BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Integrale über Funktionen aus multiplikativen Klassen

Von **Hans-Wilhelm Knobloch** in Würzburg

Vorgelegt von Herrn Oskar Perron am 7. Juni 1957

Mit einer Abbildung

Herrn Professor Dr. Robert König in Verehrung gewidmet

Übersicht

Einleitung 25

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen 28

§ 2. Der Faktormodul $\Delta^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{b})}/M(v\,dx, \mathfrak{g})$ 34

§ 3. Multiplikative Klassen und ihre Untermoduln 40

§ 4. Differentialsysteme 42

§ 5. Konstruktion von Fundamentalwegen und komplementären Wegen im Spezialfall 45

§ 6. Hilfssätze 49

§ 7. Der komplementäre Klassenmodul. Periodenrelationen 52

§ 8. Das Orthogonalitätstheorem 58

§ 9. Beispiel: Die Laplacesche Differentialgleichung 60

Schlußbemerkung 63

Literaturverzeichnis 64

Einleitung

Eine Reihe verschiedenartiger Integraltransformationen, die wohlbekannt und von Wichtigkeit für die klassische Analysis geworden sind, lassen sich unter folgendem gemeinsamen Gesichtspunkt betrachten: Die analytische Schreibweise

$$T(u) = \int_{\mathfrak{C}} K(x, u)\, t(x)\, dx \tag{1}$$

einer solchen Transformation erfolgt mittels eines Kernes K, dessen partielle logarithmische Ableitung

$$\frac{\frac{\partial K}{\partial x}}{K}$$

in x rational ist. Solche Funktionen wollen wir im folgenden der Kürze halber multiplikativ nennen, auch wenn (was man üblicherweise bei Verleihung des Namens ausschließt) K als Funktion von x (bei festem u) Unbestimmtheitsstellen besitzt. Letztere werden durch lokale Entwicklungen der Form

$$K = \begin{cases} (x - \eta)^a \exp\left(\frac{c_\nu}{(x-\eta)^\nu} + \dots\right) \\ x^a \exp(c_\nu x^\nu + \dots) \end{cases}$$

charakterisiert und von uns daher auch als exponentielle Singularitäten bezeichnet.

Die nachstehenden Ausführungen enthalten im weiteren Sinne Beiträge zur Funktionalanalysis der Integraltransformationen mit multiplikativem Kern. Ihr Programm ist in früheren Arbeiten (König [5], König-H. Schmidt [6], H. Schmidt [10], Röhrl [7]–[9]) herausgebildet worden und lautet in groben Zügen etwa so: Widerspiegelung arithmetischer Eigenschaften von multiplikativen Klassen in Eigenschaften ihrer Perioden.

Wir gehen darum anders vor, als dies in der Funktionalanalysis sonst üblich ist: Die Oberfunktion t in (1) wird $= 1$ gesetzt, Kern und Integrationsweg variieren dagegen in wohlbestimmter Weise, und zwar durchläuft K die Elemente Vr einer multiplikativen Klasse $\mathfrak{K}$ (Definition in § 3) und $\mathfrak{C}$ die bez. $\mathfrak{K}$ geschlossenen Wege, für die also

$$\int_{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial x}(Vr)\, dx = 0 \tag{2}$$

gilt für jedes $Vr \in \mathfrak{K}$.

Diese Integralgesamtheit überblickt man, wie im Falle der algebraischen Funktionen, wenn man die endlich vielen Fundamentalperioden kennt.

Die Hauptpfeiler des König-Schmidt-Röhrlschen Aufbaues sind

der Reduktionssatz,
der Vollständigkeitssatz,
das Orthogonalitätstheorem.

Der erste legt die Maximalzahl ableitungsunabhängiger Funktionen einer multiplikativen Klasse und damit eine obere Grenze N für die Anzahl der Fundamentalwege fest (§ 2). Der zweite sagt aus, daß es N Fundamentalwege gibt, derart, daß die zugehörige Periodenmatrix nicht-verschwindende Determinante besitzt (§ 7). Sofern die Perioden in Abhängigkeit von u einem Differentialsystem genügen, enthalten sie daher ein Fundamentalsystem an Lösungen. Aus diesem Grunde sprechen wir vom Vollständigkeitssatz. Das Orthogonalitätstheorem (§ 8) schließlich verknüpft bilinear die Perioden für je ein Paar zueinander komplementärer Klassen.

Am Beginn unserer Ausführungen deuten wir den Reduktionssatz als Aussage über gewisse Untermoduln aus Differentialen eines rationalen Funktionenkörpers und beweisen ihn dann – für einen beliebigen Grundkörper der Charakteristik 0 – im Rahmen der von willkürlichen Festsetzungen freien Arithmetik des rationalen Funktionenkörpers, wie man sie etwa in Hasse [3] formuliert findet. Die Auszeichnung des unendlichfernen Punktes und die dann notwendigen Ausnahmebetrachtungen in [7]–[10] werden auf diese Weise hinfällig. Vor allem aber gewinnen wir gegenüber den früheren Arbeiten größere Beweglichkeit in der Auswahl von Klassenbasen (im Sinne der Ableitungsunabhängigkeit), was auch der Verwertbarkeit unserer Resultate für die explizite Integration vorgelegter Differentialgleichungen zugute kommen dürfte (siehe § 9).

Gleichzeitig aber erweitern wir die bereits vorliegenden Begriffe und Aussagen in einer Weise, wie sie in der Königschen Arithmetik nicht vorgebildet ist. Wir lassen nämlich im Reduktionssatz an Stelle der Ableitungen aller Elemente der Klasse die Menge der Ableitungen eines Unterideals treten, welches aus den Vielfachen eines ganzen Divisors $\mathfrak{g}$ besteht. Es braucht dann (2) nur noch für solche Vr zu gelten, welche in den Punkten eines

Divisors $\mathfrak{g}$ verschwinden, um $\mathfrak{C}$ den Charakter eines geschlossenen Weges zu geben. Ein offener Weg ist demnach Periodenweg für geeignete Ideale (z. B. für die Gesamtheit der Klassenfunktionen, welche im Anfangs- und Endpunkt verschwinden). Dieser allgemeinere Periodenbegriff gibt unserer Darstellung gegenüber früheren ein wesentlich neues Gesicht, führt zu stärkerer Algebraisierung und Entlastung von schwierigen geometrischen Diskussionen.

Der sachliche Gewinn liegt vor allem darin, daß nun erst die Definition der komplementären Klasse und die Formulierung des Orthogonalitätstheoremes ausnahmslos möglich wird. Letzteres erscheint überdies als eine universelle Quelle für eine Reihe von Funktionalbeziehungen, die vom Ergänzungssatz der Γ-Funktion bis zu einer Sorte von Identitäten reicht, die anscheinend bisher nur in sehr einfachen Spezialfällen in der Literatur aufgeführt worden sind, zu denen z. B. die Darstellung

$$Q(\lambda, z) = \frac{e^{-\lambda}\,\lambda^{z}\,\Gamma(z)}{2\pi i} \int\limits_{W} \frac{e^{u}\,u^{-z}}{u-\lambda}\,du$$

für eine der unvollständigen Γ-Funktionen gehört (Böhmer [2], V, Nr. 5, (30)).

Über die Auswertung des Orthogonalitätstheoremes, insbesondere im Hinblick auf allgemeinere funktionalanalytische Probleme, soll bei späterer Gelegenheit berichtet werden.

Schließlich zeigen wir am Beispiel der Laplaceschen Differentialgleichung (Differentialgleichung mit linearen Koeffizienten), daß sich auch Dinge, die im großen und ganzen längst bekannt sind, im Lichte unserer Resultate vereinheitlichen und abrunden lassen.

§ 1. Vorbereitende Betrachtungen

In den beiden ersten Paragraphen legen wir die Grundlagen für den Reduktionssatz und beschäftigen uns mit Funktionen und Differentialen eines rationalen Funktionenkörpers K/Ω in einer Unbestimmten über einem Konstantenkörper Ω der Charakteristik 0.

Wir bedienen uns dabei folgender Bezeichnungen und Festsetzungen. Für Divisoren von K/Ω schreiben wir kleine deutsche Buchstaben, für Primdivisoren speziell ein $\mathfrak{p}$, die zugehörigen additiven Bewertungsfunktionen von K/Ω bezeichnen wir mit $w_{\mathfrak{p}}$.

Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\,\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor, so sagen wir, $\mathfrak{a}$ ist durch $\mathfrak{b}$ teilbar, und schreiben dafür kurz $\mathfrak{b} \mid \mathfrak{a}$. Unter dem Grad $f_{\mathfrak{p}}$ eines Primdivisors verstehen wir den Grad seines Restklassenkörpers bezügl. Ω, unter dem Grad eines zusammengesetzten Divisors $\mathfrak{a} = \Pi\, \mathfrak{p}^{\mu_{\mathfrak{p}}}$ die ganze Zahl $f_{\mathfrak{a}} = \sum \mu_{\mathfrak{p}} f_{\mathfrak{p}}$. Verschiedentlich zeichnen wir unter den Primdivisoren ersten Grades einen aus und geben ihm abweichend den Buchstaben $\mathfrak{x}$ statt $\mathfrak{p}$. Durch die Forderungen

$$w_{\mathfrak{x}}(x) = -1,\quad w_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0 \qquad \text{für } \mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$$

werden dann primitive Elemente x von K/Ω festgelegt.

Es sei nun $\mathfrak{s} \neq \mathbf{1}$ ein ganzer Divisor. Mit $K^{(\mathfrak{s})}$ bezeichnen wir den Ring aller Funktionen, mit $\Delta^{(\mathfrak{s})}$ die Menge der Differentiale von K, welche für sämtliche $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}$ ganz sind. Die in $\Delta^{(\mathfrak{s})}$ enthaltenen Differentiale der Form $\frac{dr}{r}$, $r \in K$, bilden eine additive Untergruppe $E^{(\mathfrak{s})}$, die sich leicht kennzeichnen läßt: $\frac{dr}{r}$ gehört zu $E^{(\mathfrak{s})}$ genau dann, wenn r eine Einheit von $K^{(\mathfrak{s})}$ ist. Dies ergibt sich sofort aus nachstehender Feststellung, deren Richtigkeit auf der Hand liegt:

(1.1) $\frac{dr}{r}$ ist dann und nur dann ganz für einen Primdivisor $\mathfrak{p}$, falls $w_{\mathfrak{p}}(r) = 0$ ist.

Und $w_{\mathfrak{p}}(r) = 0$ für alle $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}$ besagt offenbar, daß r Einheit von $K^{(\mathfrak{s})}$ ist (was wir dadurch zum Ausdruck bringen wollen, daß wir gelegentlich e statt r schreiben).

Aus einer Restklasse $\Phi \neq E^{(\mathfrak{s})}$ von $\Delta^{(\mathfrak{s})}/E^{(\mathfrak{s})}$ wählen wir einen Vertreter $v dx$ aus und ordnen jedem $r \in K^{(\mathfrak{s})}$ das Differential

$$v r\, dx + dr \tag{1.2}$$

in $\Delta^{(\mathfrak{s})}$ zu.[1] Dies ist eine umkehrbar-eindeutige Abbildung. Aus

$$vr\,dx + dr = 0$$

folgt nämlich $r = 0$, andernfalls wäre

$$v\,dx = -\frac{dr}{r} \in E^{(\mathfrak{s})}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung $\Phi \neq E^{(\mathfrak{s})}$.

Tragen wir für r alle Funktionen aus $K^{(\mathfrak{s})}$ ein, welche $\equiv 0 \bmod \mathfrak{g}$ sind ($\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor), so erhalten wir in der Gesamtheit der Differentiale (1.2) einen Untermodul von $\Delta^{(\mathfrak{s})}$, den wir mit $M\,(v\,dx,\ \mathfrak{g})$ bezeichnen wollen. In gewissem Sinne hängt er nur von der Restklasse Φ, nicht aber vom Vertreter vdx ab. Wegen

$$\left(v\,dx + \frac{de}{e}\right) r + dr = \frac{1}{e}\left\{v\,(er)\,dx + d\,(er)\right\}$$

ist nämlich

$$\frac{1}{e}\,M\,(v\,dx,\ \mathfrak{g}) = M\left(v\,dx + \frac{de}{e},\ \mathfrak{g}\right),$$

denn $e \cdot r$ durchläuft mit r sämtliche Vielfache von $\mathfrak{g}$. Wechsel im Restklassenvertreter bedeutet also Multiplikation von M mit einer festen Einheit $\in K^{(\mathfrak{s})}$.

