BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Der Einfluß einer Flächentransformation auf die geodätischen Krümmungen

Von **Frank Löbell** in München

Vorgelegt am 5. Juli 1957

Bei verschiedenen Gelegenheiten wurden schon in früherer Zeit die Änderungen berechnet, die die inneren Krümmungselemente einer Fläche erleiden, wenn diese auf eine andere Fläche abgebildet wird.[1] Im folgenden möge diese Frage unter den Gesichtspunkten der natürlichen Differentialgeometrie behandelt werden; dieses Verfahren hat den Vorzug, daß in allen Stadien der Entwicklung nur Größen von unmittelbar geometrischer Bedeutung auftreten.

1. Es sei $\mathfrak{F}$ ein gegebenes reelles Flächenstück im euklidischen Raum, dessen Punkten P die Punkte $\bar{P}$ eines anderen gegebenen reellen Flächenstücks $\bar{\mathfrak{F}}$ nach einem gegebenen Gesetz umkehrbar eindeutig zugeordnet seien. Es ist bekannt, daß unter der Voraussetzung ausreichender Stetigkeits- und Differenzierbarkeitseigenschaften bei allen vorkommenden Funktionen, auch bei den das Abbildungsgesetz bestimmenden, auf $\mathfrak{F}$ immer ein reelles *orthogonales Liniennetz* vorhanden ist, dem *vermöge der Abbildung* auch auf $\bar{\mathfrak{F}}$ ein reelles orthogonales Netz entspricht; und zwar gibt es genau ein Paar derartiger „*Hauptnetze*", wenn die Abbildung nicht winkeltreu ist, sonst unendlich viele. Man wird erwarten, daß es günstig sein wird, solche Netze als Bezugsnetze auf den beiden Flächen zugrunde zu legen.

[1] Es seien nur die folgenden Arbeiten aus neuerer Zeit zitiert: Antonio Marussi, Sulla curvatura tangenziale delle trasformate di curve nelle rappresentazioni affini fra superficie. Rendiconti dell'Accademia Nazionale dei Lincei, Classe di Scienze fisiche, matematiche e naturali. 1954, p. 478–483. Massimo Mineo, Sulla variazione della curvatura geodetica d'una curva nella rappresentazione d'una superficie su di un'altra. Le Matematiche. Catania, XI, 1956. Corradino Mineo, Geodesia intrinseca e proprietà generali delle rappresentazioni cartografiche. Rend. Acc. Naz. Lincei., Cl. Sc. fis. mat. nat., 1955, p. 572 segu., 1956, p. 553 segu.

Alle Größen, die sich auf eine der Scharen der Netzlinien oder auf die ihr entsprechende beziehen, seien durch den Index 1 gekennzeichnet, die auf die anderen Netzlinienscharen bezüglichen durch den Index 2; entsprechende Bogenelemente seien mit ds und $d\bar{s}$, geodätische Krümmungen mit g und $\bar{g}$, Richtungswinkel von Tangenten, die von den durch die erste Schar von Netzkurven festgelegten Richtungen aus im positiven Drehsinn der Berührebenen gerechnet seien, mit φ und $\bar{\varphi}$ bezeichnet.

2. Es sei daran erinnert, daß der *lineare Maßstab* der Abbildung im Punkte P für die Richtung φ

$$m = \frac{d\bar{s}}{ds}$$

mit den „*Hauptmaßstäben*" $m_1 \neq 0$ und $m_2 \neq 0$ für die „*Hauptrichtungen*" $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{2}$ in der Beziehung steht

$$m^2 = m_1^2 \cos^2\varphi + m_2^2 \sin^2\varphi \tag{1}$$

und daß für einander *entsprechende Richtungswinkel* gilt

$$\operatorname{tg}\bar{\varphi} = \frac{m_2}{m_1} \operatorname{tg}\varphi. \tag{2}$$

Im folgenden seien m_1 und m_2 als positive Zahlen angenommen, was durch passende Orientierung der Netzlinien immer zu erreichen ist, ebenso m.

