für den QD-Algorithmus hat Rutishauser einen dem Fürstenauschen Spezialfall äquivalenten Sonderfall unabhängig gefunden und in seiner praktischen Bedeutung erkannt[2], vgl. 4.3.

4.2. Ein Gegenstück zur Transformation der Frobeniusmatrix auf Jacobi-Gestalt

Zur Vorbereitung wollen wir in diesem Abschnitt die Transformation der Frobeniusmatrix auf Jacobi-Gestalt näher untersuchen und dabei auch ein Gegenstück dieser Transformation aufzeigen. Die Transformation auf Jacobi-Gestalt ist durch Gl. (11) bereits im wesentlichen gegeben. Gl. (11) lautet in Matrixschreibweise

---

[1] I p. 282 a. a. O.

[2] H. Rutishauser, Eine Formel von Wronski und ihre Bedeutung für den Quotienten-Differenzen-Algorithmus, ZAMP 7, 164 (1956). Ein Ansatz findet sich schon bei A. C. Aitken, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 51, 80 (1931) für den Start der Berechnung des Schemas der Hankeldeterminanten $H_r^{(i)}$, Gl. (2).

$$\begin{aligned} &x\left(u_1^{(i)}(x), u_2^{(i)}(x), \ldots u_n^{(i)}(x)\right) \equiv \\ &\left(\left(u_1^{(i)}(x), u_2^{(i)}(x), \ldots u_n^{(i)}(x)\right) J_i \bmod P(x),\right. \end{aligned} \tag{32}$$

wo J_i die Jacobi-Matrix

$$J_i = \begin{bmatrix} q_1^{(i)} & 1 & & & \\ e_1^{(i)} q_1^{(i)} & q_2^{(i)} + e_1^{(i)} & 1 & & \\ & e_2^{(i)} q_2^{(i)} & q_3^{(i)} + e_2^{(i)} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ & & & e_{n-1}^{(i)} q_{n-1}^{(i)} & q_n^{(i)} + e_{n-1}^{(i)} \end{bmatrix} \tag{33}$$

ist. Wird $u_\mu^{(i)}(x)$ wie in I.1.3 ein n-dimensionaler Spaltenvektor $\mathfrak{u}_\mu^{(i)}$ zugeordnet derart, daß das τ-te Vektorelement gleich dem Koeffizienten von $x^{n-\tau}$ in $u_\mu^{(i)}(x)$ ist, so bildet die aus den Vektoren $\mathfrak{u}_\mu^{(i)}$ gebildete Dreiecksmatrix $\mathfrak{U}_i = (\mathfrak{u}_1^{(i)}\ \mathfrak{u}_2^{(i)}\ \ldots\ \mathfrak{u}_n^{(i)})$ offensichtlich die Modalmatrix der Transformation der Frobeniusmatrix $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}\,[P(x)]$ (in der Gestalt von § 1) auf J_i, Gleichung (32) übersetzt sich in

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}_i J_i \tag{32a}$$

Gl. (6) und Gl. (8) führen in gleicher Weise auf die Formulierungen

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}_{i+1} R_i \tag{34a}$$

und

$$\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{U}_i L_i \tag{34b}$$

mit den Stieltjesmatrizen

$$R_i = \begin{pmatrix} q_1^{(i)} & 1 & & & \\ & q_2^{(i)} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ & & & & q_n^{(i)} \end{pmatrix}, \quad L^i = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ e_1^{(i)} & 1 & & & \\ & e_2^{(i)} & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & e_{n-1}^{(i)} & 1 \end{pmatrix}. \tag{35a, b}$$

Durch Elimination erhält man aus (33), (34)

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{U}_i = \mathfrak{U}_i\, L_i\, R_i$$

$$\mathfrak{F}\,\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{U}_{i+1}\, R_i\, L_i$$

also

$$J_i = L_i\, R_i = R_{i-1}\, L_{i-1}; \tag{36}$$

die zweite Gleichheit in (36) drückt den Inhalt der Rhombenregeln des QD aus, sie zeigt die Einordnung des QD-Algorithmus in die LR-Transformation[1] von Rutishauser.

Wir wollen indes als Gegenstück eine andere Transformation aufweisen, die mit den Polynomen $u_\mu^{(i)}(x)$ verbunden ist. Wird in (6) $u_{r-1}^{(i+1)}(x)$ durch $u_{r-1}^{(i+2)} - e_{r-1}^{(i+1)}\, u_r^{(i+1)}(x)$, gemäß (8), ersetzt, entsteht

$$x\, u_r^{(i)}(x) = [q_r^{(i)} - e_{r-1}^{(i+1)}]\, u_r^{(i+1)}(x) + u_{r-1}^{(i+2)}(x),\quad r = 1\, \ldots\, n. \tag{37}$$

Mit der aus einer Schrägreihe gebildeten Matrix $\hat{\mathfrak{U}}_i = (\mathfrak{u}_1^{(i)}\, \mathfrak{u}_2^{(i-1)}\, \ldots\, \mathfrak{u}_n^{(i-n+1)})$ formuliert sich (37) als

$$\mathfrak{F}\hat{\mathfrak{U}}_i = \hat{\mathfrak{U}}_{i+1}\hat{R}_i \tag{37a}$$

mit

$$\hat{R}_i = \begin{bmatrix} q_1^{(i)} & 1 & & & & \\ & q_2^{(i-1)} - e_1^{(i)} & 1 & & & \\ & & q_3^{(i-2)} - e_2^{(i-1)} & 1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & & & & \ddots & 1 \\ & & & & & q_n^{(i-n+1)} - e_{n-1}^{(i-n+2)} \end{bmatrix} \tag{38}$$

---

[1] H. Rutishauser, Une méthode pour la détermination des valeurs propres d'une matrice, C. r. Acad. Sc. 240, 34 (1955);