Wir denken uns im folgenden neben $\mathfrak{s}$, Φ auch $\mathfrak{g}$ fest gewählt und verlangen von letzterem nicht nur, daß er ganz, sondern auch, daß er quadratfrei ist. $\mathfrak{s}$ und Φ legen einen weiteren ganzen quadratfreien Divisor $\mathfrak{b}$ fest, welcher Teiler von $\mathfrak{s}$ sein soll und im Einzelnen wie folgt definiert wird:

$\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$, wenn es zu einem (und damit zu jedem) Vertreter $v\,dx \in \Phi$ eine rationale Funktion $r \in K$ gibt, derart daß

$$w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx - \frac{dr}{r}\right) \geq 0 \tag{1.3}$$

ist, oder, was offenbar auf das gleiche hinausläuft, wenn es eine ganze Zahl $\lambda_{\mathfrak{p}}$ gibt, derart daß

$$w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx - \lambda_{\mathfrak{p}}\frac{dp}{p}\right) \geq 0 \tag{1.3'}$$

---

[1] Welches Ziel wir mit diesen Betrachtungen verfolgen, wird im § 3 verständlich.

ist, wobei $p \in K$ ein lokales Primelement zu $\mathfrak{g}$ vorstellt. $\lambda_\mathfrak{p}$ liegt dabei eindeutig und unabhängig von p fest.

Nicht jeder Primteiler von $\mathfrak{s}$ kann auch in $\mathfrak{b}$ aufgehen. Um dies einzusehen, wählen wir für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$ ein Primelement p mit dem Bewertungsverhalten $w_\mathfrak{p}(p) = 1$, $w_{\mathfrak{p}'}(p) = 0$ für $\mathfrak{p}' \neq \mathfrak{p}, \mathfrak{x}$ ($\mathfrak{x}$ = Primdivisor ersten Grades). – Aus (1.3) folgt zunächst

$$(1.4) \qquad w_\mathfrak{p}\,(v\,dx) \geq -1 \text{ falls } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}.$$

Ist nun jeder Primteiler von $\mathfrak{s}$ auch Primteiler von $\mathfrak{b}$, so gilt (1.4) für sämtliche $\mathfrak{p}$, denn für die $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{s}$ ist vdx sogar ganz. Dann wäre aber das Differential

$$v\,dx - \sum_{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{s},\, \mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}} \lambda_\mathfrak{p} \frac{dp}{p}$$

ganz für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$ und für $\mathfrak{p} = \mathfrak{x}$ hätte es eine Ordnungszahl ≥ -1 (wegen (1.4) und $w_\mathfrak{x}\left(\frac{dp}{p}\right) = -1$). Also muß es Null sein, da die Gesamtordnungszahl -2 nicht zustandekommen kann d. h. es ist

$$v\,dx = \sum \lambda_\mathfrak{p} \frac{dp}{p}$$

im Widerspruch zur Voraussetzung über Φ.

Da es also einen Primdivisor $\mathfrak{p}_0 \mid \mathfrak{s}$ gibt, welcher nicht in $\mathfrak{b}$ aufgeht, gibt es auch, sofern $\mathfrak{b} \neq 1$ ist, Hauptdivisoren der Form

$$\frac{\mathfrak{b}^\varkappa}{\mathfrak{p}_0^\lambda},$$

welche Einheiten e von $K^{(\mathfrak{s})}$ repräsentieren. Wählen wir nun $\varkappa$ größer als die zu gegebenem $v\,dx$ gehörigen $\lambda_\mathfrak{p}$, so wird man an den Hauptteilen $\lambda'_\mathfrak{p} \frac{dp}{p}$ des Vertreters $v\,dx - \frac{de}{e}$ nur negative ganze Zahlen $\lambda'_\mathfrak{p}$ finden, für jedes $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$. Einen solchen Vertreter wollen wir im folgenden *normiert* nennen. Sein Nennerdivisor ist ein ganzer, durch $\mathfrak{b}$ teilbarer Divisor $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$. Er enthält jeden Primfaktor von $\mathfrak{s}$[1] und ist im übrigen eine Invariante der Restklasse Φ. Denn $w_\mathfrak{p}\,(v\,dx) \geq 0$ für ein $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{s}$ hieße ja, $\mathfrak{p}$ ist Teiler von $\mathfrak{b}$ und es ist $\lambda_\mathfrak{p} = 0$. – Daß schließlich der Übergang von $v\,dx$ zu

[1] Wir können daher auch $K^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$, $\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$ usw. an Stelle von $K^{(\mathfrak{s})}$, $\Delta^{(\mathfrak{s})}$ schreiben.

$v\,dx + \frac{de}{e}$ am Nennerdivisor nichts ändert, sofern beide Differentiale normiert sind, sieht man so ein. Wäre $w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx + \frac{de}{e}\right)$ $\neq w_{\mathfrak{p}}(v\,dx)$, so hätte man

$$\operatorname{Min}\left\{w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx + \frac{de}{e}\right), w_{\mathfrak{p}}(v\,dx)\right\} = w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{de}{e}\right) \geq -1.$$

Da aber, wie oben festgestellt, die linke Seite nicht Null sein kann, folgt also doch $w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx + \frac{de}{e}\right) = w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) = -1$. Eine weitere Eigenschaft normierter Differentiale, die uns im § 2 noch wirkungsvolle Dienste leisten wird, zeigt der nachstehende Hilfssatz auf.

Hilfssatz 1. *Ist $v\,dx$ normiert, $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ und r eine rationale Funktion mit $w_{\mathfrak{p}}(r) < 0$, so ist*

$$w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx + dr) = w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) + w_{\mathfrak{p}}(r).$$

Beweis. Zufolge der Voraussetzung $w_{\mathfrak{p}}(r) < 0$ ist

$$w_{\mathfrak{p}}(dr) = w_{\mathfrak{p}}(r) - 1, \tag{1.6}$$

und zufolge der Normierungseigenschaft von $v\,dx$ entweder $w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) < -1$ oder $w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) = -1$, wie eben festgestellt. Im ersten Fall wird wegen (1.6) $w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx) < w_{\mathfrak{p}}(dr)$ und daher

$$w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx + dr) = w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx).$$

Ist dagegen $w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) = -1$, d. h. $w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx) = w_{\mathfrak{p}}(dr)$, so weiß man zunächst nur, daß

$$w_{\mathfrak{p}}(v\,dx\,r + dr) \geq w_{\mathfrak{p}}(dr) = w_{\mathfrak{p}}(r) - 1.$$

Die Behauptung des Hilfssatzes ist also gleichbedeutend mit der Aussage

$$w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx + dr) = w_{\mathfrak{p}}(r) - 1.$$

Wäre nun

$$w_{\mathfrak{p}}(vr\,dx + dr) \geq w_{\mathfrak{p}}(r),$$

so würde daraus folgen

$$w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx + \frac{dr}{r}\right) \geq 0.$$

Das bedeutet aber, daß $\mathfrak{p}$ ein Teiler von $\mathfrak{b}$ ist, und durch Kombination der letzten Ungleichung mit (1.3′) ergibt sich

$$w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{d(rp^{\lambda})}{rp^{\lambda}}\right) = w_{\mathfrak{p}}\left\{\left(\lambda_{\mathfrak{p}}\frac{dp}{p} - v\,dx\right) + \frac{dr}{r} + v\,dx\right\} \geq 0$$

und daraus folgt auf Grund von (1.1)

$$w_{\mathfrak{p}}\,(r\,p^{\lambda}\,\mathfrak{p}) = 0$$

oder

$$w_{\mathfrak{p}}\,(r) = -\lambda_{\mathfrak{p}}.$$

Auf Grund der Normierungseigenschaften von $v\,dx$ ist aber $\lambda_{\mathfrak{p}} < 0$ und daher widerspricht die letzte Zeile den Voraussetzungen des Hilfssatzes.

Wir wollen uns zum Schlusse klarmachen, daß Differentiale $v\,dx$, welche normiert sind, diese Eigenschaft nicht verlieren, wenn sie als Differentiale eines Funktionenkörpers K^*/Ω^*, der aus K durch Konstantenerweiterung entsteht, betrachtet werden, und zwar in folgendem Sinne.

Man fasse die Divisoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ als Divisoren von K^* auf und definiere mit ihrer Hilfe $K^{*(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$, usw. und schließlich die Restklasse Φ^* mod $E^{*(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$ als diejenige, welche das ursprüngliche Φ enthält. Die Aufstellung des Divisors $\mathfrak{b}^*$ führt, von K^* aus vorgenommen, auf das ursprüngliche $\mathfrak{b}$ zurück. Sei nämlich $\mathfrak{p}^*$ ein möglicher Primteiler von $\mathfrak{b}^*$. Wegen der Unverzweigtheit von $\mathfrak{p}^*$ bez. K gibt es stets Primelemente p für $\mathfrak{p}^*$, welche bereits zu K gehören. Die Beziehung

$$w_{\mathfrak{p}^*}\left(v\,dx - \lambda\,\frac{dp}{p}\right) \geq 0$$

ist aber wegen $v\,dx - \lambda\dfrac{dp}{p} \in K$ nur denkbar, wenn auch

$$w_{\mathfrak{p}}\left(v\,dx - \lambda\,\frac{dp}{p}\right) \geq 0 \text{ ist}$$

für denjenigen Primdivisor $\mathfrak{p}$, welcher von $\mathfrak{p}^*$ geteilt wird. Also gilt die Teilbarkeitsbeziehung $\mathfrak{p}^* \mid \mathfrak{p} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{b}$ und man erkennt, daß $v\,dx$ nur dann in K normiert sein kann, wenn es auch bezüglich jedes K^* normiert ist.

§ 2. Der Faktormodul $\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}/M\,(v\,dx, \mathfrak{g})$

Die Faktorgruppe $\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}/M$ ist ein Modul in bezug auf Ω, dessen Rang wir jetzt bestimmen und für dessen Erzeugung wir eine Reihe von ausgezeichneten Basissystemen angeben werden. $v\,dx$ wird hierbei als normiertes Differential vorausgesetzt.

Es sei $\mathfrak{p}_0$ ein fester Primteiler von $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ vom Grade f_0. Wir zeigen als Erstes: Jedes Differential $\in \Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$ ist mod M einem Differential $\in \Delta^{(\mathfrak{p}_0)}$ kongruent, d. h. es ist im Sinne der Modulsumme

$$\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})} = \{M, \Delta^{(\mathfrak{p}_0)}\} \tag{2.1}$$

Beweis. Im folgenden suchen wir Lösungen von multiplikativen Kongruenzen[1] und berufen uns dabei auf nachstehende Existenzaussage. Sind Elemente a_i aus endlich vielen lokalen Körpern $K_{\mathfrak{p}_i}$ $(i = 1, \ldots, h)$ vorgegeben sowie natürliche Zahlen μ_i, so gibt es immer ein $a \in K$, welches den multiplikativen Kongruenzen

$$a \equiv a_i \bmod^{\times} \mathfrak{p}_i^{\mu_i} \quad (i = 1, \ldots, h) \tag{2.2}$$

und den Zusatzforderungen genügt:

a ganz für alle $\mathfrak{p}$, welche vom ausgezeichneten $\mathfrak{p}_0$ und obigen $\mathfrak{p}_i$ verschieden sind.

