BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1956

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über unendliche kontinuierliche Gruppen

II. Strukturtheorie lokal-Banachscher Gruppen

Von **Detlef Laugwitz** in Göttingen*

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 5. Oktober 1956

Übersicht

---

* Diese Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft, Bad Godesberg, gefördert, der ich an dieser Stelle dafür danken möchte. Mein Dank gilt auch Herrn Prof. W. Süss für die freundliche Erlaubnis zur Benutzung der Einrichtungen des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach.

Einleitung

1. In einer früheren Arbeit [8][1] ist das Studium einer gewissen Klasse von unendlichen kontinuierlichen Gruppen mittels einer bereits vorher entwickelten Tensorrechnung für unendlichdimensionale Mannigfaltigkeiten [7] begonnen worden. Es handelt sich dabei um eine Verallgemeinerung der endlichen Lieschen Gruppen. Eine solche endliche kontinuierliche Gruppe kann beschrieben werden als Zusammenfassung dreier Strukturen: a) einer algebraischen (Gruppe oder Gruppenkeim), b) einer topologischen (lokalkompakter Hausdorff-Raum endlicher Dimension), c) einer analytischen Struktur (n-dimensionale differenzierbare Mannigfaltigkeit); dabei bestehen zwischen diesen drei Strukturen gewisse Verträglichkeitsbedingungen. Nachdem durch die in den letzten Jahren erfolgte Erledigung des V. Hilbertschen Problems gezeigt ist, daß a) und b) zusammen bereits c) zur Folge haben, ist die Frage besonders naheliegend, welche allgemeineren (nicht notwendig lokalkompakten) topologischen Gruppen einer analytischen Behandlung zugänglich sind. Wir werden c) ersetzen durch die Forderung, daß eine lokal-Banachsche differenzierbare Mannigfaltigkeit vorliegen möge; über die topologische Struktur b) wird darüber hinaus nichts vorausgesetzt.

2. Solche lokal-Banachschen Gruppen hat erstmals G. Birkhoff [1] untersucht. Seine Methode besteht vor allem in einer Anwendung der Kurventheorie für metrische Räume auf die einparametrigen Untergruppen, als Kurven in der durch die Banachsche Metrik lokal metrisierten Gruppenmannigfaltigkeit betrachtet. Dadurch erlaubt seine Methode eine sparsame Verwendung von Differenzierbarkeitsannahmen, wirkt sich aber in der Durchführung im einzelnen recht schwerfällig aus. – Spezielle Fälle von lokal-Banachschen Gruppen sind besonders von Michal [11] untersucht worden.

---

[1] Wir zitieren diese Arbeit [8] hier auch mit I. – Obwohl Ergebnisse aus I. in der vorliegenden Arbeit verwendet werden, ist diese unabhängig von I. lesbar. – Alle Ergebnisse beziehen sich auf Gruppenkeime, auch wenn das gelegentlich der Kürze halber nicht ausdrücklich gesagt ist.

3. Wir bedienen uns hier wie schon in [8] einer anderen Methode. Da die Gruppenmannigfaltigkeit einer lokal-Banachschen Gruppe eine (i. a. unendlichdimensionale) differenzierbare Mannigfaltigkeit im Sinne von [7] ist, erscheint es naheliegend, die früher entwickelte Verallgemeinerung der Tensorrechnung (vgl. [7]) für solche Mannigfaltigkeiten sowie die von vielen Autoren entwickelte Differentialrechnung in Banach-Räumen[1] zur Behandlung dieser unendlichen kontinuierlichen Gruppen heranzuziehen. Diese Methode hat sich bereits in [8] als schlagkräftiger erwiesen als die Birkhoffs; es gelang uns dort nämlich der Nachweis, daß alle lokalkompakten Untergruppen ebenso wie das Zentrum einer lokal-Banachschen differenzierbaren Gruppe wieder derartige Gruppen sind. Der vermutlich richtige Satz, daß überhaupt alle abgeschlossenen Untergruppen diese Eigenschaft haben, kann auch jetzt noch nicht bewiesen werden, doch werden wir in § 11 zeigen, daß dies für alle topologisch einfachen Untergruppen gilt. – Ein anderer Vorteil unserer Methode besteht darin, daß viele Beweise wegen der weitgehenden Analogie der unendlichdimensionalen zur klassischen Tensorrechnung mit geringfügigen Modifikationen aus der Theorie der endlichen Lieschen Gruppen übernommen werden können, wie sie etwa im Lehrbuch [13] dargestellt ist. (Man beachte dabei aber Nr. **6** dieser Einleitung!).

4. Den Hauptinhalt der vorliegenden Arbeit bildet eine Strukturtheorie der lokal-Banachschen differenzierbaren Gruppen. Es wird gezeigt werden, daß – wie im klassischen Fall – eine solche Gruppe lokal (d. h. als Gruppenkeim) völlig bestimmt ist durch eine (hier natürlich i. a. unendlichdimensionale) „Lie-Algebra", und daß deren Subalgebren die differenzierbaren Untergruppen entsprechen. Dabei tritt als wesentlicher neuer Zug gegenüber der klassischen Theorie hervor, daß die Algebra zugleich ein Banach-Raum ist, also eine Topologie trägt. Dieser Sachverhalt ist im endlichen Fall unwesentlich, weil jeder endlichdimensionale reelle Vektorraum – und damit jede endliche Algebra – eine eindeutig bestimmte uniforme Hausdorff-Topologie trägt, was für unendlichdimensionale Räume nicht mehr gilt.

[1] Darstellung in Lehrbuchform: [10. Kap. VI]; weitere hier verwendete Beiträge finden sich in den Arbeiten [3], [5], [6], [7], [8], [12].

5. Wichtige Beispiele für die hier betrachteten Gruppen bilden Gruppen beschränkter linearer Transformationen in Hilbertschen und Banachschen Räumen, allgemeiner Gruppen aus Banach-Algebren. – In einer nachfolgenden Arbeit soll das Verhältnis der hier behandelten unendlichen kontinuierlichen Gruppen zu den besonders von Lie [9] und Cartan [2] untersuchten unendlichen Transformationsgruppen erörtert werden.

6. Gegenüber den klassischen (endlichen) Lie-Gruppen bringt die vorliegende Theorie eine Verallgemeinerung sowohl der topologischen Struktur (Verzicht auf die Lokalkompaktheit) als auch der analytischen Struktur (Banachsche Koordinatenräume). Während infolge des in Nr. **3** dieser Einleitung erwähnten Sachverhalts die Verallgemeinerung der analytischen Struktur keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten bedingt, bedeutet der Verzicht auf die Lokalkompaktheit zuweilen – z. B. bei dem in Nr. **3** erwähnten Problem über Untergruppen – eine wesentliche Erhöhung des Schwierigkeitsgrades.

7. Ein gegenüber dem üblichen Aufbau – auch im endlichdimensionalen Spezialfall – hervorzuhebender Gesichtspunkt ist die basisfreie Auffassung. So verwenden wir z. B. an Stelle der von der Basiswahl abhängigen Strukturkonstanten der Gruppe eine Strukturbilinearform im Koordinatenraum. (Die basisfreie Auffassung ist für den endlichdimensionalen Fall erstmals von H. Freudenthal [4] befürwortet worden.)