H. Rutishauser, Report on the solution of eigenvalue problems with the LR-Transformation, im Manuskript.

Gl. (8) in der Gestalt

$$u_r^{(i)}(x) = u_r^{(i+1)}(x) - e_r^{(i)} u_{r+1}^{(i)}(x) \tag{39}$$

liefert außerdem die Beziehung

$$\hat{\mathfrak{U}}_i = \hat{\mathfrak{U}}_{i+1} \hat{L}_i \tag{39a}$$

$$\text{mit } \hat{L}_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -e_1^{(i)} & 1 & & & \\ & -e_2^{(i-1)} & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -e_{n-1}^{(i-n+2)} & 1 \end{bmatrix} \tag{40}$$

woraus nun entsteht

$$\mathfrak{F}\hat{\mathfrak{U}}_i = \hat{\mathfrak{U}}_i \hat{L}_i^{-1} \hat{R}_i$$

$$\mathfrak{F}\hat{\mathfrak{U}}_{i+1} = \hat{\mathfrak{U}}_{i+1} \hat{R}_i \hat{L}_i^{-1}.$$

Damit erhält man das Gegenstück zum QD-Algorithmus

$$\hat{L}_i \hat{R}_{i-1} = \hat{R}_i \hat{L}_{i-1}. \tag{41a}$$

Die Transformierte $\hat{L}_i^{-1} \hat{R}_i$ von $\mathfrak{F}$ lautet ausgeschrieben

$$\hat{J}_i = \hat{L}_i^{-1} \hat{R}_i = \hat{R}_{i-1} \hat{L}_{i-1}^{-1} = \tag{41b}$$

$$\begin{bmatrix} q_1^{(i)} & 1 & & & \\ e_1^{(i)} q_1^{(i)} & q_2^{(i-1)} & 1 & & \\ e_2^{(i-1)} e_1^{(i)} q_1^{(i)} & e_2^{(i-1)} q_2^{(i-1)} & q_3^{(i-2)} & 1 & \\ e_3^{(i-2)} e_2^{(i-1)} e_1^{(i)} q_1^{(i)} & e_3^{(i-2)} e_2^{(i-1)} q_2^{(i-1)} & e_3^{(i-2)} q_3^{(i-2)} & q_4^{(i-3)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Matrizen dieser speziellen Hessenberg-Gestalt scheinen bisher wenig Beachtung gefunden zu haben. Wir wollen uns hier nur eine im augenblicklichen Zusammenhang gegebene Bemerkung gestatten: Aus der Invarianz der Spur gewinnt man die für den QD-Algorithmus bemerkenswerte Beziehung

$$\sum_{\mu=1}^{n} q_\mu^{(i-\mu+1)} = -a_1 \quad \text{(unabhängig von } i\text{)}, \tag{42}$$

die zur Verprobung dienen kann.

Ferner ergibt sich aus (38) und (40) als Gegenstück zum J-Kettenbruch die Kettenbruchdarstellung $(Q^{(i+1)}(x) = a_{i+1}\, u_1^{(i)}(x))$

$$\frac{Q^{(i+1)}(x)}{P(x)} = \frac{a_{i+1}\,|}{|\,x - q_1^{(i)}} - \frac{e_1^{(i)}x\,|}{|\,x - q_2^{(i-1)} + e_1^{(i)}} - \frac{e_2^{(i-1)}x\,|}{|\,x - q_3^{(i-2)} + e_2^{(i-1)}} - \cdots$$

$$- \frac{e_{n-1}^{(i-n+2)}x\,|}{|\,x - q_n^{(i-n+1)} + e_{n-1}^{(i-n+2)}}. \tag{43}$$

4.3. Startreihen im Fürstenauschen Spezialfall

Am bemerkenswertesten ist wohl, daß die Frobeniusmatrix $\mathfrak{F}\,[P(x)]$ im allgemeinen selbst von der Gestalt (41 b) ist mit (die Wahl $i = n - 1$ wird unten verständlich werden)

$$q_1^{(n-1)} = -a_1; \quad q_\nu^{(n-\nu)} \equiv 0 \quad \text{für} \quad \nu = 2 \ldots n \tag{44}$$

$$e_\mu^{(n-\mu)} = \frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \quad \text{für} \quad \mu = 1 \ldots n-1. \tag{45}$$

In der Tat besteht, wenn die Koeffizienten a_μ Unbestimmte sind, die Dreieckszerlegung

$$\mathfrak{F} = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & & & \\ -a_2 & & 1 & & & \\ -a_3 & & & \cdot & & \\ \cdot & & & & \cdot & \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & & \cdot \\ -a_{n-1} & & & & & & 1 \\ -a_n & & & & & & \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_2}{a_1} & 1 & & & \\ & -\frac{a_3}{a_2} & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & -\frac{a_n}{a_{n-1}} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & & & \\ & -\frac{a_2}{a_1} & 1 & & \\ & & -\frac{a_3}{a_2} & & \\ & & & & 1 \\ & & & & -\frac{a_n}{a_{n-1}} \end{bmatrix}$$

$$= \hat{L}^{-1}\hat{R}. \tag{46}$$

Gl. (44), (45) hat Rutishauser, anders hergeleitet, zum Start des QD benützt.[1] Für uns bietet sich folgender Sachverhalt:

$\hat{\mathfrak{U}}_{n-1}=E$ ergibt in (37a) wegen der Eindeutigkeit der Dreieckszerlegung

$$\hat{\mathfrak{U}}_n = \hat{L}^{-1}, \quad \hat{R}_{n-1} = \hat{R}$$

und aus (39a)
$$\hat{L}_{n-1} = \hat{L}$$

$\hat{\mathfrak{U}}_{n-1} = E$ bedeutet jedoch $u_\mu^{(n-\mu)}(x) = x^{n-\mu}$. Das führt uns auf den

Satz 6: $$u_\mu^{(n-\mu)}(x) = x^{n-\mu} \quad (\mu = 1 \ldots n) \tag{47}$$

stellt eine Schrägreihe aus einem Schema von nach (1a) definierten $u_r^{(i)}(x)$ dar; sie genügt den Bedingungen (14) und kann technisch als Startreihe für den Algorithmus der Treppeniteration dienen bzw. bis zu einer Horizontalreihe fortgesetzt werden. Das resultierende Schema der $u_r^{(i)}(x)$ gehört zum Fürstenauschen Spezialfall; falls keiner der Koeffizienten $a_1 \ldots a_m$ verschwindet, existieren die ersten m Vertikalreihen ab $u_r^{(n-r)}(x)$.

