

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN  
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

---

# SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

# Über eine Schlichtheitschranke von James S. Thale

Von Oskar Perron in München

Vorgelegt am 5. Oktober 1956

In einer kürzlich erschienenen Arbeit<sup>1</sup> hat Herr Thale neben anderen ähnlichen Sätzen bewiesen, daß der Kettenbruch

$$(1) \quad F_0(z) = \frac{1}{|1} + \frac{a_1 z}{|1} + \frac{a_2 z^2}{|1} + \dots \quad \left( |a_\nu| \leq \frac{1}{4} \text{ für alle } \nu \right),$$

der bekanntlich für  $|z| \leq 1$  gleichmäßig konvergiert<sup>2</sup> und folglich für  $|z| < 1$  analytisch ist, den Kreis  $|z| < 12\sqrt{2} - 16 = 0,97\dots$  schlicht abbildet, das heißt, daß für  $z_1 \neq z_2$  stets auch  $F_0(z_1) \neq F_0(z_2)$  ist. Er vermutet, daß sogar der ganze Kreis  $|z| < 1$  schlicht abgebildet wird. In der Tat wird zunächst wohl kaum jemand die Richtigkeit dieser naheliegenden Vermutung bezweifeln; dennoch ist sie *falsch*, und die Schranke  $12\sqrt{2} - 16$  ist sogar die *bestmögliche*.

Zum Beweis folgen wir zunächst Herrn Thales Gedanken- gang und setzen

$$(2) \quad F_\nu(z) = \frac{1}{|1} + \frac{a_{\nu+1} z}{|1} + \frac{a_{\nu+2} z^2}{|1} + \dots \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots),$$

was für  $\nu = 0$  mit (1) übereinstimmt. Offenbar ist für  $|z| \leq \varrho < 1$

$$(3) \quad 0 < |F_\nu(z)| \leq \frac{1}{|1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho}{|1} - \frac{\frac{1}{4}\varrho^2}{|1} - \dots = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}.$$

Ferner ist

$$\frac{1}{F_\nu(z)} = 1 + a_{\nu+1} z F_{\nu+1}(z),$$

<sup>1</sup> James S. Thale: Univalence of continued fractions and Stieltjes transforms. Proceedings of the Amer. Math. Soc., vol. 7, Seite 232–244 (1956).

<sup>2</sup> Siehe z. B. mein Buch: Die Lehre von den Kettenbrüchen, 1. oder 2. Aufl. Seite 262.

also

$$\begin{aligned} \frac{1}{F_\nu(z_2)} - \frac{1}{F_\nu(z_1)} &= a_{\nu+1} [z_2 F_{\nu+1}(z_2) - z_1 F_{\nu+1}(z_1)] \\ &= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) \left[ z_2 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_1)} - z_1 \cdot \frac{1}{F_{\nu+1}(z_2)} \right] \\ &= a_{\nu+1} F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) [z_2(1 + a_{\nu+2} z_1 F_{\nu+2}(z_1)) \\ &\quad - z_1(1 + a_{\nu+2} z_2 F_{\nu+2}(z_2))]. \end{aligned}$$

Multipliziert man mit  $F_\nu(z_1) F_\nu(z_2)$  und setzt zur Abkürzung

$$(4) \quad F_\nu(z_1) F_\nu(z_2) F_{\nu+1}(z_1) F_{\nu+1}(z_2) = Q_\nu,$$

so kommt:

$$(5) \quad \begin{aligned} &F_\nu(z_1) - F_\nu(z_2) \\ &= a_{\nu+1} Q_\nu (z_2 - z_1) + a_{\nu+1} a_{\nu+2} Q_\nu z_1 z_2 [F_{\nu+2}(z_1) - F_{\nu+2}(z_2)]. \end{aligned}$$

Schreibt man diese Formel der Reihe nach für  $\nu = 0, 2, 4, \dots, 2n$  auf, so ergibt sich durch sukzessives Einsetzen:

$$(6) \quad \begin{aligned} &F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0 (z_2 - z_1) \times \\ &\times \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^n a_2 a_3 a_4 \dots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \dots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu \right] \\ &+ a_1 a_2 a_3 \dots a_{2n+2} Q_0 Q_2 \dots Q_{2n} z_1^{n+1} z_2^{n+1} [F_{2n+2}(z_1) - F_{2n+2}(z_2)]. \end{aligned}$$

Nun ist  $|a_\lambda| \leq \frac{1}{4}$  und für  $|z_k| \leq \varrho < 1$  ( $k = 1, 2$ ) ist nach (3)

$$0 < |F_\lambda(z_k)| \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}}$$

und folglich

$$0 < |Q_\lambda| \leq \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \varrho}} \right)^4.$$