§ 1. Zur Tensorrechnung in lokal-Banachschen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Ein topologischer Raum zusammen mit einer Überdeckung durch Bilder von offenen Mengen aus einem Banachschen Raum B heißt *B-lokale differenzierbare Mannigfaltigkeit,* wenn im Durchschnitt je zweier Mengen der Überdeckung die induzierte Abbildung der Urbildmengen in B differenzierbar ist. Dabei wird hier und im folgenden stets der Differenzierbarkeitsbegriff von Fréchet [3] zugrundegelegt. (Vgl. auch [5], [6], [10].)

Einer Tensorrechnung für solche Mannigfaltigkeiten muß eine Begründung des Linearformenkalküls für den Banach-Raum B vorausgehen. Wir stellen zur Bequemlichkeit des Lesers die wichtigsten Bezeichnungen und Begriffe kurz zusammen und verweisen im übrigen auf [7] und I, Anhang 1.

Die Elemente von B sollen mit einem oberen Index aus dem kleinen lateinischen Alphabet versehen werden dürfen: $x^i \in B$. Die Elemente des adjungierten Raumes B_1 (des Raumes der beschränkten linearen Funktionale) tragen einen unteren Index: $y_k \in B_1$. Identifikation von oberen und unteren Indices bedeute stets die Ausführung der entsprechenden linearen Operation: $x^i y_i = y_k x^k$ ist also eine Zahl.

Ein „*höherer adjungierter Raum*" B^m_n (Elemente $t^{i_1 \ldots i_m}_{k_1 \ldots k_n}$) besteht aus denjenigen beschränkten Multilinearformen (m Argumente aus B_1, n Argumente aus B), welche folgende zusätzliche Eigenschaft haben, die nur im Falle reflexiver Räume B von selbst erfüllt ist: Jeder Ausdruck

$$t^{i_1 \ldots i_r \ldots i_m}_{k_1 \ldots k_n} y_{i_1} \ldots z_{i_m} u^{k_1} \ldots x^{k_n}$$

mit genau einem freien oberen Index i_r liegt in B. (Ein solcher Ausdruck ist zunächst ein stetiges lineares Funktional über B_1, also ein Element von $(B_1)_1$; unsere Forderung besagt: Es gibt ein $t^i \in B$, welches mit allen Elementen aus B_1 jeweils das gleiche Skalarprodukt hat wie der betrachtete Ausdruck, und mit dem dieser Ausdruck dann nach bekannter Vorschrift identifiziert wird.)

Z. B. besteht B^1_1 also aus den beschränkten linearen Abbildungen von B auf sich:

$$x^i = t^i_k y^k$$

und B^1_2 aus den beschränkten Bilinearformen über $B \times B$ mit Werten in B:

$$c^i_{jk} x^j y^k \in B\,.$$

Die linearen Operationen der Fréchetschen Ableitungen lassen sich in diese Terminologie einbeziehen: Eine Abbildung $F^i(x^k)$:

$B \to B$ heißt im Punkte x^k differenzierbar und der beschränkte lineare Operator

$$\frac{\delta F^i(x^k)}{\delta x^j}$$

heißt ihre Fréchetsche Ableitung an der Stelle x^k, wenn

$$F^i(x+dx) - F^i(x) = \frac{\delta F^i(x)}{\delta x^j}\, dx^j + o^i(dx).$$

Der *Tangentialraum* $T(P)$ der lokal-Banachschen differenzierbaren Mannigfaltigkeit im Punkte P ist linear homöomorph zu B; seine Elemente werden durch die Koordinatendifferentiale dargestellt. *Tensoren* sind die Elemente der höheren adjungierten Räume zu $T(P)$.

§ 2. Totale partielle Differentialgleichungen in Banachschen Räumen

A. D. Michal und V. Elconin [12] haben den Satz über die vollständige Integrabilität totaler partieller Differentialgleichungen auf Banachräume verallgemeinert; in unseren Bezeichnungen lautet dieser Satz:

2.1. $B = \{x^i\}$ *und* $C = \{\eta^\alpha\}$ *seien zwei nicht notwendig verschiedene Banachsche Räume,*[1] $f^i(y^k;\, \eta^\alpha)$ *eine zweimal stetig differenzierbare Funktion in* $U \times \Omega$ *(*U*,* Ω *offene Mengen in* B*,* C*). Dann ist notwendig und hinreichend für die vollständige Integrabilität*[2] *von*

$$\frac{\delta y^i(\xi)}{\delta \xi^\alpha} = f^i_\alpha(y^k(\xi);\, \xi^\beta)$$

das Bestehen der folgenden Beziehung für die partiellen Ableitungen von f*:*

---

[1] Zur Indizierung von Elementen des Raumes C verwenden wir das kleine griechische Alphabet; der Linearformenkalkül (§ 1) überträgt sich in offensichtlicher Weise auf Paare von Räumen B, C.

[2] Die Differentialgleichung heißt vollständig integrabel, wenn für jedes $\tilde{\eta}^\alpha$ aus Ω und jedes $\tilde{y}^i$ aus U eine Lösung $y^i(\eta)$ existiert mit $y^i(\tilde{\eta}) = \tilde{y}^i$.

$$\frac{\delta f_\alpha^i}{\delta y^k} f_\beta^k - \frac{\delta f_\beta^i}{\delta y^k} f_\alpha^k + \frac{\delta f_\alpha^i}{\delta \xi^\beta} - \frac{\delta f_\beta^i}{\delta \xi^\alpha} = 0.$$

Wenn diese Integrabilitätsbedingung erfüllt ist, dann ist eine Lösung $y^k(\xi)$ einmal mehr differenzierbar als f^i.

Wir wollen diesen Satz hier auf Differentialgleichungen eines speziellen Typs anwenden und für diesen Fall eine andere Form der Integrabilitätsbedingung verwenden:

2.2. *Es sei $v_k^i(x) \in B_1^1$ für x aus der offenen Untermenge U von B zweimal stetig differenzierbar und besitze eine Inverse $u_j^k \in B_1^1$ für $x \in U$. Dann ist notwendig und hinreichend für die vollständige Integrabilität von*

$$v_k^i(f) \frac{\delta f^k(x)}{\delta x^j} = v_j^i(x)$$

die Existenz einer konstanten Bilinearform $c_{jk}^i \in B_2^1$ mit

$$\frac{\delta v_k^i(x)}{\delta x^j} - \frac{\delta v_j^i(x)}{\delta x^k} = c_{mr}^i v_j^m(x) v_k^r(x)$$

für alle $x \in U$.

Beweis. Wegen der Existenz der Inversen, die dann genau so oft differenzierbar ist wie v, kann die Differentialgleichung geschrieben werden

$$\frac{\delta f^k(x)}{\delta x^j} = u_i^k(f) v_j^i(x).$$

Die Integrabilitätsbedingung dieser Differentialgleichung nach **2.1.** läßt sich nach einfacher Umrechnung in die Form bringen

$$\left\{\frac{\delta v_j^k(x)}{\delta x^i} - \frac{\delta v_i^k(x)}{\delta x^j}\right\} u_m^i(x) u_r^j(x) = \left\{\frac{\delta v_j^k(f)}{\delta x^i} - \frac{\delta v_i^k(f)}{\delta x^j}\right\} u_m^i(f) u_r^j(f).$$

Da dies in jedem Punkt x für alle zulässigen Anfangsbedingungen f gelten muß, ergibt sich, daß die Integrabilitätsbedingung äquivalent ist mit der Konstanz dieser Ausdrücke, woraus die Behauptung folgt.