Voraussetzung I ist sinngemäß erfüllt.

Die letztere Aussage folgt sofort daraus, daß $u_1^{(n-1)}(x) = x^{n-1}$, also $Q^{(n-1)}(x)$ bis auf einen Faktor gleich x^{n-1} oder $Q^{(0)}(x)$ im wesentlichen $= 1$ ist, wie im Fürstenauschen Spezialfall. Falls $a_n \neq 0$, ist x^i für $i \geqq n-1$ zu $P(x)$ teilerfremd, der Euklidsche Algorithmus (10) für $\frac{x^i}{P(x)}$ bricht also nicht vorzeitig ab, wodurch die Existenz aller n Vertikalreihen ab $i = n-1$ gesichert

[1] p. 184 a.a.O.

ist. Damit ist Voraussetzung I für die Konvergenzaussage von Satz 1 und 2 sinngemäß erfüllt. Unsere weitergehende Aussage folgt aus der Kettenbruchentwicklung (43) für $Q^{(n)}(x) = x^n - P(x)$ (mit $a_n = -a_1$):

$$\frac{x^n - P(x)}{P(x)} = \frac{-a_1 \mid}{\mid x + a_1} - \frac{\frac{a_2}{a_1} x \mid}{\mid x + \frac{a_2}{a_1}} - \frac{\frac{a_3}{a_2} x \mid}{\mid x + \frac{a_3}{a_2}} - \cdots - \frac{\frac{a_n}{a_{n-1}} x \mid}{\mid x + \frac{a_n}{a_{n-1}}}. \tag{48}$$

Sie existiert bis zum m-ten Glied, falls $a_1 \ldots a_m$ sämtlich nicht verschwinden. Da x^i für $i > n$ mit $P(x)$ keinen anderen Teiler gemeinsam hat, als x^n mit $P(x)$ besitzt, existiert die Entwicklung (43) sodann für alle $i \geqq n$ ebenfalls bis zum m-ten Glied. Damit existieren auch alle $u_r^{(i)}(x)$, $r = 1 \ldots m$, $i \geqq n - r$.

Nach Satz 6 steht also für die Rechenvorschrift A fast immer die dem Fürstenau'schen Spezialfall entsprechende Schrägreihe (47) als Startreihe von vornherein zur Verfügung, bzw. die nächstfolgende, zu $\mathfrak{U}_n$ gehörige Schrägreihe:

$$u_\mu^{(n-\mu+1)}(x) = \frac{1}{a_\mu} \sum_{\varkappa=\mu}^{n} a_\varkappa x^{n-\varkappa}, \quad \mu = 1 \ldots m \leqq n. \tag{47a}$$

Gl. (47) könnte selbstverständlich auch aus der Determinantendarstellung (1a) für $Q^{(i)}(x) \equiv x^i \bmod P(x)$ sofort gewonnen werden. Wir haben den in diesem Abschnitt eingeschlagenen Weg gewählt, um der Einsicht in die Zusammenhänge zu dienen.

Gl. (37) benötigen wir außerdem, um eine ebenso einfach aufgebaute, ebenfalls von vornherein angebbare Startreihe für die Rechenvorschrift B bereitzustellen. Dazu setzen wir, wieder für den Fürstenauschen Spezialfall, das Schema der $u_r^{(i)}(x)$ „nach oben" fort, indem wir – (47) eingeschlossen – a n s e t z e n

$$u_r^{(n-2r+\lambda)}(x) = x^{n-r}, \quad \lambda = 1 \ldots r \leqq n.$$

Die neuhinzugefügten unter diesen Polynomen entstehen nicht mehr aus der Determinantendarstellung (1a), erfüllen jedoch wenigstens Gl. (37) (mit verschwindender eckiger Klammer). Gl. (37), die unter den obigen Voraussetzungen über das Nichtverschwinden der a_μ nunmehr für die Gesamtheit der $u_r^{(i)}(x)$,

$i \geqq n - 2r + 1$ gilt, hat aber nach passender Umnumerierung die Gestalt der Gl. (20).[1] Damit sind die Voraussetzungen von Satz 3 erfüllt, so daß entsprechend umnumeriert (23) gilt. Wir haben damit

Satz 7: Die r Polynome

$$u_r^{(n-2r+\lambda)}(x) \equiv x^{n-r}, \quad \lambda = 1 \ldots r \tag{50}$$

stellen eine Startvertikalreihe für den Faktorisierungsalgorithmus dar. Das resultierende Schema der $u_r^{(i)}(x)$, $i \geqq n - r$ gehört zum Fürstenauschen Spezialfall und existiert damit falls keiner der Koeffizienten $a_1 \ldots a_r$ verschwindet. Voraussetzung I ist sinngemäß erfüllt.

4.4. Matrixformulierung des Faktorisierungsalgorithmus: Faktorisierung durch Dreieckszerlegung der zugeordneten Rekurrenten

Die Besonderheit der Startreihe (50) des Fürstenauschen Spezialfalles bringt mit sich, daß die als Koeffizienten der Startpolynome (50) auftretenden $l_\mu^{(i)}$ unmittelbar Koeffizienten des Polynoms $P(x)$ sind, es gilt für $\mu = 1 \ldots r-1$

$$l_\mu^{(n-2r+\lambda)} = a_\mu, \quad \lambda = 1, 2, \ldots r - \mu. \tag{51}$$

Das wirkt sich dahingehend aus, daß man in der Rechenvorschrift B, Gl. (31) die Startpolynome $u_r^{(n-2r+\lambda)}$, $\lambda = 1 \ldots r$ weglassen kann, wenn man gleichzeitig auf der linken Seite $P(x)$ während der ersten r Schritte abändert, nämlich für den Index $n - 2r + \lambda$, $\lambda = 1, 2, \ldots r$ ersetzt durch

$$a_{r-\lambda+1} x^{n-r+\lambda-1} + a_{r-\lambda+2} x^{n-r+\lambda-2} + \cdots + a_n. \tag{52}$$

---

[1] Das bedeutet, daß die Rechenvorschriften A und B hinsichtlich der Iterationspolynome nichts Neues liefern, wenn man Horizontalreihen, die nach (1a) definiert sind, durch Schrägreihen ersetzt – nur die Koeffizienten $q_\mu^{(i)}$ ändern sich. Wir werden diesen Umstand in § 5.2 in einem allgemeineren Zusammenhang verstehen lernen.