Die *geodätische Krümmung* einer Flächenkurve mit der Bogenlänge s, die die Netzlinien der ersten Schar unter dem Winkel $\varphi(s)$ überquert, ist nach Bonnet und Liouville

$$g = g_1 \cos\varphi + g_2 \sin\varphi + \frac{d\varphi}{ds}. \tag{3}$$

3. Für die Lösung der am Anfang gestellten Aufgabe kommt es also darauf an, in dem (3) entsprechenden Ausdruck für die geodätische Krümmung der Bildkurve

$$\bar{g} = \bar{g}_1 \cos\bar{\varphi} + \bar{g}_2 \sin\bar{\varphi} + \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}} \tag{3'}$$

die Größen $\bar{g}_1$, $\bar{g}_2$, $\bar{\varphi}$ und $d\bar{s}$ durch die für die Originalkurve charakteristischen Größen auszudrücken.

Aus (2) folgt nun in Verbindung mit (1)

$$(2') \qquad \cos\bar{\varphi} = \frac{m_1}{m}\cos\varphi, \quad \sin\bar{\varphi} = \frac{m_2}{m}\sin\varphi,$$

ferner

$$\frac{d\bar{\varphi}}{\cos^2\bar{\varphi}} = \frac{m_2}{m_1}\frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} + \operatorname{tg}\varphi\, d\left(\frac{m_2}{m_1}\right)$$

oder

$$d\bar{\varphi} = \frac{m_1 m_2}{m^2}\, d\varphi + \frac{m_1\, d m_2 - m_2\, d m_1}{m^2}\cos\varphi\sin\varphi,$$

mithin wegen $m = d\bar{s}/ds$

$$(4) \qquad \frac{d\bar{\varphi}}{d\bar{s}} = \frac{m_1 m_2}{m^3}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{m_1\frac{d m_2}{ds} - m_2\frac{d m_1}{ds}}{m^3}\cos\varphi\sin\varphi.$$

Die hier auftretende Größe $m_1 \cdot m_2$ ist der *Flächenmaßstab* der Abbildung an der Stelle P.

Um noch $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$ durch Funktionen, die auf der Originalfläche definiert sind, auszudrücken, mögen die metrischen Grundformen beider Flächen herangezogen werden, die für die Hauptlinien als Koordinatenlinien $v = \text{const}$, $u = \text{const}$ gelten, wobei je zwei einander entsprechende Punkte P und $\bar{P}$ gleiche Koordinaten $u = \bar{u}$ und $v = \bar{v}$ haben sollen.

Wenn

$$(5) \qquad ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2 \quad \text{und} \quad d\bar{s}^2 = \bar{E}\,du^2 + \bar{G}\,dv^2$$

ist, gilt bekanntlich

$$(6) \qquad g_1 = -\frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = -\frac{\partial\ln\sqrt{E}}{\partial s_2}$$

und

$$g_2 = \frac{1}{\sqrt{EG}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u} = \frac{\partial\ln\sqrt{G}}{\partial s_1}$$

und das Analoge für $\bar{g}_1$ und $\bar{g}_2$; da nun

$$(7) \qquad \bar{E} = m_1^2 E, \quad \bar{G} = m_2^2 G$$

ist, finden wir

$$(8)\qquad \begin{aligned} \bar{g}_1 &= -\frac{\partial \ln (m_1 \sqrt{E})}{m_2 \partial s_2} = \frac{1}{m_2} g_1 - \frac{1}{m_1 m_2} \frac{\partial m_1}{\partial s_2}, \\ \bar{g}_2 &= \frac{\partial \ln (m_2 \sqrt{G})}{m_1 \partial s_1} = \frac{1}{m_1} g_2 + \frac{1}{m_1 m_2} \frac{\partial m_2}{\partial s_1}. \end{aligned}$$