§ 3. B-Lie-Algebren

Eine *Banach-Algebra* (B-Algebra; vgl. z. B. [5]) ist ein Banach-Raum B, zwischen dessen Elementen eine weitere Operation („Multiplikation") erklärt ist mittels einer stetigen Bilinear-Form $B \times B \to B$:

$$d^i_{jk} x^j y^k, \quad d^i_{jk} \in B^1_2.$$ [1]

Eine solche B-Algebra heiße *B-Lie-Algebra*, wenn die Bilinearform die folgenden beiden Eigenschaften hat:

Schiefsymmetrie: $d^i_{jk} + d^i_{kj} = 0$.

Jacobische Identität: $d^i_{jr} d^r_{km} + d^i_{kr} d^r_{mj} + d^i_{mr} d^r_{jk} = 0$.

Wir werden in § 4 zeigen, daß zu jeder assoziativen Banach-Algebra mit einem Einselement $e^k (d^i_{jk} e^k = \delta^i_j$, δ^i_j Kroneckersches Symbol für den Einheitsoperator) eine B-Lie-Algebra gehört, der der gleiche Banachraum zugrundeliegt, und deren Bilinearform d^{*i}_{jk} aus der Bilinearform d^i_{jk} der ursprünglichen Algebra hervorgeht durch

$$d^{*i}_{jk} = \frac{1}{2} (d^i_{kj} - d^i_{jk}).$$

Jeder Banach-Raum läßt sich in trivialer Weise zu einer B-Lie-Algebra machen durch die Festsetzung $d^i_{jk} = 0$.

§ 4. Die B-Lie-Algebra einer lokal-Banachschen differenzierbaren Gruppe

Es sei K ein dreimal stetig differenzierbarer lokal-Banachscher Gruppenkeim (I, § 1), der Koordinatenvektor $f^i(x^k; y^k)$ des Produktes xy hänge also dreimal stetig differenzierbar von den Koordinatenvektoren der Faktoren ab. Der Koordinaten-

[1] Es ist oft üblich, B-Algebren als assoziativ vorauszusetzen; diesem Gebrauch wollen wir hier nicht folgen, weil die sogleich zu erklärenden B-Lie-Algebren i. a. nicht assoziativ sind. Soll eine B-Algebra als assoziativ vorausgesetzt sein, so wird dies stets ausdrücklich bemerkt werden.

vektor der Gruppeneins e sei o. Dann gilt nach I. § 1 (2) die Taylor-Entwicklung in der Umgebung von $x^k = y^k = 0$:

$$f^i(x; y) = x^i + y^i + \frac{1}{2} \frac{\delta^2 f^i(0; 0)}{\delta x^j \delta y^k} x^j y^k + (\|x\| + \|y\|) \, o^i(x \otimes y).$$

Die erste Näherung der Differenz $f^i(x; y) - f^i(y; x)$ verschwindet also (die Gruppe ist in erster Näherung abelsch), und für die zweite Näherung ist die Bilinearform

$$c^i_{jk} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\delta^2 f^i(0; 0)}{\delta x^j \delta y^k} - \frac{\delta^2 f^i(0; 0)}{\delta x^k \delta y^j} \right\}$$

verantwortlich. Diese Bilinearform bezeichnen wir als *Strukturbilinearform* des Gruppenkeims K. Sie ist ein Tensor im Nullpunkt der Gruppenmannigfaltigkeit und offensichtlich schiefsymmetrisch.

Die Strukturbilinearform kann noch auf eine andere Weise definiert werden. Zunächst ist nämlich in kanonischen Koordinaten $(x^{-1})^k = -x^k$, und daraus folgt für den Koordinatenvektor q^i des Kommutators $q = x y x^{-1} y^{-1}$

$$q^i = c^i_{jk} x^j y^k + (\|x\| + \|y\|) \, o^i(x \otimes y).$$

Wegen der Tensoreigenschaft von c^i_{jk} gilt dies dann sogar in jedem Koordinatensystem.

Die Jacobische Relation für die Strukturbilinearform erweist man wie im endlichen Fall aus der Assoziativität des Gruppenproduktes [13, Theorem 65, S. 236–237]. Damit ist bewiesen:

4.1. *Der zu B linear homöomorphe Tangentialraum $T(0)$ im Punkte der Gruppeneins wird durch die Strukturbilinearform c^i_{jk} zu einer B-Lie-Algebra.*

Wir wollen diesen Satz sogleich anwenden auf assoziative B-Algebren mit einem Einselement e^j und der Komposition d^i_{jk} (§ 3). Nach I, § 6 ist eine Umgebung von e in einer solchen Banach-Algebra ein analytischer B-lokaler Gruppenkeim mit

$$f^i(x; y) = x^i + y^i - d^i_{jk} x^j y^k; \quad x^i = e - x \text{ usw.}$$

Es ergibt sich daraus

$$\frac{\delta^2 f^i(x;y)}{\delta x^j \delta y^k} = -d^i_{jk}$$

sogar für alle x, y und es gilt also der Satz:

4.2. *Zu einer assoziativen Banach-Algebra mit einem Einselement und mit der Komposition d^i_{jk} gehört eine B-Lie-Algebra mit dem gleichen Banach-Raum und der Komposition*

$$c^i_{jk} = \frac{1}{2}(d^i_{kj} - d^i_{jk});$$

diese ist die B-Lie-Algebra der Gruppe der Banach-Algebra.

Die in diesem Satz enthaltene Jacobische Identität für den schiefsymmetrischen Anteil des Produktes einer assoziativen Banach-Algebra mit Einselement kann man natürlich – allerdings umständlicher – auch durch direkte Ausrechnung bestätigen.

§ 5. Zu den Untergruppen gehören Subalgebren der B-Lie-Algebra

Es sei H ein abgeschlossener Untergruppenkeim des lokal-Banachschen Gruppenkeims K. In **I. 5.2** haben wir dieser Untergruppe H einen abgeschlossenen linearen Unterraum $L(H)$ des Tangentialraums $T(0)$ zugeordnet vermöge folgender Konstruktion: K sei wieder in kanonischen Koordinaten vorgelegt; dann besteht $L(H)$ aus den Tangentialvektoren aller in H gelegenen, im Nullpunkt differenzierbaren Kurven.

5.1. *Wenn H eine abgeschlossene Untergruppe von K ist, dann ist $L(H)$ eine abgeschlossene Subalgebra der Lie-Algebra von K.*

Beweis. Nach **I. 5.2** ist $L(H)$ abgeschlossen und linear. Es bleibt also nur zu zeigen, daß mit ξ^i, η^k auch $c^i_{jk}\, \xi^i \eta^k$ Element von $L(H)$ ist. Wenn ξ und η diese Eigenschaft haben, dann existieren jedenfalls ganz in H gelegene, in 0 differenzierbare Kurven $x(t)$, $y(t)$ mit $x(0) = y(0) = e$ und

$$\frac{\delta x^i(0)}{dt} = \xi^i, \qquad \frac{\delta y^i(0)}{dt} = \eta^i;$$

dann ist aber auch der Kommutator

$$q(t) = x(t)\,y(t)\,x^{-1}(t)\,y^{-1}(t)$$

eine in H gelegene differenzierbare Kurve mit $q(0) = e$, ebenso $p(\tau) = q(\sqrt{\tau})$. Der Tangentialvektor dieser Kurve ist aber nach der zweiten Definition der Strukturbilinearform in § 4 gerade $c^i_{jk}\,\xi^j\,\eta^k$, womit der Satz bewiesen ist.