Nunmehr liegt es jedoch geradezu nahe, den Faktorisierungs-algorithmus in Matrixgestalt zu formulieren. Sei (vorläufig $a_0 = 1$ entsprechend dem Bisherigen gesetzt)

$$A = A[r, P(x)] = \begin{pmatrix} a_r & a_{r-1} & a_{r-2} & \cdots & a_1 & a_0 & & & \\ a_{r+1} & a_r & a_{r-1} & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 & & \\ a_{r+2} & a_{r+1} & a_r & \cdots & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ddots & & & & & \\ & a_n & a_{n-1} & \ddots & & & & & \\ & & a_n & \ddots & & & & & \\ & & & \ddots & & & & & \end{pmatrix} \tag{53}$$

die dem Polynom $P(x)$ zugeordnete rekurrente unendliche Band-matrix mit den Diagonalelementen a_r, so stellt die Rechenvorschrift B für den Fürstenauschen Spezialfall gerade die eindeutige Zerlegung von A in die (unendliche) obere Dreiecks-Band-matrix L der $l^{(i)}$ und in die (unendliche) untere Dreiecks-Band-matrix K mit Diagonaleinsen, deren Spalten die Koeffizienten der Polynome $u_r^{(i)}(x)$ enthalten,

$$A = KL \tag{54}$$

wobei explizit

$$L = \begin{pmatrix} l_r^{(\iota+1)} & l_{r-1}^{(\iota+2)} & l_{r-2}^{(\iota+3)} & \cdots & 1 & & & \\ & l_r^{(\iota+2)} & l_{r-1}^{(\iota+3)} & \cdots & l_1^{(\iota+r)} & 1 & & \\ & & l_r^{(\iota+3)} & \cdots & l_2^{(\iota+r)} & l_1^{(\iota+r+1)} & 1 & \\ & & \ddots & & \ddots & \ddots & & \ddots \end{pmatrix} \tag{55}$$

mit $\iota = n - 2r$ und

$$K = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ k_1^{(1)} & 1 & & \\ k_2^{(1)} & k_1^{(2)} & 1 & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ k_{n-r}^{(1)} & k_{n-r-1}^{(2)} & k_{n-r-2}^{(3)} & \ddots \\ & k_{n-r}^{(2)} & k_{n-r-1}^{(3)} & \ddots \\ & & k_{n-r}^{(3)} & \ddots \\ & & & \ddots \end{bmatrix} \tag{56}$$

mit

$$u_r^{(i)}(x) = x^{n-r} + \sum_{\nu=1}^{n-r} k_\nu^{(i-(n-r))}\, x^{n-r-\nu}. \tag{57}$$

Nach Satz 5 und Satz 7 konvergieren die Diagonalen von K und L linear gegen die Koeffizienten von $u_r(x)$ und $s_r(x)$, falls $s_r(x) \cdot u_r(x)$ eine Betragszerlegung von $P(x)$ ist.

Matrizen, die aus der Differenzennäherung von Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten entspringen, sind von der Gestalt (53), $P(x)$ ist die zugehörige charakteristische Gleichung des Differenzenoperators. Die vorangegangenen Untersuchungen können also auch benützt werden, um das Grenzverhalten der Dreieckszerlegung solcher Matrizen, wie sie etwa bei der Lösung von Randwertaufgaben durch Gaußsche Elimination auftritt, zu studieren.[1]

Unsre Rechenvorschrift B stellt eine spalten-spaltenweise Durchführung der Dreieckszerlegung dar. Daneben bestehen noch die Möglichkeiten der zeilen-zeilenweisen, der zeilen-spaltenweisen (Banachiewicz) und der spalten-zeilenweisen (Turing) Durchführung, die rechentechnisch die einen oder anderen Vorteile

[1] Ein Hinweis bezüglich des Grenzverhaltens der Differenzenmatrix harmonischer und biharmonischer Operatoren, den mir Herr Dr. L. Fox, Teddington, anläßlich eines Besuchs im Herbst 1954 in Teddington freundlicherweise gab, war der Anstoß zur Matrixformulierung in diesem Abschnitt. Ich möchte Herrn Dr. Fox an dieser Stelle für seine Mitteilungen herzlich danken.

bieten. Schließlich ist im Falle symmetrischer (oder hermitescher) Matrizen $A[P(x)]$, das heißt für ein Polynom $P(x)$, das der Bedingung $P(x)=x^n \bar{P}\left(\frac{1}{x}\right)$ und dessen Nullstellen damit symmetrisch zum Einheitskreis liegen, noch eine andere Zerlegung sinnvoll: die Zerlegung nach Cholesky, wobei $K^+ = L$ gesetzt wird. Die Aufgabe der Hurwitzfaktorisierung eines Polynoms führt gerade auf diesen Fall.[1] Die dort weggelassene Untersuchung, wann A abschnittsweise positiv-definit ist, findet sich in Anhang I.

§ 5. Treppeniteration für Polynome und Faktorisierungsalgorithmus in voller Allgemeinheit

5.1. Art und Bedeutung der Verallgemeinerung

Bei den Sätzen über die Konvergenz der Treppeniteration (insbes. Satz 1) und des Faktorisierungsalgorithmus (insbes. Satz 4) war die Frage des Einflusses der Rundungsfehler nur angeschnitten worden. Die Sätze gelten streng genommen nur für eine theoretische Berechnung mit unbeschränkter Stellenzahl. Tatsächlich werden unter dem Einfluß von Rundungsfehlern anstatt der Polynome $u_r^{(i)}(x)$ geringfügig abgeänderte Polynome $\tilde{u}_r^{(i)}(x)$ entstehen. Die erste Fundamentalbeziehung (6), beziehungsweise die mit ihr gleichwertige Beziehung (23) wird – da sie ja die Rechenvorschrift bildet – wenigstens bis auf Rundungsfehler erfüllt sein; wieweit dagegen die zweite Fundamentalbeziehung (8) – die in der Iterationsformel nicht vorkommt – erfüllt bleibt, ist nicht ohne weiteres zu sehen. Werden Zwischenergebnisse als erneute Startreihen angesehen, so bestehen diese Startreihen jedenfalls nicht aus Polynomen, die nach (5) definiert sind. Der Wesensunterschied besteht darin, daß die Horizontalreihen im allgemeinen nicht mehr einer dreigliedrigen Rekursionsformel genügen. Die Konvergenzfrage muß also für solche allgemeinste Startreihen neu geprüft werden.