Man kann sich den Beweis leicht aus dem entsprechenden Satz für additive Kongruenzen herstellen, der besagt, daß die Kongruenzen

$$b \equiv b_i \bmod^{+} \mathfrak{p}_i^{\mu_i} \quad (i = 1, \ldots, h)$$

und die Forderung: b ganz für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ $(i = 0, \ldots, h)$ stets eine Lösung $b \in K$ besitzt. („Verschärfter Annäherungssatz“, vgl. Hasse [3], S. 298, $\mathfrak{u}$ ist in unserem Falle $= \mathfrak{p}_0$). Da nämlich unendlich viele Primdivisoren ersten Grades vorhanden sind, kann man sicher einen Hauptdivisor der Form

$$\frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{p}_0^H} \prod_{i=1}^{h} \mathfrak{p}_i^{w_i(a_i)}$$

[1] Wir verwenden diesen Begriff im Sinne von Hasse [3], § 23, b.

mit einem ganzen und zu den $\mathfrak{p}_i$ teilerfremden $\mathfrak{c}$ im Zähler finden, welcher ein gewisses $c \in K$ repräsentiert. Setzt man nun das gesuchte a an in der Form

$$a = c\, a^*,$$

so genügt es den Kongruenzen (2.2), falls a^* entsprechenden additiven Kongruenzen

$$a^* \equiv a_i^* \bmod \mathfrak{p}_i^{\mu_i}$$

mit geeigneten ganzen a_i^* auf der rechten Seite genügt. Die Zusatzbedingung: a^* ganz für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_i$ überträgt sich – so ist c ja gerade gewählt – auch auf a.

(2.1) ist bewiesen, wenn es uns gelingt, zu vorgegebenem Primdivisor $\bar{\mathfrak{p}} \neq \mathfrak{p}_0$ und zu vorgegebenen natürlichen Zahlen $\mu < f_{\bar{\mathfrak{p}}}$, $\varkappa$ ein Differential $m\,(\bar{\mathfrak{p}}, \mu, \varkappa) \in M$ zu konstruieren mit den Eigenschaften:

m ganz für alle $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_0$,

m hat im lokalen Körper $K_{\bar{\mathfrak{p}}}$ die Entwicklung $\dfrac{x^\mu}{\bar{p}^\varkappa} + \dfrac{*}{\bar{p}^{\varkappa-1}} + \dots$,

bezogen auf ein fest gewähltes Primelement $\bar{p}$ zu $\bar{\mathfrak{p}}$.

Wir setzen m an in der Form $v r dx + dr$ und wählen r als Lösung des nachstehenden Systemes von multiplikativen Kongruenzen

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)}\ \ r \equiv \dfrac{x^\mu}{\bar{p}^\varkappa\, v \dfrac{dx}{d\bar{p}}} \\[4ex] \text{a}')\ \ r \equiv \dfrac{x^\mu}{\bar{p}^{\varkappa-1}\,(s-\varkappa+1)} \end{array}\right\} \bmod^\times \bar{\mathfrak{p}} \quad \begin{array}{l} \text{falls } w_{\bar{\mathfrak{p}}}\,(v\,dx) < -1 \text{ oder} \\ w_{\bar{\mathfrak{p}}}\,(v\,dx) = -1, \text{ aber } \varkappa = 1, \\[4ex] \text{falls } \varkappa > 1,\ w_{\bar{\mathfrak{p}}}\,(v\,dx) = -1, \\ v\,\dfrac{dx}{d\bar{p}} = \dfrac{s}{\bar{p}} + \dots \end{array}$$

b) $r \equiv p_{\mathfrak{p}}^{-w_{\mathfrak{p}}(v\,dx)} \bmod^\times \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} | \mathfrak{v}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_0$,

c) $r \equiv p_{\mathfrak{p}} \bmod^\times \mathfrak{p}$ für jedes $\mathfrak{p} | \mathfrak{g}$,

d) r ganz für alle übrigen $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0$.

Wegen b), c), d) ist m ganz für alle $\mathfrak{p} \neq \bar{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}_0$, also erst recht für alle $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{v}\mathfrak{b}$. Wegen c) gilt $r \equiv 0 \bmod \mathfrak{g}$, also gehört m zu M.

Ist nun $w_{\bar{\mathfrak{p}}}(v\,dx) < -1$, so stellt $vr\,dx$ das Anfangsglied in der Entwicklung von m und die sieht nach a) so aus

$$\frac{x^\mu}{\bar{p}^\varkappa} + \ldots$$

Ebenso unter der Voraussetzung $\varkappa = 1$, $w_{\bar{\mathfrak{p}}}(v\,dx) = -1$, da r zufolge a) dann ganz für $\bar{\mathfrak{p}}$ wird. Wir haben noch den Fall $w_{\mathfrak{p}}(v\,dx) = -1$, $\varkappa > 1$ zu betrachten. Zu diesem Zweck untersuchen wir ein Differential der Form

$$v\,\frac{h}{\bar{p}^\lambda}\,dx + d\left(\frac{h}{\bar{p}^\lambda}\right)$$

etwas näher ($\lambda \geq 1$, h prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$). Nach Hilfssatz 1, § 1 ist seine $\bar{\mathfrak{p}}$-Ordnungszahl gleich $-\lambda - 1$. Ist nun $\frac{s}{\bar{p}}$ der $\bar{p}$-Hauptteil von $v\,\frac{dx}{d\bar{p}}$, so beginnt die Entwicklung des Differentials mit dem Glied

$$\frac{h}{\bar{p}^{\lambda+1}}(s - \lambda)$$

Damit die richtige Ordnungszahl herauskommt, muß also $s - \lambda$ prim zu $\bar{\mathfrak{p}}$ sein, wie auch die nat. Zahl $\lambda \geq 1$ gewählt ist. Nachdem man dies weiß, ist leicht einzusehen, daß eine Lösung von a′) auch ein m der gewünschten Form liefert. r ist nämlich darstellbar in der Form

$$\frac{h}{\bar{p}^{\varkappa-1}} \quad (h \text{ prim zu } \bar{\mathfrak{p}}),$$

und aus der multiplikativen Kongruenz a′) folgt die additive Kongruenz

$$h\,(s - \varkappa + 1) \equiv x^\mu \mod^+ \bar{\mathfrak{p}}, \text{ womit alles gezeigt ist.}$$

Wir betrachten zweitens den Durchschnitt

$$\Delta_1^{(\mathfrak{p}_0)} \cap M, \tag{2.3}$$

bestehend aus allen Differentialen der Form $vr\,dx + dr$, welche für jedes $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0$ ganz sind, und stellen zunächst zweierlei fest:

(2.4) *$vr\,dx + dr$ gehört zur Menge (2.3) dann und nur dann, wenn r Multiplum eines Divisors der Form $\frac{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_0^\mu}$ ist.*

Denn zunächst muß r ganz sein für alle $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{b}$, andernfalls wäre nämlich nach Hilfssatz 1 (§ 1) $w_{\mathfrak{p}}\ (v r\, dx + dr) < 0$. Dann gehört aber dr schon zu $\Delta^{(\mathfrak{p}_0)}$; damit man dies auch vom zusammengesetzten Differential $v r\, dx + dr$ sagen kann, müssen demnach folgende notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt sein

$$r \in K^{(\mathfrak{p}_0)},\ r \equiv 0 \bmod \mathfrak{g},\ v r\, dx \in \Delta^{(\mathfrak{p}_0)}.$$

Sie werden gerade durch die Formulierung (2.4) zusammengefaßt.

(2.5) *Es gilt ausnahmslos für beliebiges* μ *und alle* $r \equiv 0 \bmod \dfrac{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}}{\mathfrak{p}_0^{\mu}}$.

$$w_{\mathfrak{p}_0}\ (v r\, dx + dr) = w_{\mathfrak{p}_0}\ (v\, dx) + w_{\mathfrak{p}_0}\ (r) \textit{ und}$$

$$w_{\mathfrak{p}}\ (v r\, dx + dr) = w_{\mathfrak{p}}\ (r) - 1, \textit{falls } \mathfrak{p} \mid \mathfrak{g}.$$

Für konstantes r trivialerweise und für nicht-konstantes r und $\mathfrak{p}_0$ nach Hilfssatz 1, weil dann notwendig $w_{\mathfrak{p}_0}\ (r) < 0$ ist. Da ferner $w_{\mathfrak{p}}\ (r) > 0$, falls $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{g}$, und somit $w_{\mathfrak{p}}\ (dr) = w_{\mathfrak{p}}\ (r) - 1$, ist die zweite Zeile mit dem Hinweis auf $w_{\mathfrak{p}}\ (v\, dx) \geq 0$ ($\mathfrak{p} \mid \mathfrak{g}$) ausreichend begründet.

Es sei $\mathfrak{g}_0$ ein ganzer, nur aus Primteilern von $\mathfrak{g}$ zusammengesetzter Divisor. Die Gesamtheit der Differentiale $\equiv 0 \bmod \dfrac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}_0^{\varrho}}$ bildet einen Ω-Modul I_ϱ der Dimension $f_0\, \varrho - f_{\mathfrak{g}_0} - 1$ und die Gesamtheit der Funktionen $\equiv 0 \bmod \dfrac{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}_0^{\varrho}}$ einen Ω-Modul Λ_ϱ der Dimension $f_0 \varrho - f_{\mathfrak{g}_0} - f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}} + 1$. Die Feststellungen (2.5) besagen, daß Λ_ϱ bei der Abbildung $r \rightarrow v r\, dx + dr$ gerade in den Durchschnitt $I_\varrho \frown M$ übergeführt wird, denn $\mathfrak{p}_0$ steckt genau in der $- w_{\mathfrak{p}_0}\ (v\, dx)$-ten Potenz in $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$. In Verbindung mit dem zweiten Isomorphiesatz der Gruppentheorie ergibt sich dann weiter

$$\begin{aligned} \dim\left(\{I_{\varrho+\varkappa} \frown M,\ I_\varrho\}/I_\varrho\right) &= \dim\left(I_{\varrho+\varkappa} \frown M/I_\varrho \frown M\right) \\ &= \dim\left(\Lambda_{\varrho+\varkappa}/\Lambda_\varrho\right). \end{aligned}$$

Nun ist aber, wie man den Dimensionsformeln ohne weiteres ansieht,

$$\dim\left(I_{\varrho+\varkappa}/I_\varrho\right) = \dim\left(\Lambda_{\varrho+\varkappa}/\Lambda_\varrho\right) = f_0 \varkappa,$$

sofern

$$f_0 \varrho - f_{\mathfrak{g}_0} - f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}} + 1 \geq 0 \text{ ist.} \tag{2.6}$$

Daraus folgt

$$\dim(\{I_{\varrho+\varkappa} \cap M, I_\varrho\}/I_\varrho) = \dim(I_{\varrho+\varkappa}/I_\varrho),$$

also

$$\{I_{\varrho+\varkappa} \cap M, I_\varrho\} = I_{\varrho+\varkappa}$$

für jedes $\varkappa > 0$ und ϱ, welches der Ungleichung (2.6) genügt. Da jedes Differential $\in \Delta^{(\mathfrak{p}_0)}$ in einem I_ϱ enthalten ist, bekommt man schließlich

$$\Delta^{(\mathfrak{p}_0)} = \{M, I_\varrho\}$$

und gelangt durch nochmalige Anwendung des zweiten Isomorphiesatzes zur expliziten Rangformel

$$\begin{aligned} \dim(\Delta^{(\mathfrak{p}_0)}/M) &= \dim(I_\varrho/I_\varrho \cap M) \\ &= \dim(I_\varrho) - \dim(I_\varrho \cap M) \\ &= \dim(I_\varrho) - \dim(\Delta_\varrho) \\ &= f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}} - 2. \end{aligned}$$

Satz 1. *Der Restklassenmodul $\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}/M$ hat den Rang $N = f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}} - 2$. Ist $\mathfrak{p}_0$ ein Primteiler von $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}_0$ ein nur aus $\mathfrak{g}$-Primteilern zusammengesetzter ganzer Divisor, und ist ϱ eine natürliche Zahl, welche der Ungleichung (2.6) genügt, so kann man in jeder Restklasse ein Differential $\equiv 0 \bmod \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}_0^\varrho}$ finden. Ist insbesondere $\varkappa = \frac{N+1+f_{\mathfrak{g}_0}}{f_0}$ ganzzahlig, so entsprechen sich die Restklassen von Δ/M und die Differentiale $\equiv 0 \bmod \frac{\mathfrak{g}_0}{\mathfrak{p}_0^\varkappa}$ umkehrbar eindeutig.*

Wir zeigen nun einige Möglichkeiten auf, Basissysteme mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften zu wählen. Aus Satz 1, und zwar aus der verschärften Fassung, ergibt sich unmittelbar

(2.7) Es gebe einen Primteiler $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{v}$ vom Grade Eins und es sei $f_\mathfrak{b} < N$. Dann existieren $N - f_\mathfrak{b}$ Differentiale $\equiv 0 \bmod \mathfrak{b}$, welche bezüglich M linear-unabhängig sind.