Aus (3′), (2′), (4) und (8) ergibt sich nun

$$\bar{g} = \frac{1}{m}\left(\frac{m_1}{m_2} g_1 - \frac{1}{m_2}\frac{\partial m_1}{\partial s_2}\right)\cos\varphi + \frac{1}{m}\left(\frac{m_2}{m_1} g_2 + \frac{1}{m_1}\frac{\partial m_2}{\partial s_1}\right)\sin\varphi$$
$$+ \frac{m_1 m_2}{m^3}\frac{d\varphi}{ds} + \frac{1}{m^3}\left(m_1 \frac{d m_2}{ds} - m_2 \frac{d m_1}{ds}\right)\cos\varphi \sin\varphi.$$

Eliminieren wir hieraus noch $\frac{d\varphi}{ds}$ mit Hilfe von (3), so erhalten wir schließlich

$$\bar{g} = \frac{m_1 m_2}{m^3} g + \frac{m_1 m_2}{m}\left(\left(\frac{1}{m_2^2} - \frac{1}{m^2}\right) g_1 \cos\varphi + \left(\frac{1}{m_1^2} - \frac{1}{m^2}\right) g_2 \sin\varphi\right)$$
$$- \frac{1}{m m_2}\frac{\partial m_1}{\partial s_2}\cos\varphi + \frac{1}{m m_1}\frac{\partial m_2}{\partial s_1}\sin\varphi$$
$$+ \frac{1}{m^3}\left(m_1 \frac{d m_2}{ds} - m_2 \frac{d m_1}{ds}\right)\cos\varphi\sin\varphi.$$

Wenn damit auch unser anfangs gestecktes Ziel erreicht ist, so wäre doch zu wünschen, daß die Abhängigkeit des auf das erste Glied der rechten Seite folgenden Ausdrucks, der ersichtlich eine *Funktion des Linienelementes* (P, φ) der Fläche $\mathfrak{F}$ ist, vom Winkel φ noch deutlicher in Erscheinung träte. Um das zu erreichen, ersetzen wir, außer im Nenner m^3, gemäß (1) m durch m_1, m_2, $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, ferner die Ableitungen der Hauptmaßstäbe nach s gemäß der Beziehung

$$(9)\qquad \frac{d}{ds} = \cos\varphi \frac{\partial}{\partial s_1} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial s_2}$$

durch ihre partiellen Ableitungen nach s_1 und s_2; da nach (1)

$$m^2 - m_1^2 = (m_2^2 - m_1^2)\sin^2\varphi,$$
$$m^2 - m_2^2 = (m_1^2 - m_2^2)\cos^2\varphi$$

ist, finden wir, wenn wir zur Abkürzung $\frac{\partial m_i}{\partial s_k} = m_{ik}$ setzen:

$$\bar{g} = (m_1 m_2 g + \Phi) : m^3 \tag{10}$$

mit

$$\Phi = \tag{10'}$$

$$\frac{m_1}{m_2}\left((m_1^2 - m_2^2) g_1 - m_1 m_{12}\right) \cos^3\varphi + \frac{m_2}{m_1}\left((m_2^2 - m_1^2) g_2 + m_2 m_{21}\right) \sin^3\varphi$$

$$+ (2 m_1 m_{21} - m_2 m_{11}) \cos^2\varphi \sin\varphi - (2 m_2 m_{12} - m_1 m_{22}) \cos\varphi \sin^2\varphi.$$