Nun sind solche Startreihen ohnehin praktisch von Bedeutung. Daß die Gewinnung von nach (5) definierten Startreihen einen lästigen zusätzlichen Teileralgorithmus erfordert, könnte man ab-

[1] Über Einzelheiten siehe p. 168 Anm. 1 a. a. O.

tun mit dem Hinweis auf den Fürstenauschen Spezialfall von § 4. Falls man jedoch über die Lösung bereits etwas weiß und bessere Ausgangsnäherungen für die resultierenden Polynome $u_r(x)$ (vgl. 17) zur Verfügung hat als die Polynome x^r des Fürstenauschen Spezialfalls, wäre die Herstellung einer nach (5) definierten Startreihe nicht nur arbeitsmäßig, sondern wegen des Kleinwerdens der Größen $e_r^{(i)}$ im Teileralgorithmus (10) auch numerisch unbefriedigend.

5.2. Zusammenhang mit der Konvergenz der LR-Transformation von Rutishauser

Für eine beliebige Startreihe $u_r^{(i)}(x)$, $r = 1 \ldots n$ und entsprechend gebildete $\mathfrak{U}_i$ (für den Fall $m < n$ sei die tatsächliche Startreihe in beliebiger Weise ergänzt) führt die unveränderte Rechenvorschrift A auf die Beziehung (34a) mit R_i von der Gestalt (35a). Nunmehr wird jedoch ein $u_r^{(i+1)}$ nicht mehr linear aus $u_r^{(i)}(x)$ und $u_{r+1}^{(i)}(x)$ zu kombinieren sein, das heißt, die Beziehung (34b) gilt nur noch mit einem L_i von voller Dreiecksgestalt

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ * & 1 & & & & \\ * & * & 1 & & & \\ * & * & * & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \\ * & * & * & * & \ldots & 1 \end{bmatrix}. \tag{58}$$

So verstanden, bleiben die zu (36) führenden Beziehungen erhalten, J_i wird anstatt von Jacobigestalt nunmehr von Hessenberggestalt und die Treppeniteration fällt theoretisch mit der LR-Transformation der Matrizen $J_i = \mathfrak{U}_i^{-1} \mathfrak{F} \mathfrak{U}_i$ zusammen. Einen Konvergenzbeweis für die allgemeine LR-Transformation hat Rutishauser schon gegeben.[1] Er benutzt die von ihm und dem Verf.[2] eingeführten Produkte $\Lambda_i = L_0 L_1 L_2 \ldots L_i$. Nun ist aber vermöge (34b) $\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{U}_0 L_0 L_1 \ldots L_i$. Wenn wir uns nachfolgend beim Beweis auf die Matrizen $\mathfrak{U}_i$ stützen, so wird die Durch-

[1] p. 186, zweite Arbeit a. a. O.

[2] p. 167 a. a. O.

führung nur unwesentlich gegenüber Rutishausers Beweis verändert und wir können uns auf eine Skizze beschränken. Angemerkt soll jedoch noch werden, daß dieser elementare Beweis den früheren Spezialfall für die nach (5) definierten Polynome mit einschließt; er erfaßt andererseits gewisse Einzelheiten der bisherigen Untersuchungen nicht, so daß diese nicht entbehrlich werden.

Aus (34a) folgt

$$\mathfrak{F}^i \mathfrak{U}_0 = \mathfrak{U}_{i+1} R_i R_{i-1} \dots R_0$$

so daß $\mathfrak{U}_{i+1}$ definiert werden kann als

$$\mathfrak{U}_{i+1} = [\mathfrak{F}^i \mathfrak{U}_0]_{\triangleright} \tag{59a}$$

oder

$$\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{U}_0 \cdot [(\mathfrak{U}_0^{-1} \mathfrak{F} \mathfrak{U}_0)^i]_{\triangleright}$$

wo $[X^i]_{\triangleright}$ den linken (unteren) Dreiecksbestandteil (mit Diagonaleins) von X^i bedeutet.

Nun sind aber die Elemente der k-ten Spalte von $[X^i]_{\triangleright}$ durch Quotienten

$$\frac{\overset{(i)}{\gamma}\begin{bmatrix} 12 \,..\, k-1, j \\ 12 \,\dots\dots\, k \end{bmatrix}}{\overset{(i)}{\gamma}\begin{bmatrix} 12 \dots k \\ 12 \dots k \end{bmatrix}} \qquad (j = 1 \dots n)$$

darstellbar, wo

$$\overset{(i)}{\gamma}\begin{bmatrix} 12 \,..\, k-1, j \\ 12 \,..\, k \end{bmatrix}$$

der Minor aus den Zeilen $1, 2, \dots k-1, j$ und den Spalten $1, 2 \dots k-1, k$ von X^i ist.