Denn es gibt eine entsprechende Anzahl von Differentialen $\equiv 0$ mod $\frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{p}_0^{N+1}}$.

Wir wollen jetzt annehmen, daß der ausgezeichnete Primdivisor ersten Grades $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ aufgeht. $K^{(\mathfrak{x})}$ ist der Ring $\Omega[x]$ der Polynome in x, dem Divisor $\mathfrak{g}$ entspricht ein doppelwurzelfreies Polynom G. Den Grad-$w_{\mathfrak{x}}(r)$ einer rationalen Funktion r bezeichnen wir zur Abkürzung mit $[r]$.

Es sei $v\,dx$ normiertes Differential und $v = \frac{P}{Q}$ als Quotient zweier teilerfremder Polynome P, Q geschrieben.

Dann gilt

(2.8) *Es ist* $N = [P] + f_{\mathfrak{g}}$,

(2.9) *Die Differentiale* $\frac{x^\nu}{Q}\,dx$ $(\nu = 0, \ldots, N-1)$ *bilden ein Basisvertretersystem mod* M,

(2.10) *Ist das Polynom* G_0 *nur aus Primfaktoren von* G *zusammengesetzt, so besteht zwischen den* $N+1$ *Differentialen*

$$x^\nu\, G_0\, dx \qquad (\nu = 0, \ldots, N)$$

genau eine lineare Relation mod M, *nämlich*
$v(QGG_0)\;dx + d\,(QGG_0) = (PGG_0 + (QGG_0)')\,dx \in M$.
Insbesondere sind die N *ersten Differentiale mod* M *linear unabhängig.*

Beweis. Es ist

$$f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}} - 2 = f_{\mathfrak{z}},$$

wenn $\mathfrak{z}$ der Zählerdivisor von $v\,dx$ ist. $\mathfrak{x}$ geht laut Vorausssetzung nicht in $\mathfrak{z}$ auf. Also ist $\mathfrak{z}$ auch der Zählerdivisor des Polynomes P und daher $[P] = f_{\mathfrak{z}} = f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}} - 2 = N - f_{\mathfrak{g}}$, wie behauptet.

Was die lineare Unabhängigkeit der Differentiale (2.10) mod M betrifft, so brauchen wir nur zu zeigen: Ist C ein Polynom in x und $[C] < N$ und $\frac{C}{Q}\,dx = vc\,dx + dc$, so ist $C = 0$. Nun ist $w_{\mathfrak{p}}(P) = 0$, sofern $\mathfrak{p} | \mathfrak{v}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$, und somit

$$w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{C}{Q}\,dx\right) \geq w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{dx}{Q}\right) = w_{\mathfrak{p}}(v\,dx).$$

Dann muß aber c ganz für $\mathfrak{p}$ sein, andernfalls wäre nämlich nach Hilfssatz 1, § 1

$$w_{\mathfrak{p}}\left(\frac{C}{Q}\,dx\right) < w_{\mathfrak{p}}\,(v\,dx).$$

c ist also Polynom in x. Nochmals wenden wir Hilfssatz 1 an, um den Grad $[C]$ zu ermitteln:

$$\begin{aligned}[C] &= w_{\mathfrak{x}}\left(\frac{dx}{Q}\right) - w_{\mathfrak{x}}\left(\frac{C}{Q}\,dx\right)\\ &= w_{\mathfrak{x}}\left(\frac{dx}{Q}\right) - w_{\mathfrak{x}}\,(v\,dx) - w_{\mathfrak{x}}\,(c)\\ &= -\,w_{\mathfrak{x}}\,(P) - w_{\mathfrak{x}}\,(c) = [P] + [c].\end{aligned}$$

Dies verträgt sich mit $[C] < [P] + f_{\mathfrak{g}}$ und $c \equiv 0 \bmod \mathfrak{g}$ nur, wenn $c = 0$.

(2.10) ist praktisch durch Satz 1, verschärfte Fassung, erledigt, die in unserem Falle ($\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{x}, f_0 = 1$) besagt, daß die N Differentiale

$$G_0\,x^{\nu},\ \nu = 0, \ldots, [P] + f_{\mathfrak{g}} - 1$$

mod M linear-unabhängig sind.

Abschließend bemerken wir noch, daß auf Grund von Satz 1 und unserer Feststellung am Schluß von § 1 sich die Rangzahl N bei einer Erweiterung des Konstantenkörpers Ω nicht verändert, da ja der Divisor $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ der alte bleibt. Darüber hinaus macht man sich leicht klar, daß jedes System von Basisvertretern mod M unabhängig bleibt, wenn man Ω durch einen Erweiterungskörper Ω^* ersetzt.

§ 3. Multiplikative Klassen und ihre Untermoduln

Wir setzen im folgenden voraus, daß Ω ein Körper komplexer Funktionen in einer Veränderlichen u ist, der den Körper Z_0 der komplexen Zahlen, sowie mit jedem Element auch dessen Ableitung nach u enthält. Endlich viele Funktionen $\in K$ mögen zudem stets in einem gemeinsamen Gebiet der Ebene regulär sein.

Wir denken uns ein primitives Element x von K/Ω und einen Vertreter $v\,dx$ aus der Restklasse Φ ausgewählt, setzen dann

$$V = e^{\int^x v(\xi)\,d\xi} \tag{3.1}$$

und verstehen unter der von V erzeugten multiplikativen Klasse $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit der Funktionen von x und u, die sich in der Form Vr schreiben lassen mit einem $r \in K^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$. V ist innerhalb $\mathfrak{K}$ nur eindeutig bestimmt bis auf eine Abänderung $V \to Ve$, wobei e Einheit von $K^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}$ ist. Bei fest gewähltem V entsprechen den rationalen Vielfachen r des Divisors $\mathfrak{g}$ vermöge $r \to Vr$ umkehrbar-eindeutig multiplikative Funktionen aus einem Untermodul $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ von $\mathfrak{K}$. *Der Bildung des Differentials $d\,(Vr)$ aus einer Klassenfunktion läuft im rationalen Bereich die Operation $r \to vr\,dx + dr$ parallel.* Es stimmt daher der Untermodul $V \cdot M(v\,dx, \mathfrak{g})$ mit der Gesamtheit der Differentiale $d\,(Vg)$, $Vg \in \mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ überein.

Ein Wechsel im erzeugenden Element hat den Übergang von M zu $\frac{1}{e} M$ zur Folge (§ 1). Wählen wir insbesondere V so, daß $dV/V = v\,dx$ normiert ist im Sinne von § 1 (wir nennen dann auch V normiert), so können wir dem Satz 1 sofort an die Seite stellen:

Satz 2. *Der Faktormodul $\mathfrak{K}\,dx/d(\mathfrak{K}_\mathfrak{g})$ hat bez. Ω den Rang $N = f_{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}} - 2$. Sind t_j Vertreter aus N linear unabhängigen Restklassen von $\Delta^{(\mathfrak{v}\mathfrak{b})}/M$, so repräsentieren die Vt_j ein vollständiges System von Basisrestklassen mod $d\,(\mathfrak{K}_\mathfrak{g})$.*

Ist speziell $\Omega = Z_0$, so handelt es sich um eine multiplikative Klasse im eigentlichen Sinn, wie sie von H. Schmidt [10] und Röhrl [7] an die Spitze ihrer Betrachtungen gestellt wurden. Satz 2 heißt dort „Reduktionssatz". Da alle Primdivisoren in diesem Falle vom ersten Grade sind, hat man stets eine Basis aus Differentialen der Form $\frac{x^\nu}{Q}\,dx$ (vgl. (2.9)). Über die Partialbruchzerlegung des rationalen Bestandteiles gewinnt man dann leicht die loc. cit. konstruierten speziellen N ableitungsunabhängigen Funktionen.

Wir bemerken zum Schluß, daß die analytische Struktur der Klasse nicht von der Auswahl eines primitiven Elementes von

K/Ω abhängt. Übergang zu anderer Erzeugung wirkt sich nämlich bei den rationalen Funktionen, aber auch gem. (3.1) beim erzeugenden Element V als gebrochen-lineare Substitution in der Veränderlichen x aus (mit Koeffizienten $\in \Omega$).

§ 4. Differentialsysteme

Zufolge der Voraussetzung über Ω ist nun K auch hinsichtlich der Differentiation nach u abgeschlossen, was man von $\mathfrak{K}$ jedoch erst behaupten kann, falls die Restklasse Φ mod E einer zusätzlichen Bedingung unterworfen wird: Man kann zu einem $v\,dx \in \Phi$ (und damit zu jedem, wie man sich leicht überlegt) ein $w \in K^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{b})}$ so finden, daß

$$\frac{\partial}{\partial u} v\,dx = dw \quad \text{gilt.} \tag{4.1}$$

In der Tat folgt dann $\frac{\partial}{\partial u} V = V \int^x \frac{\partial}{\partial u} v\,d\xi = V \int^x dw = Vw$ und somit $\frac{\partial}{\partial u} \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{K}$.

Es seien nun $Vt_1\,dx, \ldots, V t_N\,dx$ irgendwelche Basisvertreter von $\mathfrak{K}\,dx/d(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$ und $(Vtdx)$ die aus ihnen gebildete Zeile. Die nach u differenzierte Zeile $\frac{\partial}{\partial u}(Vt\,dx)$ besteht wieder aus Differentialen von $\mathfrak{K}\,dx$ und muß sich daher in der Form

$$\frac{\partial}{\partial u}(Vt\,dx) \equiv (Vt\,dx)\,M \bmod d(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}) \tag{4.2}$$

durch $(Vt\,dx)$ und eine N-reihige Matrix M mit Elementen $\in \Omega$ mod $d(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$ ausdrücken lassen.

Wir wollen nun, grob gesprochen, dieses System von linearen „Differentialkongruenzen" in ein System von Differentialgleichungen verwandeln, indem wir es nach x längs geeigneter Wege integrieren. Zu diesem Zwecke denken wir uns zunächst ein Gebiet $\mathfrak{U}$ in der u-Ebene gewählt, in welchem die Vt_j und die Koeffizienten der Matrix M reguläre Funktionen von u werden. Um uns bequem ausdrücken zu können, wollen wir folgende Definitionen und Bezeichnungen einführen.

I. Ist $\mathfrak{a}$ ein ganzer Divisor von K/Ω, so verstehen wir unter $\{\mathfrak{a}\}$ oder genauer $\{\mathfrak{a}\}_u$ die Menge der gemeinsamen Nullstellen seiner sämtlichen Multipla (bei festem u).

II. Es sei $\mathfrak{m}$ das Produkt aller Primdivisoren, welche in $\mathfrak{v}$ genau zur ersten Potenz aufgehen. $\mathfrak{v}$ läßt sich dann zerlegen in der Form $\mathfrak{e}\mathfrak{m}$, wobei $\mathfrak{e}$ ein ganzer, zu $\mathfrak{m}$ teilerfremder Divisor ist. Bei festem u entsprechen die vier Divisoren $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g}$ den vier Punktsorten, in denen die Funktionen $\in \mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ vorgeschriebenes Verhalten haben: exponentielles Singulärwerden in den Punkten $\{\mathfrak{e}\}$, bestimmtes, nichtrationales Verhalten in den Punkten $\{\mathfrak{m}\}$, rationales Verhalten in den Punkten $\{\mathfrak{b}\}$, Verschwinden in den Punkten $\{\mathfrak{g}\}$.