4. Da Φ, wie man erkennt, vom Werte von g unabhängig ist, so gilt nach (10) für die *Differenzen Δg und $\Delta \bar{g}$ der geodätischen Krümmungen* zweier sich in P berührender Kurven auf $\mathfrak{F}$ und ihrer Bildkurven in $\bar{P}$:

$$\Delta \bar{g} = \frac{m_1 m_2}{m^3} \Delta g. \tag{11}$$

5. Wie wir sehen, ist Φ eine *kubische Form* in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$, deren Koeffizienten als rationale Funktionen der geodätischen Krümmungen der Netzlinien sowie der Hauptmaßstäbe und ihrer partiellen Ableitungen nach den Bogenlängen der Hauptlinien reine Ortsfunktionen auf $\mathfrak{F}$ sind. Es gibt demnach in jedem Punkt P, wenn Φ nicht identisch in φ verschwindet, im allgemeinen drei Werte von $\operatorname{tg}\varphi$, für die $\Phi = 0$ wird, d. h. drei Flächentangenten von der Art, daß die sie berührenden geodätischen Linien, längs denen ja $g \equiv 0$ ist, Bildkurven besitzen, die an der Stelle $\bar{P}$ ebenfalls verschwindende geodätische Krümmung $\bar{g} = 0$ haben. Von diesen Tangenten ist gewiß eine reell.[2]

6. Solange nur reelle Richtungen betrachtet werden, kann in (10) der Nenner m^3 nicht verschwinden. Sobald aber auch die imaginären Richtungen berücksichtigt werden sollen, für die $\Phi = 0$ wird, ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß Φ durch

---

[2] Zusatz bei der Korrektur:
Herr Robert Sauer hat in einer noch nicht veröffentlichten Arbeit die Differentialgleichung 2. O. der Kurven aufgestellt, die sich unter Erhaltung ihrer geodätischen Krümmungen transformieren, und ihre Lösungsmöglichkeiten diskutiert.

$m^2 = m_1^2 \cos^2 \varphi + m_2^2 \sin^2 \varphi$ teilbar ist; dann wird $\Phi : m^3$ genau für eine, durch die reelle Nullstelle dieser Funktion bestimmte Richtung φ null.

Dieser Fall tritt sicher ein, wenn die Abbildung $\mathfrak{F} \to \bar{\mathfrak{F}}$ in allen Punkten einer Umgebung von P konform ist, wobei daran erinnert werden muß, daß es keinen Richtungswinkel gibt, der eine isotrope Richtung festlegt, sondern nur ein dies leistendes Steigungsmaß $\pm i$, das nur für nicht isotrope Richtungen durch den Wert von $\operatorname{tg} \varphi$ gegeben ist; da für Winkeltreue das Bestehen der Gleichungen $m_1 = m_2 = m$ kennzeichnend ist, so gilt dann nämlich nach (10′)

$$\Phi = -m \frac{\partial m}{\partial s_2} \cos^3 \varphi + m \frac{\partial m}{\partial s_1} \sin^3 \varphi + m \frac{\partial m}{\partial s_1} \cos^2 \varphi \sin \varphi -$$

$$- m \frac{\partial m}{\partial s_2} \cos \varphi \sin^2 \varphi = -m \frac{\partial m}{\partial s_2} \cos \varphi + m \frac{\partial m}{\partial s_1} \sin \varphi .$$

Wird die Ableitung nach der Bogenlänge in der Richtung, die aus der der Kurve in P durch Drehen um $\frac{\pi}{2}$ im positiven Sinn in der Berührebene hervorgeht, mit $\frac{\partial}{\partial s^*}$ bezeichnet, so ist also nach (9), wenn dort $\varphi + \frac{\pi}{2}$ statt φ gesetzt wird, bei Vorliegen von *Winkeltreue* $\Phi = -m \frac{\partial m}{\partial s^*}$, folglich[3]

$$\bar{g} = \frac{1}{m} \left(g - \frac{\partial \ln m}{\partial s^*} \right) . \tag{12}$$

Φ verschwindet hier also nur in der Normalenrichtung der durch P gehenden Niveaulinie der Ortsfunktion m.