Nach einem Satz von Rados¹ ist mit $A = BC$ auch

$$\overset{(k)}{A} = \overset{(k)}{B} \; \overset{(k)}{C}$$

wo $\overset{(k)}{X}$ die $\binom{n}{k}$-reihige Matrix der sämtlichen k-reihigen Minoren von X ist. Angewandt auf die kanonische Normalform UKU^{-1} von $\mathfrak{F}$ liefert das sofort die Aussage, daß

¹ G. Rados, Zur Theorie der adjungierten quadratischen Formen, Math. Naturw. Ber. Ungarn 14, 116 (1897).

$$\gamma^{(i)}_{\begin{bmatrix}12\,..\,k-1,j\\12\,..\,k\end{bmatrix}} = \sum_{\substack{\alpha_1\,..\,\alpha_k\\ \alpha'_1\,..\,\alpha'_k}}\sum U_{\begin{bmatrix}12\,..\,k-1,j\\ \alpha_1\alpha_2\,\cdots\,\alpha_k\end{bmatrix}} K^i_{\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\,..\,\alpha_k\\ \alpha'_1\alpha'_2\,..\,\alpha'_k\end{bmatrix}} (U^{-1}\mathfrak{U}_0)_{\begin{bmatrix}\alpha'_1\alpha'_2\,..\,\alpha'_k\\ 1\;\;2\;..\;k\end{bmatrix}} \tag{60}$$

ist und insbesondere im Fall linearer Elementarteiler eine gewichtete Potenzsumme aller k-fachen Produkte der Eigenwerte von $\mathfrak{F}$ – d. h. der Nullstellen ist.

Die k-te Spalte konvergiert, wenn für $j = k$ in der Summe unter den Termen nichtverschwindenden Gewichts ein Term mit

$$K^i_{\begin{bmatrix}\alpha_1\alpha_2\,..\,\alpha_k\\ \alpha'_1\alpha'_2\,..\,\alpha'_k\end{bmatrix}}$$

im Limes alle anderen Terme erdrückt. Es wird dann für $i \to \infty$

$$\frac{\gamma^{(i)}_{\begin{bmatrix}12\,..\,k-1,j\\12\,..\,k\end{bmatrix}}}{\gamma^{(i)}_{\begin{bmatrix}12\,..\,k\\12\,..\,k\end{bmatrix}}} \to \frac{U_{\begin{bmatrix}12\,..\,k-1,j\\ \alpha_1\alpha_2\,\cdots\,\alpha_k\end{bmatrix}}}{U_{\begin{bmatrix}12\,..\,k\\ \alpha_1\alpha_2\,\cdot\,\alpha_k\end{bmatrix}}} \tag{61}$$

streben und wir erhalten Konvergenz gegen die k-te Spalte von $[U]_{\triangle}$, wenn in U die Spaltenvektoren und in K die Elementarteiler so geordnet werden, daß $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 2$, $\ldots$ $\alpha_k = k$ wird.

Die Diagonalelemente von K (die Nullstellen von $P(x)$ seien bei dieser Ordnung im Augenblick mit $\xi_1 \ldots \xi_n$ bezeichnet.

Dann wird (auch im Fall höherer Elementarteiler, das heißt mehrfacher Nullstellen von $P(x)$) das j-te Element der k-ten Spalte von $[U]_{\triangle}$ durch den Koeffizienten von x^{n-j} im Polynom

$$u_k(x) = \frac{P(x)}{(x-\xi_1)\,(x-\xi_2)\,\ldots\,(x-\xi_k)}$$

gebildet. In der Tat ist ein derart definiertes $[U]_{\triangle}$ eine untere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinsen; wegen $x \cdot u_k(x) = \xi_k \cdot u_k(x) + u_{k-1}(x)$ gilt

$$\mathfrak{F}[U]_{\triangle} = [U]_{\triangle} \cdot R \tag{62}$$

mit

$$R = \begin{pmatrix} \xi_1 & 1 & & & & \\ & \xi_2 & 1 & & & \\ & & \xi_3 & 1 & & \\ & & & & \xi_{n-1} & 1 \\ & & & & & \xi_n \end{pmatrix} \tag{63}$$

und die Matrix V der Rechtseigen- (und Haupt-)vektoren von R ist eine obere Dreiecksmatrix.

Aus (62) folgt im übrigen sofort auch, daß für $i \to \infty$

$$R_i \to R \tag{64}$$

strebt, das heißt $q_\nu^{(i)} \to \xi_\nu$.

Die ξ_ν sind dabei nicht notwendig nach der Größe ihrer Beträge geordnet. Es bleibt zu untersuchen, wann normale Konvergenz (vgl. 2.2) herrscht oder wann die oben angegebene Ordnung $\alpha_\mu = \mu$ die betragsverschiedenen Nullstellen von ξ_1 bis ξ_r in der Reihenfolge der Größe ihrer Beträge ergibt.

Die Numerierung der Zeilen und Spalten von U, K^i und $U^{-1}\mathfrak{U}_0$ sei jetzt wieder so, daß die ξ_ν betragsgeordnet sind. Dann steht jedenfalls in der Zeile $K^i_{\begin{bmatrix}1 & 2 & .. & k\\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & .. & \alpha'_k\end{bmatrix}}$ der $\binom{n}{k}$-reihigen Minormatrix ein Element, das im Limes jedes andere Element übertrifft. Für dessen Spaltenindex $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots \alpha_k^*$ gilt:

> (i) *Der Spaltenindex* $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots \alpha_k^*$ *geht aus der Folge der natürlichen Zahlen dadurch hervor, daß diese innerhalb jeden Elementarteilers rückwärts gelesen wird.*

Insbesondere ist im Falle linearer Elementarteiler $\alpha_\mu^* = \mu$.

Nach dem Vorstehenden verschwindet $U_{\begin{bmatrix}12 & .. & k\\ 12 & .. & k\end{bmatrix}}$ niemals, da $[U]_\triangle$ stets existiert. Also muß nur $(U^{-1}\mathfrak{U}_0)_{\begin{bmatrix}\alpha_1^* & \alpha_2^* & .. & \alpha_k^*\\ 1 & 2 & .. & k\end{bmatrix}} \neq 0$ sein für $k = 1, 2, \ldots r \leqq n$.

Wir haben damit

Voraussetzung II: Es gilt für $k = 1 \ldots r$, daß die Minoren

$$(U^{-1}\mathfrak{U}_0)_{\begin{bmatrix}\alpha_1^* & \alpha_2^* & .. & \alpha_k^*\\ 1 & 2 & .. & k\end{bmatrix}} \neq 0 \tag{65}$$

sind, wobei $\alpha_1^* \ldots \alpha_k^*$ durch (i) definiert ist.

So kompliziert die Voraussetzung II auch formuliert werden muß, ihre praktische Bedeutung ist leicht zu überblicken.