Als ein Korollar ergibt sich daraus noch:

5.2. *Wenn H eine differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe von K ist, dann ist $L(H)$ eine B-Lie-Algebra im Tangentialraum der Untermannigfaltigkeit H im Nullpunkt.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar aus **5.1** und **I. 5.4.**

§ 6. Die Hilfsfunktion $v^i_j(x)$

Die folgenden Paragraphen sind dem Problem gewidmet, zu einer B-Lie-Algebra einen Gruppenkeim zu bestimmen, dessen B-Lie-Algebra isomorph zu der vorgelegten ist, und zu zeigen, daß dieser Gruppenkeim selbst bis auf Isomorphismen eindeutig bestimmt ist. Wir zerlegen diese Aufgabe – ähnlich wie es im endlichen Spezialfall üblich ist [13] – in mehrere Teilprobleme. Zunächst führen wir in § 6 in einer B-lokalen differenzierbaren Gruppe Hilfsfunktionen $v^i_j(x): B \to B^1_1$ ein, die einer gewissen Differentialgleichung genügen. Dann zeigen wir in § 7, daß eine Funktion mit einer derartigen Differentialgleichung, in der Umgebung des Nullpunkts eines Banach-Raums definiert, dort Anlaß zur Einführung einer Multiplikation gibt, durch die der Raum zu einer B-lokalen differenzierbaren Gruppe wird. Und schließlich konstruieren wir in § 8 im Banach-Raum der vorgegebenen B-Lie-Algebra solche Hilfsfunktionen, die uns dann die zugehörige B-lokale Gruppe (in kanonischen Koordinaten) liefern.

Sei also K wieder ein lokal-Banachscher, dreimal differenzierbarer Gruppenkeim, und bezeichne $(x + dx)$ das Element mit dem Koordinatenvektor $x^i + dx^i$. Für $r(x; dx) = (x + dx)\,x^{-1}$ gilt

$$r^i(x; dx) = v^i_j(x)\,dx^j + o^i(dx)$$

mit

$$v^i_j(x) = \frac{\delta f^i(x;\, x^{-1})}{\delta x^j}$$

$\left(\frac{\delta}{\delta x}\right.$ ist die partielle Ableitung nach dem ersten Argumentvektor!$\left.\right)$
Offenbar ist $v^i_j(e) = \delta^i_j$.

6.1. *Der Koordinatenvektor des Produktes, $f^i(x^k;\, y^k)$, genügt für jedes feste y der Differentialgleichung*

$$v^i_k(f(x;\, y))\, \frac{\delta f^k}{\delta x^j} = v^i_j(x)$$

mit der Anfangsbedingung

$$f^i(0;\, y) = y^i.$$

Beweis. Die Anfangsbedingung ist selbstverständlich. Die Differentialgleichung folgt so. Setzt man

$$df = f(x + dx;\, y) - f(x;\, y),$$

also

$$(f + df)^i = ((x + dx)\, y)^i = f^i(x + dx;\, y),$$

so folgt

$$(f + df)\, f^{-1} = (x + dx)\; y(xy)^{-1} = (x + dx)\; x^{-1},$$

d. h.

$$r(f;\, df) = r(x;\, dx)$$

oder

$$v^i_j(f)\; df^j + o^i(df) = v^i_j(x)\; dx^j + o^i(dx).$$

Für $dx^i \to 0$ geht dies in die behauptete Differentialgleichung über.

6.2. *Für die Hilfsfunktion $v^i_j(x)$ gilt*

$$\frac{\delta v^i_k(x)}{\delta x^j} - \frac{\delta v^i_j(x)}{\delta x^k} = c^i_{rs}\, v^r_j(x)\, v^s_k(x),$$

wobei c^i_{rs} die Strukturbilinearform des Gruppenkeims ist.

Beweis. Die Differentialgleichung aus **6.1** ist nach dem dort bewiesenen vollständig integrabel, die Lösungen sind gerade die Funktionen $f^i(x;\, y)$ für jedes feste y. Also ist die notwendige

Integrabilitätsbedingung aus **2.2** erfüllt, es existiert somit jedenfalls eine Bilinearform, die die behauptete Beziehung erfüllt. Es bleibt zu zeigen, daß diese mit der Strukturbilinearform der Gruppe identisch ist. Für $x = e$ geht die Differentialgleichung über in

$$v_k^i(y)\,\frac{\delta f^k(e;y)}{\delta x^j} = \delta_j^i.$$

Differentiation nach y ergibt für $y = e$:

$$\frac{\delta v_j^i(e)}{\delta y^k} + \frac{\delta^2 f^i(e;e)}{\delta x^j\,\delta y^k} = 0,$$

woraus nach der Definition der Strukturbilinearform die Behauptung folgt.

6.3. *Sei $g(t)$ eine eingliedrige Untergruppe von K mit dem Richtungsvektor*

$$\frac{\delta g^i(0)}{dt} = \gamma^i;$$

dann gilt für alle t (aus einem 0 im Innern enthaltenden Intervall)

$$v_j^i(g(t))\,\frac{\delta g^j(t)}{dt} = \gamma^i.$$

Beweis. Es ist (weil $g(t)$ eine eingliedrige Untergruppe ist)

$$g(t+dt)\,g^{-1}(t) = g(dt)$$

oder wegen

$$v_j^i(x) = \frac{\delta f^i(x;x^{-1})}{\delta x^j}:$$

$$g^i(dt) = v_j^i(g(t))\,\big(g^j(t+dt) - g^j(dt)\big) + o^i(dt),$$

woraus die Behauptung nach der Definition des Fréchetschen Differentials folgt.

Wir beweisen im Anschluß daran einen Hilfssatz über die Hilfsfunktion $v_j^i(x)$ in kanonischen Koordinaten:

6.4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß das Koordinatensystem kanonisch ist, ist:*

$$v_j^i(x)\,x^j = x^i$$

Beweis. Die Bedingung ist notwendig; denn wegen **6.3** ist in kanonischen Koordinaten, wo ja $g^i(t) = t\gamma^i$ gilt

$$\gamma^i = v^i_j(t\gamma^i)\,\gamma^j,$$

woraus für $t = 1$, $\gamma = x$ die Bedingung folgt. – Ist umgekehrt die Bedingung erfüllt, so ist wegen $v^i_j(x)\,x^j = x^i$ $g^i(t) = t\gamma^i$ eine Lösung der Differentialgleichung in **6.3**, also wegen des Eindeutigkeitssatzes für gewöhnliche Differentialgleichungen [6] die einzige mit

$$\frac{\delta g^i(0)}{dt} = \gamma^i.$$

Daher ist $t\gamma^i$ die Koordinatendarstellung einer eingliedrigen Untergruppe, und da dies für jeden beliebigen Richtungsvektor γ^i gilt, ist das Koordinatensystem tatsächlich kanonisch.