III. Einen stetigen Weg $\mathfrak{C}$ auf der x-Zahlenkugel wollen wir für eine Menge $\mathfrak{H}$ von multiplikativen Funktionen $\in \mathfrak{K}$ (u fest gedacht) zulässig nennen, falls das Integral $\int\limits_{\mathfrak{C}} k\,dx$ für jedes $k \in \mathfrak{K}$ existiert, falls sich ferner jedes $h \in \mathfrak{H}$ von einem Kurvenpunkt auf $\mathfrak{C}$ analytisch nach beiden Richtungen fortsetzen läßt und die Grenzwerte

$$h(C_j) = \lim_{x \to C_j,\, x \in \mathfrak{C}} h(x)$$

bei Annäherung an die Endpunkte C_0, C_1 existieren und den Bedingungen genügen

$$(4\cdot 3)\qquad \begin{aligned} &h(C_0) = h(C_1) &&\text{falls}\quad C_0 = C_1,\\ &h(C_0) = h(C_1) = 0 &&\text{falls}\quad C_0 \neq C_1. \end{aligned}$$

Es ist dann

$$\int\limits_{\mathfrak{C}} dh = 0.$$

Bei festem u sind demnach für $\mathfrak{K}_\mathfrak{g}$ zulässig einmal alle offenen Wege, welche zwei Punkte der Menge $\{\mathfrak{e}\mathfrak{g}\}$ verbinden und die exponentiellen Singularitäten in geeigneten Richtungen anlaufen (s. u.), zum anderen geschlossene Wege, welche alle Singularitäten meiden und für V und damit für jede Klassenfunktion geschlossen sind (d. h. Anfangs- = Endpunkt, analytische Fortsetzung längs des Weges führt zum Ausgangselement zurück).

Wir denken uns jetzt u variabel in einer hinreichend kleinen Umgebung $\mathfrak{U}_0$ eines festen Punktes u_0 und verstehen von nun an unter $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(u)$ entweder einen einzigen Weg der zweiten Sorte oder eine Schar von Wegen der ersten Sorte, die aus einer Anfangskurve $\mathfrak{C}(u_0)$ durch stetige Veränderung (s. u.) gewisser kleiner Endstücke entstehen. Für festes u soll $\mathfrak{C}(u)$ zulässiger Weg sein bezüglich jeder Funktion aus $\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}$. Das Mitführen der Wege erfolgt in der Nähe der $\{\mathfrak{g}\}$-Punkte irgendwie (denn dort sind alle Klassenfunktionen regulär), in der Nähe einer exponentiellen Singularität $\eta \in \{\mathfrak{e}\}$ hängt es ab von den Koeffizienten der lokalen Entwicklung

$$v(x)\, dx = \frac{c_{\gamma+1}}{(x-\eta)^{\gamma+1}} + \dots \quad (\text{bzw. } c_{\gamma+1}\, x^{\gamma+1} + \dots).$$

Diese Koeffizienten seien alle reguläre Funktionen von u für $u \in \mathfrak{U}$ und es sei dort $c_{\gamma+1} \neq 0$. Wenn wir nun von dem Weg $\mathfrak{C}(u)$ verlangen, daß ein hinreichend kleines Endstück stets in einem der Sektoren

$$(4.4)\quad \frac{\pi}{\gamma}\left(2\nu - \frac{1}{2} + \delta\right) \leq \operatorname{arc}\left(\frac{x-\eta(u)}{\sqrt[\gamma]{-c_{\gamma+1}}}\right) \leq \frac{\pi}{\gamma}\left(2\nu + \frac{1}{2} - \delta\right),$$
$$0 < \delta < \frac{1}{2},$$

verbleibt, so ist $\mathfrak{C}$ (jedenfalls was das Verhalten in der Umgebung von η anbetrifft) sicher zulässig.

Zu einer fest gewählten nat. Zahl ν mod γ läßt sich immer eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von u_0 finden und ein Punkt a im x-Bereich, der von sämtlichen $\eta(u)$ verschieden ist, aber für jedes $u \in \mathfrak{U}_0$ im Winkelgebiet (4.4) mit der Nummer ν enthalten ist. Setzen wir den Weg $\mathfrak{C}(u)$ nun zusammen aus einem bis a reichenden und von u unabhängigen Teil und einem Stück, welches sich innerhalb dieses Sektors in dessen Spitze hinein erstreckt, so wird $\mathfrak{C}(u)$ nicht nur zulässig, sondern es stellt auch jedes Integral $\int\limits_{\mathfrak{C}(u)} V r\, dx$ mit einem hinsichtlich u regulären Integranden wieder eine reguläre Funktion von u vor und die Ableitung kann ungeachtet der veränderlichen Grenze η einfach durch partielle Differentiation unter dem Integralzeichen gewonnen werden (denn es verschwindet V exponentiell und damit auch Vr bei Annäherung an η innerhalb des abgeschlossenen Winkelraumes (4.4)). In dieser Weise wollen wir mit den Wegen $\mathfrak{C}$ in der Nähe eines Punktes der Sorte $\{\mathfrak{c}\}$ immer verfahren.

Integriert man die Zeile $(V t\, d x)$ längs solcher Wege $\mathfrak{C}$, so bekommt man Zeilenvektoren, welche von u abhängig und in einer gewissen Umgebung von u_0 regulär sind und die wir in der Form $\int\limits_{\mathfrak{C}} (V t\, d x)$ notieren wollen. Je nach Wahl von $\mathfrak{C}$ fallen sie natürlich verschieden aus. Eines aber haben sie alle gemeinsam: Sie sind Lösungen eines Differentialsystemes der Ordnung N, wie wir jetzt zeigen wollen. Welche Klassenbasis hierbei zugrunde gelegt wird, ist nicht wesentlich, denn bei einem Basiswechsel multiplizieren sich sämtliche Zeilen (s. o.) mit ein und derselben invertierbaren Matrix mit Ω-Element. Wir entscheiden uns der Bequemlichkeit halber für eine Zeile aus lauter Differentialen $\equiv 0$ mod $\mathfrak{g}$. Satz 1 gibt uns hierzu die nötige Handhabe (man wähle einfach $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}$). Der Weg $\mathfrak{C}$ ist dann entweder geschlossen und von u unabhängig, oder der Integrand verschwindet im Anfangs- und Endpunkt. In jedem Falle ist Differentiation des Integrals mit Differentiation unter dem Integralzeichen gleichbedeutend, und daher folgt aus (4.2)

$$\frac{d}{du}\int\limits_{\mathfrak{C}} (V t\, d x) = \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{\partial}{\partial u}(V t\, d x) = \int\limits_{\mathfrak{C}} (V t\, d x)\, M. \tag{4.5}$$

§ 5. Konstruktion von Fundamentalwegen und komplementären Wegen im Spezialfall

Wir denken uns den Grundkörper Ω so erweitert, daß der ganze Divisor $\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}$ in lauter Primteiler ersten Grades zerfällt. Es gibt dann zu jedem $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}$ ein Primelement der Form $(x - \eta_{\mathfrak{p}})$, $\eta_{\mathfrak{p}} \in \Omega$, bzw. $\frac{1}{x}$. Wir beschränken den Parameter u auf ein Gebiet $\mathfrak{U}$ der u-Ebene, auf dem die $\eta_{\mathfrak{p}}$ sämtlich regulär und für jedes u voneinander verschieden sind. Ferner sollen auch sämtliche Koeffizienten, welche in der Darstellung von v als gebrochene

Funktion in x auftreten, regulär und der Anfangskoeffizient der Entwicklung

$$v\,d\,x = \frac{c_{\mathfrak{p}}}{(x-\eta_{\mathfrak{p}})^{\gamma_{\mathfrak{p}}+1}} + \ldots \qquad (\text{bzw. } c_{\mathfrak{x}}\, x^{\gamma_{\mathfrak{x}}} + \ldots)$$

von Null verschieden sein für jedes $u \in \mathfrak{U}$. Falls $\gamma_{\mathfrak{p}} = 0$ ist, trifft dies von selbst zu, denn auf Grund der Forderung (4.1) ist $c_{\mathfrak{p}}$ von u unabhängig. Und zwar ist $c_{\mathfrak{p}}$ eine ganze Zahl oder nicht, je nachdem $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{b}$ aufgeht oder nicht. – Im übrigen gibt $\gamma_{\mathfrak{p}}+1$ die Potenz an, in welcher $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}$ aufgeht, so daß demnach die Anzahlformel aus Satz 1 auch so geschrieben werden kann

$$N = n - 2 + \sum_{\mathfrak{p}\,|\,\mathfrak{e}} \gamma_{\mathfrak{p}}; \tag{5.1}$$

dabei ist n die Anzahl der Primteiler von $\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}$.

Wir wollen nun zu gegebenem multiplikativem Modul $\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}$ unter der Voraussetzung $\mathfrak{b} \neq 1$ N zulässige Wege konstruieren, die sich im § 7 als Fundamentalwege entpuppen werden. Wir verbinden dies gleich mit der Konstruktion von N sogenannten komplementären Wegen, deren Rolle bei unserem Aufbau erst später erkennbar wird. Wir sind dabei gezwungen, Fallunterscheidungen zu treffen.

1. Fall. *Es ist* $\mathfrak{b} \neq 1$ *und* $\mathfrak{e}\mathfrak{g} \neq 1$.

Unter den Primteilern von $\mathfrak{b}$ zeichnen wir einen aus, den wir für den Augenblick $\mathfrak{t}$ nennen wollen. Statt $\eta_{\mathfrak{t}}$ schreiben wir kurz τ ($\tau = \infty$, falls $\mathfrak{t} = \mathfrak{x}$). Die übrigen $n-1$ Punkte $\in \{\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}\}$ bezeichnen wir nach den zugehörigen Primdivisoren $\mathfrak{p}_\nu$ mit $\eta_{\mathfrak{p}_\nu}$ oder kurz mit η_ν ($\nu = 0, \ldots, n-2$), und zwar so, daß $\mathfrak{p}_0$ Teiler von $\mathfrak{e}\,\mathfrak{g}$ wird (einen solchen gibt es ja nach Voraussetzung). Jedes der η_ν denken wir uns von den übrigen durch einen kleinen Kreis $\varkappa_\nu$ isoliert.

Wir konstruieren als erstes $n-2$ offene Wege $\mathfrak{S}_\nu$, die sämtlich in η_0 beginnen und in einem Punkt $\in \{\mathfrak{e}\mathfrak{g}\}$ enden (gegebenenfalls unter geeigneten Winkeln einmünden, vgl. § 4) und den $n-2$ Punkten η_ν ($\nu = 1, \ldots, n-2$) wie folgt zugeordne werden:

$$\mathfrak{S}_\nu \text{ ist } \begin{cases} \text{ein Streckenzug } \overline{\eta_0\,\eta_\nu}, \text{ falls } \mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{e}\mathfrak{g}, \\[2mm] \text{eine einfache Schleife } (\eta_0, \eta_\nu^+, \eta_0), \text{ falls } \mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{m}\mathfrak{b}. \end{cases}$$

Letztere sollen so verlaufen, daß nicht nur der Punkt η_ν, sondern auch der Kreis $\varkappa_\nu$ ganz im Innern enthalten ist. Ihre Gegenstücke sind $n-2$ offene Wege $\breve{\mathfrak{S}}_\nu$ $(\nu = 1, \ldots n-2)$ von folgender Gestalt:

$\breve{\mathfrak{S}}_\nu$ ist $\begin{cases} \text{ein Streckenzug } \overline{\tau\,\eta_\nu}, \text{ falls } \mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{b}, \\ \text{eine einfache Schleife } (\tau, \eta_\nu^+, \tau), \text{ bestehend aus einem} \\ \text{Streckenzug und der Peripherie des Kreises } \varkappa_\nu, \text{ falls } \mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{egm}. \end{cases}$

Da die Ausgangspunkte η_0, τ voneinander und von den η_ν $(\nu = 1, \ldots, n-2)$ verschieden sind, können die beiden Wegsysteme offenbar so angelegt werden, daß

(5.2a) $\mathfrak{S}_\nu, \breve{\mathfrak{S}}_\mu$ punktfremd sind für $\nu \neq \mu$,

(5.3a) $\mathfrak{S}_\nu, \breve{\mathfrak{S}}_\nu$ einen Schnittpunkt haben, falls $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{ebg}$,

(5.3b) $\mathfrak{S}_\nu, \breve{\mathfrak{S}}_\nu$ zwei Schnittpunkte haben, die über dem gleichen Punkt der Zahlenkugel liegen, falls $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{m}$.