Da als Zeilen von U^{-1} die Ausdrücke

$$\mathfrak{z}_i = (\xi_i^{n-1}\ \xi_i^{n-2}\ \ldots\ \xi_i\ 1)$$

(bzw. auch $\frac{\partial}{\partial \xi_i} \mathfrak{z}_i, \frac{\partial^2}{\partial \xi_i^2} \mathfrak{z}_i, \ldots$ im Falle höherer Elementarteiler) auftreten, ist $U^{-1}\mathfrak{U}_0$ aus den Werten von $u_\mu(x)$ (und eventuell Ableitungen hiervon) an den Nullstellen gebildet. Die obigen Minoren hieraus verschwinden jedenfalls nur für isolierte Fälle der Wahl von $\mathfrak{U}_0$. Damit ist ein Verletztsein der Bedingung II nur durch zufällig unglückliche Wahl von $\mathfrak{U}_0$ möglich und für numerisch gegebenes $\mathfrak{U}_0$ unwahrscheinlich.

Überdies ist nur die Lösung des normalen Konvergenzfalles stabil (vgl. § 6).

In § 3 haben wir darauf hingewiesen, daß Satz 3 und damit Satz 4 von der Voraussetzung I, also von der Stieltjesgestalt der L_i (35b) unabhängig sind. Damit genügt auch für den Faktorisierungsalgorithmus die schwächere Voraussetzung II.

Zusammenfassend haben wir:

Satz 8: Unter der Voraussetzung II und falls $|\xi_r| > |\xi_{r+1}|$, *d. h. falls eine Betragszerlegung von* $P(x)$ *nach Graden* r *und* $n-r$ *existiert, konvergieren die Treppeniteration und der Faktorisierungsalgorithmus linear und liefern* $u_r(x)$ *(sowie im zweiten Fall* $s_r(x)$*).*

Zusatz: Auch in Satz 4, Zusatz und speziell in Satz 2, Satz 2a kann die Voraussetzung I durch die schwächere Voraussetzung II ersetzt werden.

Die Startreihen dürfen also, verglichen mit Satz 1 und Satz 5, praktisch beliebig sein.

Hervorgehoben sei, daß die nach (5) definierten Polynome $u_r^{(i)}(x)$ beziehungsweise Matrizen $\mathfrak{U}_i$ und die gemäß § 4.2 durch Verschieben der Vertikalreihe gewonnenen $\hat{\mathfrak{U}}_i$[1] einen Sonderfall darstellen, wobei L_i beziehungsweise $\hat{L}_i$ Stieltjesgestalt annehmen. Für Treppeniteration und Faktorisierungsalgorithmus ist damit, abgesehen vom Fürstenauschen Spezialfall, kein Vorteil

[1] Obwohl es sich hier also um die LR-Transformation zweier ganz verschiedener Matrizen handelt, gehen doch die $\mathfrak{U}_i$ und $\hat{\mathfrak{U}}_i$ durch Umgruppieren der Spalten ineinander über.

verbunden – wohl aber für den QD-Algorithmus beziehungsweise für sein Gegenstück (41a).

5.3. Zusammenhang mit anderen Faktorisierungsverfahren

Wir können an dieser Stelle einen Seitenblick auf eine als „penultimate remaindering" bezeichnete Divisionsmethode, deren Theorie in eleganter Weise Aitken[1] erledigt hat, werfen. Es handelt sich um eine Verallgemeinerung der Methode von Lin[2] zur Abspaltung quadratischer Faktoren. Setzt man als Startreihe des Faktorisierungsalgorithmus $u_r^{(\nu)}(x) \equiv U(x)$, $\nu = 0 \ldots r-1$, so ist das nach der Iterationsvorschrift entstehende $u_r^{(r)}(x)$ gerade der „vorletzte Rest" der Division von $P(x)$ durch $U(x)$. Anstatt jedoch nun mit $u_r^{(1)}(x)$, $u_r^{(2)}(x)$, $\ldots$ $u_r^{(r)}(x)$ die Iteration fortzusetzen, wählt Aitken $u_r^{(r)}(x) = U^{(1)}(x)$ als neuen Divisor, was darauf hinauskommt, daß mit $u_r^{(\nu)}(x) = U^{(1)}(x)$, $\nu = 0 \ldots r-1$, unsere Iteration neu begonnen wird. Der Unterschied (für $r > 1$) äußert sich zu ungunsten der von Aitken behandelten Methode, insofern, als diese nicht immer konvergiert. Konvergiert sie, so geschieht die Trennung nicht nach dem Betrag der Nullstellen, sondern in einer a priori unbekannten Weise. Der Rechenaufwand pro Schritt ist gleich, die Konvergenz ist hier wie dort linear; die Konvergenzfaktoren sind jedoch schwierig in Allgemeinheit zu vergleichen.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, daß für $r = n-1$ die Methode des „penultimate remaindering" auf die Iterationsvorschrift

$$x_{i+1} = \frac{-a_n}{x_i^{n-1} + a_1 x_i^{n-2} + \cdots + a_{n-1}} = x_i - \frac{P(x_i)}{\dfrac{P(x_i) - P(0)}{x_i - 0}}$$

das heißt auf die regula falsi mit dem Nullpunkt als ständigen Bezugspunkt führt.

5.4. Mehrfach-Faktorisierung

Satz 3 liefert die Möglichkeit, ein Polynom $P(x)$ simultan in $p+1$ Faktoren von den vorgeschriebenen Graden r_1, $r_2 - r_1$, $\ldots$

[1] A. C. Aitken, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 63, 174 (1951).

[2] Shi Nge Lin, Thesis MIT 1939.

$\ldots r_p - r_{p-1}$, $n - r_p$ zu zerlegen – für $p = 1$ entsteht der Faktorisierungsalgorithmus, für $r_\mu = \mu$ die Treppeniteration. Zur Iteration dienen neben $P(x)$ nur die Vertikalreihen der $u_{r_1}^{(i)}(x)$, $u_{r_2}^{(i)}(x), \ldots, u_{r_p}^{(i)}(x)$; Gleichung (23) erlaubt treppenartig die Berechnung eines neuen $u_{r_\mu}^{(i)}(x)$ aus den $r_{\mu-1} - r_\mu$ vorangehenden Polynomen derselben Vertikalreihe und dem unmittelbar vorher berechneten $u_r^{(i)}(x)$ der vorangehenden Vertikalreihe. Die Polynome $s_{r_{\mu-1} r_\mu}(x)$ ergeben zusammen mit $u_r(x)$ die gewünschte Faktorisierung.