§ 7. Konstruktion einer B-lokalen differenzierbaren Gruppe aus vorgegebener Hilfsfunktion $v^i_j(x^k)$

Als ersten Schritt zur Konstruktion einer B-lokalen Gruppe mit vorgegebener Strukturbilinearform konstruieren wir zunächst eine Gruppe zu vorgegebener Hilfsfunktion $v^i_j(x)$.

7.1. *Sei U eine Umgebung des Nullpunktes eines Banachschen Raumes B, in der eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $v^i_j(x): B \to B^1_1$ definiert sei mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *v^i_j besitzt eine in B^1_1 gelegene Inverse.*

(b) $\dfrac{\delta v^i_k}{\delta x^j} - \dfrac{\delta v^i_j}{\delta x^k} = c^i_{rs}\, v^r_j v^s_k, \quad c^i_{rs} \in B^1_2,$ *konstant.*

Wegen (b) *und* **2.2** *ist somit die folgende Differentialgleichung vollständig integrabel:*

(c) $$v^i_k(f)\,\frac{\delta f^k}{\delta x^j} = v^i_j(x).$$

Bezeichne $f^i(x; y)$ für $x, y \in U$ diejenige Lösung $f(x)$ von (c) *mit $f^i(0) = f^i(0; y) = y^i$.*

Behauptung: *$f(x; y)$ ist eine solche Abbildung $U \times U \to B$, daß U dadurch zu einem B-lokalen, dreimal stetig differenzierbaren Gruppenkeim wird, dessen Hilfsfunktion und Strukturbilinearform gerade durch $v^i_j(x)$ und c^i_{jk} aus* (𝔟) *gegeben sind.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß die durch $f(x; y)$ in U definierte Multiplikation assoziativ ist. Wegen $f(0; 0) = 0$ und der Stetigkeit von f existieren Umgebungen V, V' von 0 in B so daß $f(x; y) \in U$ für $x, y \in V$ und $f(x; y) \in V$ für $x, y \in V'$. Im folgenden seien alle Vektoren aus V' gewählt. Seien speziell x, y, z aus V'. Um die Assoziativität zu beweisen, müssen wir zeigen:

$$w(x) \underset{def}{=} f(f(x; y); z) = f(x; f(y; z)) \underset{def}{=} \overline{w}(x).$$

(Dabei betrachten wir y, z als fest und x als variabel.)
Nach Definition von f löst $\overline{w}(x)$ die Differentialgleichung (𝔠) mit der Anfangsbedingung $\overline{w}(0) = f(y; z)$. Wir zeigen, daß $w(x)$ ebenfalls eine Lösung von (𝔠) mit der gleichen Anfangsbedingung ist, woraus wegen der Eindeutigkeitsaussage von **2.2** die Teilbehauptung folgt. Wir bezeichnen dazu noch mit u^i_k die Inverse von v^k_j und mit $p^i = f^i(x; y)$. Dann ist nach Definition von f durch die Lösungen von (𝔠):

$$\frac{\delta w^i(x)}{\delta x^j} = \frac{\delta w^i}{\delta p^r} \frac{\delta p^r}{\delta x^j} = u^i_k(w)\, v^k_r(u)\, u^r_s(u)\, v^s_j(x) = u^i_r(w)\, v^r_j(x);$$

nach Überschieben mit $v^k_i(w)$ ergibt sich gerade die Behauptung.

Der Nullpunkt entspricht bei der durch f definierten Multiplikation dem Einselement, weil $f(x) = x$ trivialerweise eine Lösung von (𝔠) mit $f(0) = 0$ ist, also die einzige, d. h. $f(x; 0) = x$.

Wir müssen schließlich noch die Existenz des inversen Elements zeigen. Dazu muß man $f^i(x; y) = 0$ nach y auflösen. Für $x = 0$ ist offenbar $y = 0$. Wegen $f(0; y) = y$ ist die Ableitung nach y für $y = 0$ der Einheitsoperator, also existiert die dazu inverse lineare Operation. Nach dem bereits in [I] mehrfach verwendeten Umkehrungssatz von Hildebrandt, Graves und Nevanlinna (I, § 1) ist die Gleichung für die Inverse daher in einer ganzen Umgebung von $x = 0$ lösbar.

Diejenige Umgebung der 0, in der alle diese Konstruktionen ausführbar sind, bezeichnen wir mit K. K ist nach dem bewiesenen ein B-lokaler Gruppenkeim, und $f(x; y)$, die Produktfunktion, ist als Lösung der Differentialgleichung ($\mathfrak{c}$) nach x und nach dem Parameter y dreimal stetig differenzierbar, wie aus den in [6] bewiesenen Sätzen über Differentialgleichungen in Banach-Räumen folgt.

Nun muß noch gezeigt werden, daß $v^i_j(x)$ mit der Hilfsfunktion des Gruppenkeims K, die in § 6 eingeführt wurde und die wir hier zunächst mit $\tilde{v}^i_j$ bezeichnen wollen, zusammenfällt. Zunächst gilt also sowohl

$$v^i_k(f) \frac{\delta f^k}{\delta x^j} = v^i_j(x) \qquad \text{(nach } (\mathfrak{c})\text{)}$$

als auch

$$\tilde{y}^i_k(f) \frac{\delta f^k}{\delta x^j} = \tilde{v}^i(x) \qquad \text{(nach 6.1)}$$

für $f = f(x; y)$. Für $x^i = 0$ ergibt sich

$$v^i_k(y) \frac{\delta f^k(0; y)}{\delta x^j} = \delta^i_j,$$

somit

$$\frac{\delta f^k(0; y)}{\delta x^j} = u^k_j(y).$$

Das Gleiche ergibt sich aber auch für die Inverse $\tilde{u}^k_j(y)$ von $\tilde{v}^k_j(y)$, so daß die Inversen und damit auch v und $\tilde{y}$ selbst übereinstimmen. Daraus ergibt sich dann auch, daß c^i_{jk} wirklich die Strukturbilinearform von K ist. Damit ist der Beweis beendet.

§ 8. Konstruktion der Hilfsfunktion $v^i_j(x)$ zu vorgegebener B-Lie-Algebra

Der zweite Schritt zur Konstruktion eines Gruppenkeims zu vorgegebener B-Lie-Algebra besteht darin, aus der Bilinearform c^i_{jk} der B-Lie-Algebra in einer Umgebung des Nullpunktes die Funktion $v^i_j(x)$ zu konstruieren. Und zwar wird diese Konstruktion so ausgeführt, daß der Gruppenkeim später in kanonischen Koordinaten erhalten wird. Dies ist auch im endlichen Fall üblich und ist aus zwei Gründen zweckmäßig: Einmal reduzieren sich dadurch viele Probleme auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen, und zum anderen wird dadurch die eindeutige Bestimmtheit von K deutlich.