Weiter konstruieren wir zu jedem $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{e}$ γ_ν zulässige Wege $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}$ $(\varrho = 1, \ldots, \nu)$: $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}$ ist eine kleine, kleeblattartige Schleife (siehe Skizze), die von einem Winkelraum (4.4) zum darauffolgenden führt. Sie soll dabei den Kreis $\varkappa_\nu$ nicht verlassen. Dann sind stets

(5.2b) $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}, \breve{\mathfrak{S}}_\mu$ punktfremd für alle ν, μ, ϱ.

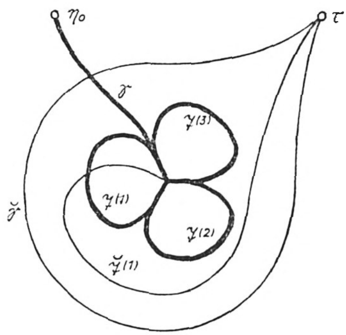
Ihre Gegenstücke $\breve{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varrho)}$ sind offene Wege, welche im Punkte τ ihren Anfang nehmen und auf welchen man über ein Stück der Peripherie von $\varkappa_\nu$ in einen Winkelraum

$$(5.4)\quad \frac{\pi}{\gamma_\nu}\left(2\varrho - \frac{1}{2} + \delta\right) \leq \operatorname{arc}\left(\frac{x-\eta_\nu}{\frac{\gamma_\nu}{\sqrt{c_\nu}}}\right) \leq \frac{\pi}{\gamma_\nu}\left(2\varrho + \frac{1}{2} + \delta\right)$$

gelangen und von dort aus schließlich η_ν erreichen kann, ohne den Weg $\mathfrak{S}_\nu$ vorher zu kreuzen (siehe Skizze). Insbesondere lassen sich (sofern $\mathfrak{p}_0 \mid \mathfrak{e}$) die Wege $\breve{\mathfrak{T}}_0^{(\varrho)}$ so führen, daß sie mit den früher konstruierten $\mathfrak{S}_\nu$ nur den Punkt η_0 gemeinsam haben (man sorge dafür, daß die letzteren den Punkt η_0 über ein- und denselben Winkelraum vom Öffnungswinkel $< \frac{\pi}{\gamma_0}$ verlassen !). Wir können dann also sagen:

(5.2 c) $\check{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varrho)}$, $\mathfrak{S}_\mu$ haben (abgesehen von expon. Singul.) keine Punkte gemeinsam für alle Kombinationen ν, μ, ϱ.

(5.2 d) $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}$, $\check{\mathfrak{T}}_\mu^{(\varrho')}$ sind punktfremd, falls $\nu \neq \mu$.



Nun werden je zwei aufeinanderfolgende Winkelräume (4.4) von einem Winkelraum (5.4) getrennt und umgekehrt, daher kann man die Numerierung der $\check{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varrho)}$ so einrichten, daß

(5.2 e) $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}$, $\check{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varrho')}$ außer η_ν keinen Punkt, falls $\varrho \neq \varrho'$, und

(5.3 c) $\mathfrak{T}_\nu^{(\varrho)}$, $\check{\mathfrak{T}}_\nu^{(\varrho)}$ einen Punkt gemeinsam haben.

2. Fall. *Es ist* $\mathfrak{b} \neq 1$, *aber* $\mathfrak{e}\mathfrak{g} = 1$.

Die Wege $\mathfrak{T}$, $\check{\mathfrak{T}}$ entfallen, die $\check{\mathfrak{S}}_\nu$ sind die gleichen wie im Falle 1, $\mathfrak{p}_0$ ist jetzt irgendein Primteiler von $\mathfrak{m} = \mathfrak{v}$. Als Wege $\mathfrak{S}_\nu$ nehmen wir

eine Doppelschleife $(\eta_0^+, \eta_\nu^+, \eta_0^-, \eta_\nu^-)$, falls $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{m}$,

einen hinreichend kleinen Kreis um η_ν, falls $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{b}$.

Auch hier ist es nicht schwer, die Wege so zu legen, daß die Feststellungen (5.2 a), (5.3 a) richtig bleiben. Dagegen muß (5.3 b) umgeändert werden in

(5.3 d) $\mathfrak{S}_\nu$, $\check{\mathfrak{S}}_\nu$ haben vier Schnittpunkte (o. E. über dem gleichen Punkt der Zahlenkugel), falls $\mathfrak{p}_\nu \mid \mathfrak{m}$.

Zusammengenommen haben wir in jedem Falle

$$N = n - 2 + \sum_{\mathfrak{p}_\nu | \mathfrak{c}} \gamma_\nu$$

zulässige Wege und komplementäre Wege, die wir mit $\mathfrak{C}_\mu$, $\breve{\mathfrak{C}}_\mu$ bezeichnen und so anordnen wollen, daß $\breve{\mathfrak{C}}_\mu$ in der ursprünglichen Benennung als $\breve{\mathfrak{S}}$ oder $\breve{\mathfrak{T}}$ die gleichen Indizes hat wie $\mathfrak{C}_\mu$. Die Feststellungen (5.2a) – (5.2e) lassen sich dann offenbar in die eine zusammenfassen:

(5.2) $\mathfrak{C}_\nu$, $\breve{\mathfrak{C}}_\mu$ sind für $\nu \neq \mu$ punktfremd, von Punkten der Menge $\{\mathfrak{c}\}$ abgesehen.

§ 6. Hilfssätze

Hilfssatz 2. *Es bestehen die Integralbeziehungen*

$$\int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V(x) W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = W(D_1) \int_{\mathfrak{C}} \frac{V(x)}{D_1 - x} dx - W(D_0) \int_{\mathfrak{C}} \frac{V(x)}{D_0 - x} dx, \quad \int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x) W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = V(C_1) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W(z)}{z - C_1} dz - V(C_0) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W(z)}{z - C_0} dz + 2\pi i \sum_{\substack{\xi \approx \delta \\ \xi \in \mathfrak{C},\, \delta \in \mathfrak{D}}} V(\xi) W(\delta)\, \chi(\xi, \delta)$$

unter folgenden Voraussetzungen. $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sind Kurven auf der Zahlenkugel und aus endlich vielen Jordan-Bögen zusammengesetzt. Sie schneiden sich nur endlich oft und nicht in ihren Anfangspunkten C_0, D_0 oder den Endpunkten C_1, D_1. Die Funktion V (W) kann von einem Kurvenpunkt aus nach beiden Richtungen über Anfangs- und Endpunkt hinaus fortgesetzt werden, das Differential $V\,dx$ ($W\,dz$) ist in jedem Punkt von $\mathfrak{C}$ ($\mathfrak{D}$) regulär. Das Doppelintegral ist geeignet zu definieren (s. u.).

In der zweiten Formel rechts ist über alle Schnittpunkte zu summieren, d. h. über alle Paare $\xi \in \mathfrak{C}$, $\delta \in \mathfrak{D}$, die über dem gleichen Punkt der Kugel liegen (wir schreiben dafür $\xi \approx \delta$). Der Überkreuzungscharakter $\chi(\xi, \delta)$ hat den Wert 1 (-1), wenn $\mathfrak{D}$ von $\mathfrak{C}$

an der Stelle δ im positiven (negativen) Sinne durchsetzt wird, und es ist $\chi = 0$, falls nur Berührung stattfindet.

Beweis. Wir denken uns die Kurvenpunkte $\xi \in \mathfrak{C}$, die mit einem $\delta \in \mathfrak{D}$ einen Schnittpunkt bilden, in der Reihenfolge ihrer Durchlaufung auf $\mathfrak{C}$ numeriert und wählen kurz vor ξ_k einen Punkt ξ'_k, kurz hinter ξ_k einen zweiten ξ''_k und bezeichnen mit $\mathfrak{C}_k$ den Kurvenanteil von $\mathfrak{C}$, der zwischen ξ''_{k-1} und ξ'_k liegt, ferner mit $\mathfrak{C}_0$ den zwischen C_0 und ξ_1 und mit $\mathfrak{C}_{n+1}$ den zwischen ξ''_n (dem letzten der ξ'') und C_1 gelegenen. Die beiden singulären Integrale werden dann als die Grenzwerte

$$\lim_{\xi'_k, \xi''_k \to \xi_k} \left(\sum_k \int_{\mathfrak{C}_k} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx \right)$$

$$\lim_{\xi'_k, \xi''_k \to \xi_k} \left(\sum_k \int_{\mathfrak{C}_k} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx \right)$$

definiert.

Für jedes $x \in \mathfrak{C}_k$ ist $z - x \neq 0$ für alle $z \in \mathfrak{D}$ und man hat daher

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz = \frac{W(D_1)\, V(x)}{D_1 - x} - \frac{W(D_0)\, V(x)}{D_0 - x}.$$

Die Umformung des ersten der beiden Doppelintegrale in ein einfaches Integral ist damit schon gerechtfertigt.

Ferner ist das bestimmte Integral

$$\int_{\mathfrak{D}} \frac{V(x)\, W(z)}{z - x}\, dz$$

längs des Kurvenstückes $\mathfrak{C}_k$ analytisch in x fortsetzbar und man bekommt das abgeleitete Funktionselement durch Differentiation unter dem Integralzeichen. Es wird daher

$$\int_{\mathfrak{C}_k} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = \int_{\mathfrak{C}_k} \frac{d}{dx} \left(\int_{\mathfrak{D}} \frac{V(x)\, W(z)}{z - x}\, dz \right) dx$$

$$= V(\xi'_k) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - \xi'_k}\, dz - V(\xi''_{k-1}) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - \xi''_{k-1}}\, dz.$$

Durch Summation über alle $\mathfrak{C}_k$ folgt daraus

$$\sum_k \int_{\mathfrak{C}_k} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = \sum_k V(\xi_k') \int_{\mathfrak{D}} \frac{W(z)}{z - \xi_k'}\, dz -$$

$$V(\xi_k'') \int_{\mathfrak{D}} \frac{W(z)}{z - \xi_k''}\, dz + V(C_1) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - C_1}\, dz - V(C_0) \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - C_0}\, dz,$$

und es bleibt zu untersuchen

$$\lim_{\xi', \xi'' \to \xi} \left\{ V(\xi') \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - \xi'}\, dz - V(\xi'') \int_{\mathfrak{D}} \frac{W}{z - \xi''}\, dz \right\}$$

für ein bestimmtes $\xi = \xi_k$.