Allgemein ist ersichtlich die Bedingung dafür, daß Φ durch $m_1^2 \cos^2 \varphi + m_2^2 \sin^2 \varphi$ teilbar sei, nach (10′) das Bestehen der beiden Gleichungen

$$\frac{m_1}{m_2} (m_1^2 - m_2^2) \, g_1 - \frac{m_1^2}{m_2} m_{12} = - \frac{m_1^2}{m_2^2} (2 \, m_2 \, m_{12} - m_1 \, m_{22})$$

---

[3] Ch. M. Schols, La courbure de la projection de la ligne géodésique. Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft. 1886. Vgl. L. Driencourt et J. Laborde, Traité des projections des cartes géographiques. IV. Paris 1932.

und

$$\frac{m_2}{m_1}(m_2^2 - m_1^2)\, g_2 + \frac{m_2^2}{m_1}\, m_{21} = \frac{m_2^2}{m_1^2}(2\, m_1\, m_{21} - m_2\, m_{11})$$

oder

$$(13)\qquad \frac{m_1^2 - m_2^2}{m_1 m_2}\, g_1 + \frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{m_2^2 - m_1^2}{m_1 m_2}\, g_2 + \frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{m_2}{m_1}\right) = 0.$$

$\Phi : m^2$ ist jetzt eine *Linienelementfunktion mit linearem Verteilungsgesetz*, die nicht mehr von den geodätischen Krümmungen der Netzlinien abhängt:

$$(13')\qquad \Phi : m^2 = \frac{m_1\, m_{22} - 2\, m_2\, m_{12}}{m_2^2} \cos\varphi + \frac{2\, m_1\, m_{21} - m_2\, m_{11}}{m_1^2} \sin\varphi.$$

Es ist unmittelbar zu erkennen, daß das Paar der Gleichungen (13) im Falle der Winkeltreue für alle Werte von g_1 und g_2 in trivialer Weise erfüllt ist.

7. Wir bemerken, daß $\Phi : m^3$ der Wert der geodätischen Krümmung des Bildes einer geodätischen Linie ist; denn für $g = 0$ wird nach (10) $\bar{g} = \Phi : m^3$.

Wenn es sich um den von Dini vollständig behandelten Fall eines Paares von Flächen $\mathfrak{F}$ und $\bar{\mathfrak{F}}$ handelt, die so aufeinander abgebildet sind, daß jeder geodätischen Linie der einen eine Geodätische auf der andern entspricht, so muß also für alle Werte von φ

$$(14\text{a})\qquad \Phi = 0$$

sein, und es gilt dann

$$(14\text{b})\qquad \bar{g} = \frac{m_1 m_2}{m^3}\, g;$$

das identische *Verschwinden der vier Koeffizienten von Φ in* (10′) ist sonach die notwendige und hinreichende Bedingung für das Bestehen einer *geodätischen Abbildung*. Daß auch in diesem Fall die beiden Gleichungen (13) erfüllt sind, ergibt sich aus ihrer Herleitung.

8. *Flächentreue* der Abbildung, die durch Konstanz des Priduktes $m_1 m_2$ gekennzeichnet ist, führt nur insofern eine kleine Vereinfachung herbei, als

$$m_1 \, d m_2 + m_2 \, d m_1 = 0$$

oder

$$m_1 m_{21} + m_2 m_{11} = m_1 m_{22} + m_2 m_{12} = 0 \tag{15}$$

wird.

9. Daß alle Fälle, die bezüglich der Realität der die Funktion Φ zum Verschwinden bringenden Richtungen φ zur Sprache gebracht wurden, wirklich vorkommen, kann schon am *Beispiel* der verschiedenen möglichen „echten Zylinderprojektionen" der Erdkugel gezeigt werden; die Abbildungsgleichungen für diese Art von Kartenentwürfen sind, wenn λ und β die geographische Länge und Breite eines Punktes P der Kugel, x und y die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten des Punktes $\overline{P}$ der Kartenebene bezeichnen,

$$x = \lambda, \quad y = f(\beta),$$

wobei die Funktion $f(\beta)$ den speziellen Charakter des Entwurfes bestimmt. Es handelt sich bei den beiden Koordinatennetzen schon um die Hauptnetze, und es wird, wenn der Kugelradius $= 1$ angenommen wird,

$$g_1 = \operatorname{tg} \beta, \quad g_2 = 0, \quad m_1 = 1/\cos \beta, \quad m_2 = f'(\beta),$$
$$d s_1 = \cos \beta \, d \lambda, \quad d s_2 = d \beta.$$