Zunächst führen wir noch eine weitere Hilfsfunktion ein und leiten einige Eigenschaften dieser Funktion her:

8.1. *Sei K ein B-lokaler differenzierbarer Gruppenkeim in kanonischen Koordinaten, und sei $v^i_j(x)$ die zugehörige Hilfsfunktion nach § 6. Setzt man*

$$w^i_j(t) = w^i_j(t;\, \xi^i) = t\, v^i_j(t\,\xi^k),$$

so gilt:

$$v^i_j(x) = w^i_j(1\,;\, x)\,; \qquad w^i_j(0;\, \xi) = 0$$

$$\frac{\delta\, w^i_j(t)}{dt} = \delta^i_j + c^i_{rs}\, \xi^r\, w^s_j(t).$$

Beweis. Es ist nur die Differentialgleichung zu beweisen. Aus dem Ergebnis **6.4** für kanonische Koordinaten

$$v^i_j(x)\, x^j = x^i$$

folgt durch Differentiation nach x:

$$x^j\, \frac{\delta\, v^i_j(x)}{\delta\, x^k} + v^i_k(x) = \delta^i_k.$$

Andererseits ergibt sich aus

$$\frac{\delta\, v^i_k}{\delta\, x^j} - \frac{\delta\, v^i_j}{\delta\, x^k} = c^i_{rs}\, v^r_j\, v^s_k$$

durch Überschieben mit x^k und nach Einsetzen der soeben durch Differentiation hergeleiteten Relation

$$x^k\, \frac{\delta\, v^i_j(x)}{\delta\, x^k} + v^i_j = \delta^i_j + c^i_{rs}\, x^r\, v^s_j.$$

Für $x^i = t\,\xi^i$ folgt daraus

$$t\,\xi^k\, \frac{\delta\, v^i_j(t\,\xi^k)}{\delta\, x^k} + v^i_j(t\,\xi^k) = \delta^i_j + t\, c^i_{rs}\, \xi^r\, v^s_j(t\,\xi^k).$$

Links steht hierin nun aber gerade die Ableitung von $w^i_j(t)$ nach t, so daß die behauptete Differentialgleichung bewiesen ist.

Wir kommen nun schließlich zum Hauptbeweis.

8.2. *Sei c^i_{jk} die Bilinearform einer B-Lie-Algebra. Wir betrachten die gewöhnliche Differentialgleichung*

$$\text{(D)} \qquad \frac{\delta w^i_j(t)}{dt} = \delta^i_j + c^i_{rs}\, \xi^r\, w^s_j \qquad \text{(für festes } \xi^r\text{)}$$

mit der Anfangsbedingung $w^i_j(0; \xi) = 0$. Die Lösung $w^i_j(t; \xi)$ dieser linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizientenoperatoren existiert für $-\infty < t < +\infty$ und ist durch die Anfangsbedingung eindeutig bestimmt. Wir setzen $w^i_j(1; x) = v^i_j(x)$. Dann gilt für diese Funktion

$$\text{(A)} \qquad v^i_j(0) = \delta^i_j$$

$$\text{(B)} \qquad \frac{\delta v^i_k}{\delta x^j} - \frac{\delta v^i_j}{\delta x^k} = c^i_{rs}\, v^r_j\, v^s_k$$

$$\text{(C)} \qquad v^i_j(x)\, x^j = x^i.$$

Beweis für (A). Wir müssen offenbar die Differentialgleichung (D) für $\xi^i = 0$ lösen. Eine Lösung ist $w^i_j(t) = \delta^i_j t$, also wegen des Eindeutigkeitssatzes die einzige. Daraus folgt sofort

$$v^i_j(0) = w^i_j(1; 0) = \delta^i_j.$$

Beweis für (C). Sei (für festes ξ^k)

$$h^i(t) = w^i_j(t; \xi)\, \xi^j - t\, \xi^i.$$

Wir wollen zeigen, daß $h^i(t) = 0$, um aus $h(1) = 0$ die Behauptung schließen zu können. Zunächst ist jedenfalls $h^i(0) = 0$ wegen des vorausgesetzten Anfangswertes für (D). Ferner ist

$$\frac{\delta h^i(t)}{dt} = (\delta^i_j + c^i_{rs}\, \xi^r\, w^s_j(t; \xi))\, \xi^j - \xi^i = c^i_{rs}\, \xi^r\, w^s_j(t; \xi)\, \xi^j = c^i_{rs}\, \xi^r h^s(t),$$

weil wegen der Schiefsymmetrie $c^i_{rs}\xi^r\xi^s = 0$. Aus dieser Differentialgleichung für $h(t)$ folgt wegen der Eindeutigkeit der Lösung und der Anfangsbedingung $h(0) = 0$ tatsächlich $h(t) = 0$.

Beweis für (**B**). Dieser Beweis benutzt dasselbe Prinzip wie der für (**C**), ist nur etwas komplizierter. Wir setzen diesmal

$$h^i_{jk}(t) = \frac{\delta w^i_k(t; x)}{\delta x^j} - \frac{\delta w^i_j(t; x)}{\delta x^k} - c^i_{rs} w^r_j(t; x)\, w^s_k(t; x)$$

und beweisen wieder $h^i_{jk}(t) = 0$. Zunächst folgt $h^i_{jk}(0) = 0$ wieder aus der Anfangsbedingung für (**D**). Zur Aufstellung einer linearen Differentialgleichung für $h^i_{jk}(t)$ differenzieren wir (**D**):

$$\frac{\delta^2 w^i_j(t; \xi)}{dt\, d\xi^k} = c^i_{ks} w^s_j(t; \xi) + c^i_{rs} \xi^r \frac{\delta w^s_j(t; \xi)}{\delta \xi^k}.$$

Verwendet man dies und (**D**) selbst, so folgt die Differentialgleichung

$$\frac{\delta h^i_{jk}}{dt} = c^i_{rs} \xi^r h^s_{jk},$$

aus der wie im Beweis für (**C**) alles folgt.

§ 9. Die eineindeutige Zuordnung zwischen B-lokalen differenzierbaren Gruppenkeimen und B-Lie-Algebren

Die Sätze **7.1** und **8.2** zusammengenommen ergeben nun das Hauptresultat:

9.1. *Zu einer B-Lie-Algebra existiert ein (und bis auf Isomorphismen nur ein) B-lokaler differenzierbarer Gruppenkeim, dessen Koordinatenraum derselbe ist wie der der B-Lie-Algebra und dessen B-Lie-Algebra gerade die vorgelegte ist.*

Beweis. In der B-Lie-Algebra konstruiert man nach § 8 zunächst die Hilfsfunktion $v^i_j(x)$, aus der man dann nach § 7 die Multiplikationsvorschrift $f^i(x; y)$ erhält. Alle diese Konstruktionen spielen sich in einer Umgebung des Nullpunktes des Banach-Raumes der Algebra ab, welcher also zugleich der Koordinatenraum des Gruppenkeims ist. Ist ein Gruppenkeim in kanonischen Koordinaten gegeben, dessen B-Lie-Algebra gerade die gegebene ist, so fällt die Multiplikationsvorschrift wegen der

Umkehrbarkeit aller vorgenommenen Operationen mit der des konstruierten Keims zusammen, die beiden sind also (in kanonischen Koordinaten) identisch.