ξ' und ξ'' nähern sich der Kurve $\mathfrak{D}$ in allen Punkten δ, die am gleichen Ort wie ξ liegen. Grenzt man um jedes dieser δ ein beliebig kleines Stück $\mathfrak{D}_\delta$ der Kurve $\mathfrak{D}$ ab, so kann man den fraglichen Grenzwert offenbar auch in der Form gewinnen

$$\lim_{\xi', \xi'' \to \xi} \left\{ V(\xi') \sum_\delta \int_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi'}\, dz - V(\xi'') \sum_\delta \int_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi''}\, dz \right\}.$$

Wir denken uns $\mathfrak{D}_\delta$ so klein gewählt, daß es außer δ keinen weiteren Punkt mit $\mathfrak{C}$ gemeinsam hat und ganz in einem Kreis enthalten ist, in dessen Innerem W eine reguläre Funktion von z ist. Den Grenzwert

$$\lim_{\xi', \xi'' \to \xi} \left\{ V(\xi') \int_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi'}\, dz - V(\xi'') \int_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi''}\, dz \right\}$$

kann man dann in bekannter Weise mit Hilfe der C a u c h y schen Integralformel berechnen: Man umgehe ξ' auf einem Bogen $\overline{\mathfrak{D}}_\delta$ und bekommt

$$\int_{\overline{\mathfrak{D}}_\delta} \frac{W}{z - \xi'}\, dz = \int_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi'}\, dz \pm 2\pi i\, W(\delta'),$$

je nachdem ob $\xi' \approx \delta'$ links oder rechts vom orientierten Kurvenstück $\mathfrak{D}_\delta$ liegt, d. h. je nachdem ob $\chi = 1$ oder -1. Dagegen ist $\int\limits_{\overline{\mathfrak{D}}_\delta} \frac{W}{z - \xi''}\, dz = \int\limits_{\mathfrak{D}_\delta} \frac{W}{z - \xi''}\, dz$, falls ξ', ξ'' auf entgegengesetzten Seiten von $\mathfrak{D}$ liegen. Nach der Deformation des Integrationsweges kann der Grenzübergang $\xi', \xi'' \to \xi$ unter dem Integralzeichen ausgeführt werden, dabei ergibt sich der in der Behauptung angegebene Wert $\chi(\xi, \delta)\, V(\xi)\, W(\delta)$. — Ist $\chi = 0$, liegen also ξ', ξ'' auf derselben Seite von $\mathfrak{D}$, so können wir so deformieren, daß keine Residuen auftreten, und unsere Behauptung ist auch in diesem Falle bewiesen.

Hilfssatz 3.[1] *Sind V, W multiplikative Funktionen, ist $\mathfrak{C}$ für die Funktion V und $\mathfrak{D}$ für W zulässig (im Sinne der Definition § 4) und schneiden sich $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ nur endlich oft und nur dann in einem Endpunkt, wenn dieser exponentielle Singularität für V bzw. für W ist, so gilt*

$$\int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = 0,$$

$$\int_{\mathfrak{C}} \int_{\mathfrak{D}} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{V(x)\, W(z)}{z - x} \right) dz\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{\xi \approx \delta \\ \xi \in \mathfrak{C},\, \delta \in \mathfrak{D}}}' \chi(\xi, \delta)\, V(\xi)\, W(\delta),$$

wobei der $'$ andeuten soll, daß nur über solche Schnittpunkte zu summieren ist, welche nicht auch Endpunkte eines der beiden Wege sind.

Für Wege, die nicht in exponentielle Singularitäten hineinführen, folgt der Beweis unmittelbar aus Hilfssatz 2 und der Definition des zulässigen Weges. In den Ausnahmefällen integriere man zunächst nur bis in die Nähe einer solchen Singularität und wandle das Doppelintegral gem. Hilfssatz 2 in einfache Integrale der Form $W(D) \int\limits_{\mathfrak{C}} \frac{V(x)}{x - D}\, dx$ um. Läßt man anschließend D auf der Kurve $\mathfrak{D}$ gegen die Singularität rücken, so strebt $W(D)$ exponentiell und daher auch der gesamte Ausdruck gegen Null.

§ 7. Der komplementäre Klassenmodul. Periodenrelationen

Die im § 5 konstruierten komplementären Wege lassen sich auffassen als zulässige Wege für den Untermodul $\breve{\mathfrak{K}}_0$ einer gewissen multiplikativen Klasse $\breve{\mathfrak{K}}$, die zu $\mathfrak{K}$ komplementär genannt

[1] Vgl. auch Röhrl [8] S. 206—209.

wird und die wir jetzt definieren wollen. Wir müssen zu diesem Zwecke folgende Voraussetzung über die Restklasse Φ machen:

(7.1) *Der Durchschnitt* $\Phi \frown \Delta^{(\mathfrak{v})}$ *ist nicht leer.*

Mit anderen Worten, es soll möglich sein, durch Abziehen eines Differentials $\frac{de}{e}$ von einem vorgelegten Vertreter $v\,dx \in \Phi$ die Hauptteile an sämtlichen $\mathfrak{p}$-Stellen zu annullieren für jedes $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{b}$. Dies ist sicher der Fall, wenn $\mathfrak{v}$ einen Primteiler ersten Grades besitzt, wie man sich leicht überlegt. Daher kann die komplementäre Klasse zwar u. U. nicht über dem ursprünglichen Ω, wohl aber immer über einer geeigneten algebraischen Erweiterung Ω^* als Grundkörper aufgestellt werden. Wir legen ihre Bestimmungsstücke $\breve{\Phi}$, $\breve{\mathfrak{b}}$, $\breve{\mathfrak{g}}$ wie folgt fest

$$\breve{\Phi} = -(\Phi \frown \Delta^{(\mathfrak{v})}) + E^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{g})},\ \breve{\mathfrak{v}} = \mathfrak{v},\ \breve{\mathfrak{g}} = \mathfrak{b},\ \breve{\mathfrak{b}} = \mathfrak{g}.$$

$\breve{\Phi}$ ist also diejenige Restklasse mod $E^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{g})}$, welche alle Differentiale $-v_0\,dx$, $v_0\,dx \in \Phi \frown \Delta^{(\mathfrak{v})}$ enthält. Die zugehörigen multiplikativen Funktionen $\exp\left(\int^{x} v_0\,d\,\xi\right)$ sind demnach erzeugende Elemente für $\mathfrak{K}$ und ihre Reziproken solche für $\breve{\mathfrak{K}}$. Nach Satz 1 haben die Faktormoduln $\mathfrak{K}\,dx/d\,(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$ und $\breve{\mathfrak{K}}\,dx/d\,(\breve{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{b}})$ gleichen Rang. Wir wählen nun irgendein Element $V_0 \in \mathfrak{K}$, dessen Reziprokes V_0^{-1} in $\breve{\mathfrak{K}}$ liegt, bestimmen ferner eine Einheit $b \in K^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{b})}$ und eine Einheit $g \in K^{(\mathfrak{v}\,\mathfrak{g})}$ mit $b \equiv 0 \bmod \mathfrak{b}$, $g \equiv 0 \bmod \mathfrak{g}$ und setzen

$$V = V_0\,\frac{g}{b} = Vg,\ \tilde{V}^{-1} = \breve{V}b. \tag{7.2}$$

Es gilt offenbar $V \in \mathfrak{K}$, $\breve{V} \in \breve{\mathfrak{K}}$, $\tilde{V} \in \mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}$, $\tilde{V}^{-1} \in \breve{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{b}}$.

Dann denken wir uns in der Funktion $\tilde{V}^{-1}$ die Veränderliche x gegen z ausgetauscht und bilden das Differential in den beiden Veränderlichen x und z

$$\omega\,dx\,dz = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tilde{V}(x)}{x-z}\right)\tilde{V}^{-1}(z) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tilde{V}^{-1}(z)}{x-z}\right)\tilde{V}(x)\right\}dx\,dz. \tag{7.3}$$

In der Menge aller Doppelintegrale

$$\int_{\mathfrak{C}}\int_{\breve{\mathfrak{C}}} \omega\,dx\,dz$$

werden wir jetzt ein wichtiges Invariantensystem des Modulpaares $\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}$, $\check{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{b}}$ kennenlernen. $\mathfrak{C}$, $\check{\mathfrak{C}}$ durchlaufen dabei die bezüglich $\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}$ bzw. $\check{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{b}}$ zulässigen Wege. – Wir stellen im einzelnen fest:

1. Nach Hilfssatz 3 hat man

$$\int_{\mathfrak{C}} \int_{\check{\mathfrak{C}}} \omega \, dx \, dz = 2\pi i \sum_{\xi \approx \delta}{}' \tilde{V}(\xi) \, \tilde{V}^{-1}(\delta) \, \chi(\xi, \delta), \tag{7.4}$$

wobei über alle Schnittpunkte der Kurven $\mathfrak{C}$, $\check{\mathfrak{C}}$, Endpunkte ausgenommen, zu summieren ist. Bei lokalen Änderungen des Parameters können daher die Wege $\mathfrak{C}$, $\check{\mathfrak{C}}$ so mitgeführt werden, daß alle auf der rechten Seite von (7.4) auftretenden ξ, δ ungeändert bleiben. Zufolge der Voraussetzung (4.1) kann nun die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial u} \tilde{V}$ geschrieben werden in der Form $\tilde{V} \tilde{w}(x, u)$ mit einer in x rationalen Funktion $\tilde{w}$. Da ξ, δ über dem gleichen Punkt der Zahlenkugel liegen, folgt also

$$\frac{\partial}{\partial u} \tilde{V}(\xi, u) \, \tilde{V}^{-1}(\delta, u) = \tilde{V}(\xi) \, \tilde{V}^{-1}(\delta) \, \{\tilde{w}(\xi, u) - \tilde{w}(\delta, u)\} = 0,$$

d. h. (7.4) ist von u unabhängig. Aus dem gleichen Grunde ändert es seinen Wert nicht, wenn man an Stelle von $\tilde{V}$ ein rationales Vielfaches $\tilde{V} r$ treten läßt, d. h. das Doppelintegral ist von der Wahl von V_0, g, b unabhängig. Schließlich ist auf Grund unserer Bemerkung am Schluß von § 3 die rechte Seite (7.4) auch invariant gegenüber einem Wechsel im primitiven Element x, wenn man bedenkt, daß bei einer linearen Substitution die zulässigen Wege und damit auch ihre gemeinsamen Punkte entsprechend mit-abgebildet werden müssen.

2. Ist $\mathfrak{b} \neq 1$, so läßt sich für jedes der N^2 in § 5 aufgestellten Paare von Wegen und komplementären Wegen der Wert des Doppelintegrales leicht angeben:

$$\int_{\mathfrak{C}_\nu} \int_{\check{\mathfrak{C}}_\mu} \omega \, dx \, dz = 0 \text{ für } \nu \neq \mu \text{ gem. (5.2)},$$

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{C}_\nu} \int_{\check{\mathfrak{C}}_\nu} \omega \, dx \, dz &= \pm \tilde{V}(\xi) \, \tilde{V}^{-1}(\delta) \neq 0 \text{ im Falle (5.3a), (5.3c)}, \\ &= \pm \tilde{V}(\xi) \, \tilde{V}^{-1}(\delta) \, (1 - A_\nu^{-1}) \neq 0 \text{ im Falle (5.3b)}, \\ &= \pm (1 - A_\nu^{-1}) \, (1 - A_0^{-1}) \, \tilde{V}(\xi) \, \tilde{V}^{-1}(\delta) \neq 0 \\ &\qquad \text{im Falle (5.3d)}. \end{aligned} \tag{7.5}$$

Dabei sind $A_\nu \neq 1$, $A_0 \neq 1$ diejenigen Umlaufsfaktoren, welche $\tilde{V}$ bei Fortsetzung um die Punkte η_ν, η_0 aufnimmt.