Daher ergibt sich aus (6) für  $n \rightarrow \infty$

$$(7) \quad \begin{aligned} &F_0(z_1) - F_0(z_2) = a_1 Q_0 (z_2 - z_1) \times \\ &\times \left[ 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 a_4 \dots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \dots Q_{2\nu} z_1^\nu z_2^\nu \right]. \end{aligned}$$

Nun hat man aber die Abschätzung

$$(8) \quad \left| \sum_{\nu=1}^{\infty} a_2 a_3 \cdots a_{2\nu+1} Q_2 Q_4 \cdots Q_{2\nu} z_1^{\nu} z_2^{\nu} \right| \leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{4^{2\nu}} \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1-\varrho}} \right)^{4\nu} \varrho^{2\nu} \\ = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \right)^{\nu} = \frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \Big/ \left( 1 - \frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} \right).$$

Speziell für  $\varrho < 12\sqrt{2} - 16$  ist

$$(9) \quad \frac{\varrho}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^2} < \frac{12\sqrt{2} - 16}{(1 + \sqrt{17 - 12\sqrt{2}})^2} = \frac{12\sqrt{2} - 16}{(1 + 3 - 2\sqrt{2})^2} \\ = \frac{12\sqrt{2} - 16}{24 - 16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

also ist  $\frac{\varrho^2}{(1 + \sqrt{1-\varrho})^4} < \frac{1}{2}$ , und folglich die Reihe in (8) und (7)

absolut  $< \frac{1}{2} \Big/ \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 1$ , also  $\neq -1$ . Daher ist die eckige Klammer in (7) von 0 verschieden, also für  $z_2 \neq z_1$  auch  $F_0(z_2) \neq F_0(z_1)$ . Das ist das Resultat von Thale.

Nunmehr betrachten wir den speziellen Kettenbruch (1), bei dem  $a_2 = \frac{1}{4}$ ,  $a_{\nu} = -\frac{1}{4}$  für  $\nu \geq 3$  ist, während  $a_1$  beliebig sein darf. Bei diesem ist

$$F_{\nu}(z) = \frac{1}{1} - \frac{\frac{1}{4}z}{1} - \frac{\frac{1}{4}z}{1} - \cdots = \frac{2}{1 + \sqrt{1-z}} \quad \text{für } \nu \geq 2,$$

wobei die Quadratwurzel mit positivem Realteil zu nehmen ist. Nach (4) ist dann auch

$$Q_{\nu} = \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_2}} \right)^2 \quad \text{für } \nu \geq 2,$$

und die Formel (7) nimmt folgende Gestalt an:

$$F_0(z_1) - F_0(z_2) \\ = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \left[ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{1}{4} \right)^{2\nu} \left( \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_1}} \cdot \frac{2}{1 + \sqrt{1-z_2}} \right)^{2\nu} z_1^{\nu} z_2^{\nu} \right] \\ = a_1 Q_0(z_2 - z_1) \left[ 1 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \left( \frac{z_1}{(1 + \sqrt{1-z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1-z_2})^2} \right)^{\nu} \right].$$

Es wird also  $F_0(z_1) = F_0(z_2)$  sein, wenn die eckige Klammer verschwindet, wenn also

$$\frac{z_1}{(1 + \sqrt{1 - z_1})^2} \cdot \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1 - z_2})^2} = \frac{1}{2}$$

ist. Das trifft zunächst zu, wenn die beiden Brüche auf der linken Seite gleich  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  sind, was  $z_1 = z_2 = 12\sqrt{2} - 16$  liefert. Es trifft aber auch zu, wenn

$$(10) \quad \frac{z_1}{(1 + \sqrt{1 - z_1})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{\alpha}, \quad \frac{z_2}{(1 + \sqrt{1 - z_2})^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\alpha}$$

ist. Das ergibt für  $z_1$  und  $z_2$  zwei *verschiedene* Werte, die für hinreichend kleines  $|\alpha|$  beliebig nahe bei dem vorhin gefundenen Wert  $12\sqrt{2} - 16$  liegen. Somit kann die Thalesche Schranke  $12\sqrt{2} - 16$  durch keine größere ersetzt werden.

Das Beispiel lehrt auch noch, daß der von Herrn Thale beim Beweis herangezogene, angeblich aus einem (wohl mißverstandenen) Satz von Montel folgende Umstand, daß notwendig  $|z_1| = |z_2|$  sein muß, nicht zutrifft. Denn die Gleichungen (10) liefern zwar bei rein imaginärem  $\alpha$  für  $z_1$  und  $z_2$  zwei konjugiert-komplexe Werte, also  $|z_1| = |z_2|$ , bei reellem  $\alpha$  aber zwei verschiedene positive Werte, also  $|z_1| \neq |z_2|$ .

# ZOBODAT - [www.zobodat.at](http://www.zobodat.at)

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: [Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München](#)

Jahr/Year: 1956

Band/Volume: [1956](#)

Autor(en)/Author(s): Perron Oskar

Artikel/Article: [Über eine Schlichtheitschranke von James S. Thale 233-236](#)