Aus den Beweisen folgen noch zwei *Korollaria:*

9.2. *Die beschriebene Konstruktion* (**9.1**) *liefert den Gruppenkeim in kanonischen Koordinaten.*

Man bemerkt ferner, daß alle auftretenden Differentialgleichungen und somit auch ihre Lösungen analytisch sind. Daraus folgt, weil dies dann speziell für die schließlich erhaltene Funktion $f^i(x; y)$ gilt:

9.3. *Jeder dreimal differenzierbare Gruppenkeim läßt sich auf analytische Koordinaten beziehen (d. h. auf solche, in denen die Multiplikationsvorschrift f analytisch ist), und zwar kann dieses Koordinatensystem als kanonisches gewählt werden.*

Satz **9.1** führt das Studium der lokalen Eigenschaften von B-lokalen differenzierbaren Gruppenkeimen zurück auf die Untersuchung der wesentlich leichter zugänglichen B-Lie-Algebren.

§ 10. Abgeschlossene Untergruppen

In § 5 wurde bereits gezeigt, daß die Tangentialräume von differenzierbaren, differenzierbar eingebetteten Untergruppen Subalgebren der B-Lie-Algebra des Gruppenkeims sind. Wir werden jetzt auch die folgende Umkehrung beweisen:

10.1. Sei *C eine abgeschlossene Subalgebra der B-Lie-Algebra des lokal-Banachschen Gruppenkeims K. Dann gibt es genau einen differenzierbaren Untergruppenkeim, dessen Tangentialraum im Nullpunkt mit C zusammenfällt*; *dessen B-Lie-Algebra ist zu C isomorph. In kanonischen Koordinaten von K werden Umgebungen der* 0 *in C und in der Untergruppe durch die gleichen Elemente des Koordinatenraumes repräsentiert.*

Beweis. Der Beweis ergibt sich sehr einfach durch geringfügige Modifikationen der Beweise in den §§ 7 und 8. In kanonischen Koordinaten drückt sich die Voraussetzung so aus: Die Strukturbilinearform c^i_{jk} bildet $C \times C$ in C ab. Die Behauptung ist, daß dann auch $f^i(x; y)$ $C \times C$ in C abbildet (genau genommen gilt dies hier natürlich nur für eine Umgebung des Nullpunktes). Dazu zeigt man zunächst, daß die Hilfsfunktion $v^i_k(x)$ für $x \in C$ eine Abbildung von C in sich ist. Das folgt daraus, daß die Differentialgleichung (**D**) in **8.2** für $\xi \in C$ von einer Funktion $w^s_j(t; \xi)$ gelöst wird, welche für jedes Paar t, ξ eine Abbildung von C in sich ergibt; denn diese Differentialgleichung kann als Differentialgleichung in C aufgefaßt werden, weil sowohl die Anfangsbedingung in C liegt als auch die rechte Seite C in C abbildet. Sie besitzt also eine Lösung mit der gleichen Eigenschaft und diese ist wegen der Eindeutigkeit der Lösung gerade die in **8.2** erhaltene. Daran anschließend zeigt man genauso, daß aus **7.1** (**c**) folgt, daß $f^i(x; y)$ für Argumentvektoren aus C einen Bildvektor in C liefert. Damit ist gezeigt, daß die Produktbildung nicht aus C hinausführt. Da in kanonischen Koordinaten der Koordinatenvektor von x^{-1} gerade gleich $-x^k$ (x^k Koordinatenvektor von x) ist, liegt mit x auch x^{-1} in C. Aus beiden zusammen folgt die Gruppeneigenschaft von C.

§ 11. Die Differenzierbarkeit der einfachen Untergruppen

Als eine Anwendung von Satz **10.1** wollen wir die Differenzierbarkeit der topologisch einfachen, bogenweise zusammenhängenden Untergruppenkeime zeigen. Dabei heißt ein Untergruppenkeim *topologisch einfach*, wenn er abgeschlossen ist und keine abgeschlossene, nicht-trivialen Normalteiler besitzt. Ein Untergruppenkeim heißt *bogenweise zusammenhängend*, wenn er ein durch den Nullpunkt gehendes Kurvenstück enthält, welches im Nullpunkt differenzierbar ist (mit von o verschiedenem Tangentialvektor).

11.1. *Ein topologisch einfacher, bogenweise zusammenhängender Untergruppenkeim H des lokal-Banachschen differenzierbaren Gruppenkeims K ist differenzierbar und in K differenzierbar eingebettet.*

Beweis. K sei in kanonischen Koordinaten vorgelegt. Wir betrachten den linearen Raum $L(H)$ (**I. 5.2**). Da H bogenweise zusammenhängend ist, enthält H mindestens einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor. $L(H)$ ist nach **I. 5.3** invariant unter den inneren Automorphismen von H, nach **5.1** der vorliegenden Arbeit eine Subalgebra der Lie-Algebra von K. Da die Koordinaten kanonisch sind, gilt für eine geeignete Umgebung V der o in K, daß $V \frown L(H)$ (der Untergruppenkeim, der nach **10.1** zur Subalgebra $L(H)$ gehört) ein Normalteiler in H ist, der wegen der Abgeschlossenheit von H (und damit nach **I. 5.2** von $L(H)$) selbst abgeschlossen ist. Wegen der topologischen Einfachheit von H muß dieser Gruppenkeim mit dem Gruppenkeim H zusammenfallen. Nach dem Kriterium **I. 5.4** ist H differenzierbar eingebettet und ebensooft differenzierbar wie K, was zu beweisen war.

Es scheint ein tiefliegendes Problem zu sein, die Differenzierbarkeit aller abgeschlossenen (bogenweise zusammenhängenden) Untergruppenkeime H zu beweisen. Bisher ist dies nur unter speziellen Annahmen topologischer oder algebraischer Natur über H gezeigt worden, und zwar für

lokalkompakte Untergruppen (**I. 5.5**),
das Zentrum von K (**I. 5.6**),
topologisch einfache Untergruppen (**11.1**).

Immerhin folgt aus dem Beweis zu Satz **11.1** noch als Korollar:

11.2 *Ein bogenweise zusammenhängender Untergruppenkeim H enthält einen nicht nulldimensionalen differenzierbaren und in K differenzierbar eingebetteten Normalteiler, der (in kanonischen Koordinaten) durch $V \frown L(H)$ gegeben ist.*

§ 12. Die adjungierte Darstellung

Wir betrachten K wieder in kanonischen Koordinaten und wollen K durch einen Gruppenkeim von linearen Transformationen im Tangentialraum $T(o)$ stetig darstellen; die so gewonnene Darstellung nennen wir wegen der Analogie zur entsprechenden Bildung im Falle endlicher Gruppen ([13], § 52) die adjungierte Darstellung.

Zu $x \in K$ gehört ein innerer Automorphismus a_x von K:

$$a_x(z) = x z x^{-1},$$

den zugehörigen Koordinatenvektor bezeichnen wir mit $a_x^i(z)$.

12.1. *Es gilt*

$$a_x^i(z) = p_k^i(x)\, z^k, \quad p_j^i(x)\, p_k^j(y) = p_k^i(x y).$$

Dabei ist $p_k^i(x)$ eine stetige Abbildung von K in die Gruppe der Banach-Algebra der beschränkten linearen Transformationen des Koordinatenraums B. Diese Abbildung ist ein Homomorphismus, dessen Kern das Zentrum von K ist.