Es darf dem Leser überlassen werden, folgende Tatsachen durch Rechnung zu bestätigen:

Im Falle der Plattkarte $(f(\beta) = \beta)$ und des flächentreuen Archimedischen Entwurfs $(f(\beta) = \sin \beta)$ gibt es einen reellen und zwei konjugiert imaginäre Richtungswinkel, für die $\Phi = 0$ wird.

Das Abbildungsgesetz $f(\beta) = \frac{1}{2} \sin \beta / \cos^2 \beta + \frac{1}{2} \ln \operatorname{tg} \left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ bietet ein Beispiel, in dem Φ für drei verschiedene reelle Richtungen $\varphi = \frac{\pi}{2}$ und $\varphi = \pm \frac{\pi}{4}$ verschwindet.

Liegt die Mercatorprojektion $\left(f(\beta) = \ln \operatorname{tg}\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right)$ vor, so bestätigt sich die allgemein für konforme Abbildungen nachgewiesene Tatsache, daß Φ eine Linearform in $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$ ist.

Den Fall, daß Φ den Faktor $m_1^2 \cos^2\varphi + m_2^2 \sin^2\varphi$ enthält, bekommt man allgemein, wenn man die Funktion $f(\beta)$ so wählt, daß sie der Differentialgleichung

$$f'' = 2f' \operatorname{tg}\beta - f'^3 \cos\beta \sin\beta$$

genügt; das partikuläre Integral $f'(\beta) = 1/\cos\beta$ führt zur Mercatorkarte, das partikuläre Integral $f'(\beta) = 1/\cos\beta \sqrt{1 + \cos^2\beta}$ zu einer durch die Funktion $y = \ln(\operatorname{tg}\beta + \sqrt{1 + 1/\cos^2\beta})$ vermittelten Abbildung, die nicht konform ist, bei der aber in jedem Punkt Φ nur für einen, natürlich reellen Azimut verschwindet.

Das Gesetz $f(\beta) = \operatorname{tg}\beta$ (Zentralprojektion der Kugel aus dem Mittelpunkt auf den längs des Äquators berührenden Zylinder und darauf folgende Abwicklung des Zylinders) liegt einer Abbildung zugrunde, bei der in jedem Punkt die drei Φ zum Verschwinden bringenden Richtungswinkel zusammenfallen mit $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

Bei allen bisher genannten Kartenbeispielen verschwindet Φ längs des Äquators identisch: alle Orthodromen, d. s. die Bilder der Kugelgroßkreise, haben dort Wendepunkte.

Schließlich bietet die Abbildungsfunktion $f(\beta) = \beta + \beta^2$ ein Beispiel dafür, daß in gewissen Punkten, nämlich denen des Äquators, Φ in drei reellen Richtungen, von denen zwei zusammenfallen, null wird.

Zum Schluß sei bemerkt, daß sich aus dem Bonnetschen Ausdruck für das Gaußsche Krümmungsmaß

$$K = \frac{\partial g_1}{\partial s_2} - \frac{\partial g_2}{\partial s_1} - g_1^2 - g_2^2$$

mit Hilfe der gewonnenen Ergebnisse auch die durch eine Flächentransformation verursachte Änderung von K berechnen läßt. Besonders einfach gestaltet sich diese, wenn die Transformation winkeltreu ist: Wird $m = e^{\mu}$ gesetzt, so ergibt sich die bekannte Beziehung

$$\bar{K} = e^{-2\mu} (K - \mathfrak{D}^2 \mu),$$

wo $\mathfrak{D}^2$ den zweiten Beltramischen Differentialparameter bedeutet.