§ 6. Gesichtspunkte zur praktischen Durchführung

6.1. Stabilität und Selbstkorrektur

Wenn die Voraussetzung II erfüllt ist, herrscht auch unter dem Einfluß von Rundungsfehlern die normale Konvergenz nach der Ordnung der Beträge. Die Voraussetzung II ist nur in isolierten Fällen verletzt und selbst, wenn sie zu Beginn nicht erfüllt sein sollte, werden Rundungsfehler dafür sorgen, daß die normale Konvergenz als stabile Lösung sich schließlich durchsetzt (§ 2). Da ferner jede Zwischennäherung, als Ausgangsnäherung aufgefaßt, zur theoretischen Konvergenz führt, und insbesondere die Iterationsvorschrift eine Stationaritätsbedingung darstellt, besteht also absolute Selbstkorrektur zur normalen Konvergenz in gleicher Weise wie sie in Ia, p. 29 für die abgekürzte Bernoulli-Iteration definiert wurde.

6.2. Stellenverlust durch Auslöschung

Während die auf der expliziten Bildung von Minoren beruhenden Verfahren, die auf Perron[1] zurückgehen, mit dem Fortschreiten der Iteration zunehmende Auslöschung zeigen und deshalb meist schon zur Bestimmung der dritten Nullstelle praktisch unbrauchbar sind, entsteht bei der Treppeniteration und dem

[1] O. Perron, Zur Theorie der Matrices. Math. Ann. 64, 248 (1907). Bei H. Müntz, Das Hauptachsenproblem der quadratischen Formen, Prace matematycznofizyczne Warschau 29, 109 (1918), dem von Bodewig die Minorenmethode zugeschrieben wird, findet sich nur eine ausführlichere Diskussion.

Faktorisierungsalgorithmus jedenfalls im Limes konstante Auslöschung. Praktisch ist sie nur bemerkbar bei der Behandlung nahe benachbarter Nullstellen, hier ist sie problembedingt und unvermeidlich. Wichtig ist jedoch, daß man durch Zusammenfassung von Nullstellennestern zu entsprechenden Faktoren die numerischen Schwierigkeiten umgehen kann.

6. 3. Rechenproben

Wie in I a, p. 30 entstehen bequeme Rechenproben, wenn man in den Rechenvorschriften $x = 1$ setzt.

Anhang I

$B(x) = \sum\limits_{0}^{2\nu} b_\mu x^\mu$ sei ein Polynom, dessen Nullstellenmenge durch Spiegelung am Einheitskreis in sich übergeht. Durch Multiplikation mit einem geeigneten Phasenfaktor kann ohne Einschränkung der Allgemeinheit erreicht werden, daß

$$B(x) = x^{2\nu} \overline{B}\left(\frac{1}{x}\right)$$

ist, das heißt, daß $b_\mu = \overline{b}_{2\nu-\mu}$ ist.

Damit ist die zu $B(x)$ und zur Zerlegung nach den Graden ν und ν gehörige rekurrente Matrix A hermitesch.

Satz A 1: Eine Cholesky-artige Zerlegung von A kann beliebig weit durchgeführt werden, wenn $B(x)$ nicht identisch verschwindet und die Nullstellen von $B(x)$ paarweise am Einheitskreis gespiegelt sind, das heißt wenn $B(x) = M(x) \cdot x^\nu \overline{M}\left(\frac{1}{x}\right)$ ist.

Dies ist sicher der Fall, wenn $B(x)$ keine Nullstellen auf dem Einheitskreis besitzt, also dann, wenn die Faktorisierung linear konvergiert.

Die Koeffizienten von $M(x)$ seien mit m_μ bezeichnet, $M(x) = \sum\limits_{0}^{\nu} m_\mu x^\mu$.

Dann ist A_r, der Abschnitt aus den ν ersten Zeilen und Spalten von A, voraussetzungsgemäß das Produkt der rechteckigen Matrizen M_r und $\overline{M}_r^T$,

$$A_r = M_r \bar{M}_r^T,$$

wo

$$M_r = \begin{bmatrix} m_0 m_1 \,.\,.\,.\,. & m_\nu & 0 & .\,.\,.\,. & 0 \\ 0 \quad m_0 \,.\,.\,.\,. & m_{\nu-1} & m_\nu & .\,.\,.\,. & 0 \\ \ddots \quad \ddots & & \ddots & \ddots & \\ 0 \,.\,.\,.\, 0 \quad m_0 & .\,.\,.\,. & m_{\nu-1} & & m_\nu \end{bmatrix}$$

eine rekurrente Matrix mit r Zeilen und $r + \nu$ Spalten ist.

Das hermitesche Produkt $M_r \bar{M}_r^T$ ist positiv-semidefinit. Es ist offensichtlich sogar positiv-definit, wenn wenigstens eines der $m_\varrho (\varrho = 0 \ldots \nu)$ nicht verschwindet, also $B(x)$ nicht identisch verschwindet.

Alle A_r sind somit positiv-definit, das heißt A ist (abschnittweise) positiv-definit. Insbesondere ist *det* $(A_r) > 0$ für alle r. Sodann ist bekanntlich die Cholesky-artige Zerlegung von A abschnittsweise beliebig weit durchführbar.

Druckfehlerberichtigung
zu Teil I (diese Sitzungsberichte 1954)

S. 282, letzte Zeile statt $\{i\}$ lies $\{i + 1\}$.

S. 292, nach Gl. (53) statt $\left| \frac{\xi_r}{\xi_{r+1}} \right|^i$ lies $\left| \frac{\xi_{r+1}}{\xi_r} \right|^i$.

S. 295, 8. Zeile v. u. statt „Näherungszählerpolynomen" lies „euklidschen Resten".