Beweis. Da ein innerer Automorphismus eingliedrige Untergruppen in ebensolche überführt, ist $a_x^i(z)$ in kanonischen Koordinaten homogen von erster Ordnung in z, wegen der Differenzierbarkeit für $z^k = 0$ also sogar linear:

$$a_x^i(z) = p_j^i(x)\, z^j.$$

Es gilt

$$p_k^i(xy)\, z^k = a_{xy}^i(z) = (x y z y^{-1} x^{-1})^i = \left(x\, a_y(z)\, x^{-1}\right)^i = a_x^i\left(a_y(z)\right)$$
$$= p_j^i(x)\, p_k^j(y)\, z^k,$$

woraus – da dies für jedes z^k gilt – die zweite Behauptung folgt. Die linearen Operatoren $p_j^i(x)$ liegen in der Gruppe der Banach-Algebra B_1^1, weil die Inversen existieren:

$$p_j^i(x)\, p_k^j(x^{-1}) = p_k^i(e) = \delta_k^i.$$

Die Stetigkeit des Homomorphismus folgt aus der Stetigkeit der Produktfunktion f. Daß der Kern gerade das Zentrum ist, ist selbstverständlich.

§ 13. Abgeschlossene Normalteiler und Ideale der B-Lie-Algebra

Für die in § 10 nachgewiesene eineindeutige Korrespondenz zwischen den differenzierbaren Untergruppenkeimen von K und den Subalgebren der B-Lie-Algebra soll jetzt gezeigt werden, daß Normalteiler und Ideale einander entsprechen. Dabei setzen wir Ideale stets als topologisch abgeschlossen (d. h. als Banachräume) voraus; wegen der Schiefsymmetrie können alle Ideale als zweiseitig angenommen werden.

13.1. *Notwendig und hinreichend dafür, daß eine differenzierbare, differenzierbar eingebettete Untergruppe H von K ein Normalteiler sei, ist: Die zu H gehörige Subalgebra der B-Lie-Algebra von K ist ein Ideal.*

Beweis. Wir bemerken zuvor, daß für den Tangentialvektor der Kurve

$$a g(t) a^{-1} g^{-1}(t) = h(t)$$

($g(t)$ eingliedrige Untergruppe mit Richtungsvektor ξ^i) gilt

$$\frac{\delta h^i(0)}{dt} = c^i_{jk} a^j \xi^k.$$

Dies folgt direkt aus der zweiten, mit Hilfe des Kommutators gegebenen Definition der Strukturbilinearform in § 4. – Wir setzen K wieder in kanonischen Koordinaten voraus.

Sei zunächst H ein Normalteiler, $g(t)$ eine eingliedrige Untergruppe von H, a ein beliebiges Element von K. Dann sind nach Voraussetzung $a g(t) a^{-1}$ und damit auch $h(t) = a g(t) a^{-1} g^{-1}(t)$ ganz in H gelegene Kurven. Da H in kanonischen Koordinaten durch einen abgeschlossenen linearen Unterraum repräsentiert wird, liegt auch der Tangentialvektor

$$\frac{\delta h^i(0)}{dt}$$

in diesem Raum, der zugleich der der Subalgebra zugrundeliegende Banach-Raum ist. Also:

$$c^i_{jk} a^j \xi^k \qquad \left(\xi^k = \frac{\delta g^k(0)}{dt}\right)$$

liegt in der Subalgebra, wenn ξ^k aus dieser Subalgebra und a^j beliebig gewählt ist. Damit ist die Idealeigenschaft bewiesen.

Ist umgekehrt die zu H gehörige Subalgebra ein Ideal, so enthält sie mit ξ^k auch $c^i_{jk} a^j \xi^k$ für beliebiges a. Also liegt auch der folgende Vektor η^i in der Subalgebra:

$$\eta^i = \frac{\delta\,(a g(0)\, a^{-1}\, g^{-1}(0))^i}{dt} = \frac{\delta\,(a g(0)\, a^{-1})^i}{dt} + \frac{\delta\,(g^{-1}(0))^i}{dt}$$

$$= \frac{\delta\,(a g(0)\, a^{-1})^i}{dt} - \xi^i.$$

Daher liegt (wegen der Linearität der Subalgebra) auch der Richtungsvektor ζ^i der eingliedrigen Untergruppe $a g(t)\, a^{-1}$ im Banachraum der Subalgebra; dieser Vektor ist nach dem soeben Gezeigten ja gleich $\xi^i + \eta^i$. In kanonischen Koordinaten gilt aber

$$(a g(t)\, a^{-1})^k = t \cdot \zeta^k,$$

und da die Subalgebra und H selbst in kanonischen Koordinaten durch den gleichen linearen Unterraum $L(H)$ von B beschrieben werden, folgt $a g(t) a^{-1} \in H$, wenn $g(t) \in H$, $a \in K$. H ist also Normalteiler.

13.2. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die differenzierbare, in K differenzierbar eingebettete Untergruppe H ein Normalteiler aus dem Zentrum von K sei, ist, daß für jedes ξ aus der zu H gehörigen Subalgebra gelte: $c^i_{jk}\, a^j\, \xi^k = 0$ für alle $a^j \in B$.*

Beweis. Dies ergibt sich durch geringfügige Modifikation des Beweises zu **13.1:** Im jetzt betrachteten Falle ist $h^i(t) = 0$.

Literatur

[1] G. Birkhoff, Analytical groups. Trans. Amer. Math. Soc. 43 (1938), 61–101.

[2] E. Cartan, Sur la structure des groupes infinis des transformations. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. 21 (1904) 153–206; 22 (1905) 219–308.

[3] M. Fréchet, La notion de différentielle dans l'analyse générale. Ann. Sci. Ecol. norm. sup. 42 (1925) 293–323.

[4] H. Freudenthal, Ein Aufbau der Lieschen Gruppentheorie. J.-Ber. DMV 43 (1933) 26–39.

[5] E. Hille, Functional analysis and semi-groups, New York 1948.

[6] M. Kerner, Gewöhnliche Differentialgleichungen der allgemeinen Analysis. Prace mat.-fiz. 40 (1932) 47–67.

[7] D. Laugwitz, Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen. Math. Z. 61 (1954) 100–118.

[8] D. Laugwitz, Über unendliche kontinuierliche Gruppen. I. Grundlagen der Theorie. Untergruppen. Math. Ann. 130 (1955) 337–350. (Hier auch mit I. zitiert.)

[9] S. Lie, Theorie der unendlichen Gruppen. Ber. Verh. sächs. Akad. Wiss. Leipzig. Math. nat. Kl. 43 (1891) 316–393.

[10] L. A. Ljusternik und W. I. Sobolew, Elemente der Funktionalanalysis, Berlin 1955, Kap. 6.

[11] A. D. Michal, Differentiable infinite continuous groups in abstract spaces. Revista Ci. Lima 50 (1948) 131–140.

[12] A. D. Michal und V. Elconin, Completely integrable differential equations in abstract spaces. Acta math. 68 (1937) 71–107.

[13] L. Pontrjagin, Topological groups. Princeton 1946.

[I.] Siehe [8].

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1956

Band/Volume: 1956

Autor(en)/Author(s): Laugwitz Detlef

Artikel/Article: Unendliche kontinuierliche Gruppen. Strukturtheorie lokal-Banachscher Gruppen 261-286