Wir wollen für den Moment annehmen, daß das primitive Element x so ausgewählt ist, daß der zugehörige Primdivisor $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ aufgeht. Denkt man sich nun in (7.3) die Differentiationen ausgeführt, so bekommt man zunächst

$$\omega\, dx\, dz = \tilde{V}(x)\, \tilde{V}^{-1}(z)\, \frac{\tilde{v}(x) - \tilde{v}(z)}{x - z}\, dx\, dz.$$

Dabei ist $\tilde{v}(x)$ die logarithmische Ableitung von $\tilde{V}$, also eine rationale Funktion $\frac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$. Wir können daher den obigen Ausdruck umformen zu

$$\frac{\tilde{v}(x) - \tilde{v}(z)}{x - z} = \frac{\tilde{P}(x)\, \tilde{Q}(z) - \tilde{Q}(x)\, \tilde{P}(z)}{\tilde{Q}(x)\, \tilde{Q}(z)\, (x - z)}.$$

Das Zählerpolynom ist durch $x - z$ teilbar, und das führt schließlich zur Darstellung

$$\omega\, dx\, dz = \sum_{l=1}^{N'} \tilde{V}(x)\, s_l(x)\, dx\, \tilde{V}^{-1}(z)\, \check{s}_l(z)\, dz, \tag{7.6}$$

wobei die s_l bzw. $\check{s}_l$ rationale Funktionen von nur einer Veränderlichen x oder z sind mit dem Nenner $\tilde{Q}$. Wir behaupten nun: Die $\tilde{V} s_l\, dx$ sind Differentiale $\in \mathfrak{K}\, dx$. $\tilde{V}$ läßt sich nämlich schreiben in der Form $\tilde{V} = V G^*$, wobei V erzeugendes Element der Klasse $\mathfrak{K}$, G^* ein Polynom und teilerfremd zu allen $\mathfrak{p} \mid \mathfrak{v}\mathfrak{b}$, $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$ ist. $\tilde{v}$ kann daher aufgespalten werden in der Form $v + \frac{G^{*\prime}}{G^*}$, es gehen also in $\tilde{Q}$ nur solche Primdivisoren $\mathfrak{p} \nmid \mathfrak{v}\mathfrak{b}$ auf, und zwar zur ersten Potenz, welche auch in G^* stecken, d. h. jedes Differential der Form $\frac{x^\nu}{\tilde{Q}}\, \tilde{V}\, dx = \frac{x^\nu}{\tilde{Q}}\, V G^*\, dx$ liegt in $\mathfrak{K}\, dx$. Der entsprechende Schluß ist auch für die Differentiale $\tilde{V}^{-1}\, \check{s}_l\, dx$ und die komplementäre Klasse durchführbar, jedenfalls was die Primdivisoren $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{x}$ anbetrifft. Falls aber $\mathfrak{x} \nmid \mathfrak{v}$ und damit $\mathfrak{x} \nmid \mathfrak{v}\mathfrak{g}$ gilt, wird sich erst nach passender Abänderung von $\tilde{V}$ das Differential $\tilde{V}^{-1}\, \check{s}_l\, dz$ an der Stelle ∞ so verhalten, wie dies für die Klasse $\check{\mathfrak{K}}$ vorgeschrieben ist, nämlich regulär. Wir ersetzen in diesem Falle, sofern nötig, die Ausgangsfunktion V_0 durch $V_0\, p^\lambda$, wobei

λ eine hinreichend große nat. Zahl und p ein Primpolynom ist, dessen zugehöriger Divisor in $\mathfrak{v}$ steckt. Dies bewirkt in (7.6) den Übergang von $\tilde{V}^{-1}$ zu $\tilde{V}^{-1} p^{-\lambda} \in \breve{\mathfrak{K}}$, während sich die Ordnung an der Stelle ∞ der rationalen Funktion $\tilde{v}(z)$ und damit auch von $\frac{z^{\nu}}{\tilde{Q}}$ nicht ändert.

Wir wählen nun N Basisvertreter $Vt_j\,dx$ für den Faktormodul $\mathfrak{K}\,dx/d\,(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$, denken uns die $Vs_l\,dx$ in (7.6) durch die ihnen entsprechenden Linearkombinationen der $Vt_j\,dx$ mod $d\,(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$ ersetzt und nach letzteren zusammengefaßt. Dies ergibt

$$\omega\,dx\,dz \equiv \sum_{j=1}^{N} Vt_j\,dx\,\tilde{V}^{-1}\,\breve{t}_j\,dz \quad \bmod d\,(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}}),$$

wobei die $\breve{t}_j$ gewisse Linearkombinationen der ursprünglichen $\breve{s}_l$ sind. Wir gelangen so zu einer zweiten Darstellung der N^2 Doppelintegrale (7.5):

$$(7.7) \qquad \int_{\mathfrak{C}_\nu}\int_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} \omega\,dx\,dz = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathfrak{C}_\nu} Vt_j\,dx \int_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} \tilde{V}^{-1}\,\breve{t}_j\,dz.$$

Die N^2 bilinearen Periodenrelationen, die sich durch Vergleich von (7.5) und (7.7) ergeben, lassen sich in Form einer einzigen Matrizengleichung schreiben:

$$(7.8) \qquad \Pi = F\breve{F}^T.$$

Dabei bedeuten

F, $\breve{F}$ die N-reihigen Matrizen $\left(\int_{\mathfrak{C}_\nu} Vt_j\,dx\right)$, $\left(\int_{\breve{\mathfrak{C}}_\nu} \tilde{V}^{-1}\,\breve{t}_j\,dz\right)$,

T den Übergang zur transponierten Matrix,

Π die Matrix $\left(\int_{\mathfrak{C}_\nu}\int_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} \omega\,dx\,dz\right)$.

Aus der Zusammenstellung (7.5) ergibt sich nun:

(7.9) Π ist eine von u unabhängige Diagonalmatrix und es ist $\det(\Pi) \neq 0$.

Wir ziehen daraus sofort eine Folgerung:

Satz 3. *Ist* $(V t\, dx)$ *eine Basiszeile mod* $d\,(\mathfrak{K}_g)$, *so kann man immer* N *sogen. Fundamentalwege finden, derart daß die Matrix* $F = (\int_{\mathfrak{C}_\nu} V t_j\, dx)$ *(Fundamentalmatrix) nicht-verschwindende Determinante besitzt.*

Beweis. Ist durch die Feststellungen (7.8) und (7.9) erbracht, falls $\mathfrak{b} \neq 1$, wegen der Symmetrie (in $\mathfrak{K}$ und $\breve{\mathfrak{K}}$) der Gleichung (7.8) sogar, falls nur $\mathfrak{b}\mathfrak{g} \neq 1$. Eine multiplikative Klasse mit $\mathfrak{b} = \mathfrak{g} = 1$ kann man nun immer einbetten in eine umfassendere mit schlichten Polen. Wir wählen einfach einen Primteiler $\hat{\mathfrak{p}}$ vom Grade 1 mit zugehörigem Primelement $\hat{p}$, der nicht in $\mathfrak{v}$ aufgeht, und betrachten die Gesamtheit $\hat{\mathfrak{K}}$ der multiplikativen Funktionen, die als Produkte Vr geschrieben werden können, wobei V erzeugendes Element der Klasse $\mathfrak{K}$ ist und r zu $K^{(\mathfrak{v}\hat{\mathfrak{p}})}$ gehört. $\hat{V} = \frac{V}{\hat{p}}$ ist dann normierte Erzeugende für $\hat{\mathfrak{K}}$. Wie im Anschluß an Satz 1 unter (2.7) vermerkt wurde, lassen sich N Differentiale $\in \Delta^{(\mathfrak{v}\hat{\mathfrak{p}})}$ angeben, welche $\equiv 0 \bmod \hat{\mathfrak{p}}$ sind (und deren Nenner nur aus Potenzen eines Primdivisors $\mathfrak{p}_0 \mid \mathfrak{v}$ bestehen), die nach Multiplikation mit $\hat{V}$ ebenso viele mod $d\,(\hat{\mathfrak{K}})$ linear-unabhängige Differentiale liefern. Diese können wir in der Form $V t_j\, dx$ $(j = 1, \ldots, N)$ schreiben, denn sie liegen in der ursprünglichen Klasse $\mathfrak{K}$, da sich der Pol von $\hat{V}$ gegen die Nullstelle des rationalen Bestandteiles herauskürzt. Satz 3 ist nun für die umfassende Klasse $\hat{\mathfrak{K}}$ bereits bewiesen. Demzufolge gibt es $N+1$ Wege $\hat{\mathfrak{C}}_\nu$, welche für $\hat{\mathfrak{K}}$, erst recht also für $\mathfrak{K}$ zulässig sind, derart daß die $(N+1, N)$-reihige Matrix

$$\Big(\int_{\hat{\mathfrak{C}}_\nu} V t_j\, dx\Big) \qquad j = 1, \ldots, N;\ \nu = 1, \ldots, N+1$$

den Rang N hat (die $V t_j\, dx$ lassen sich ja durch Hinzunahme eines Differentials aus $\hat{\mathfrak{K}}\, dx$ zu einer Basis von $\hat{\mathfrak{K}}\, dx / d\,(\hat{\mathfrak{K}})$ ergänzen). Unter ihren Untermatrizen gibt es also eine mit nicht-verschwindender Determinante, sie ist dann Fundamentalmatrix für $\mathfrak{K}$. Aus welchen Wegen $\hat{\mathfrak{C}}_\nu$ sich nun gerade die N Fundamentalwege für $\mathfrak{K}$ rekrutieren, ergibt sich im einzelnen aus den ausführlichen Diskussionen in [8] und [10].

§ 8. Das Orthogonalitätstheorem

Sind die beiden Bestimmungsstücke $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{g} = \mathbf{1}$, so ist die Matrix Π nach wie vor von u unabhängig, gibt aber ihre Gestalt im einzelnen nicht so leicht preis (vgl. [8]). Doch kann man mit unseren Mitteln bequem nachweisen, daß $\det(\Pi) \neq 0$ ist, und kann die Zerlegung von Π in Fundamentalmatrizen F, $\check{F}$ ebenso einfach und explizit durchführen wie im Falle $\mathfrak{b}\mathfrak{g} \neq \mathbf{1}$, was wir jetzt tun wollen.

Wir nehmen wieder $\mathfrak{x}$ als Primteiler ersten Grades von $\mathfrak{v}$ und wählen ein $v\,dx \in \Phi$. $-v\,dx$ ist dann Vertreter von $\check{\Phi}$ und beide sind wegen $\mathfrak{b}\mathfrak{g} = \mathbf{1}$ trivialerweise normiert. Es wird dann

$$\omega = V(x)\, V^{-1}(z)\, \frac{P(x)\,Q(z) - Q(x)\,P(z)}{Q(x)\,Q(z)\,(x-z)}, \tag{8.1}$$

falls $v = \frac{P}{Q}$. Die Voraussetzung $w_{\mathfrak{x}}\,(v\,dx) < 0$ hat zur Folge, daß der Grad $[P]$ des Zählers $\geq [Q] - 1$ ist. Um weiterzukommen, benötigen wir

Hilfssatz 4. *Sind P, Q teilerfremde Polynome und ist $[P] \geq [Q] - 1$, so gilt*

$$\frac{P(x)\,Q(z) - Q(x)\,P(z)}{x-z} = \sum_{j=0}^{[P]-1} x^j\, p_j(z) + \alpha\, P(x)\, P(z), \tag{8.2}$$

wobei die Polynome $p_j(z)$ ($j = 0, \ldots, [P]-1$) einen Grad $< [P]$ haben und über dem Grundkörper Ω linear unabhängig sind. α ist ein Element aus Ω.

Beweis. Man macht sich zunächst klar, wie die Beziehung (8.2) überhaupt zustande kommt: Mit $\alpha = 0$, falls $[P] \geq [Q]$, einfach durch Wegkürzen des Nenners, und mit $\alpha \neq 0$ im Falle $[Q] = [P] + 1$, und zwar auf dem Wege über die Umformung

$$\frac{P(x)\,Q(z) - P(z)\,Q(x)}{x-z}$$

$$= \frac{P(x)\,\{Q(z) + \alpha z\, P(z)\} - P(z)\,\{Q(x) + \alpha x\, P(x)\}}{x-z} + \alpha\, P(x)\, P(z).$$

Man wähle hierbei α so, daß der Grad von $Q(x) + \alpha x P(x) \leq [P]$ wird. Der Zähler des formal-gebrochenen Ausdruckes rechts hat dann in beiden Veränderlichen einen Grad $\leq [P]$, also bekommt man nach dem Kürzen wieder Polynome in x und z vom Grade $< [P]$.

Es sei jetzt ϱ eine Nullstelle von P mit der Vielfachheit $\varkappa(\varrho) > 0$. Wir denken uns die Identität (8.2) μ-mal nach x differenziert und anschließend x zu ϱ spezialisiert. Das ergibt eine Beziehung der Form

$$\sum_{\lambda=0}^{\mu} \frac{P(z)}{(\varrho - z)^{\lambda+1}} \alpha_{\lambda,\mu}(\varrho) = \sum_{j=0}^{[P]-1} p_j(z)\, \beta_{j,\mu}(\varrho), \tag{8.3}$$

sofern $0 \leq \mu < \varkappa(\varrho)$. Hierbei sind die $\alpha_{\lambda,\mu}(\varrho)$, $\beta_{j,\mu}(\varrho)$ gewisse Elemente aus dem Grundkörper Ω und es ist $\alpha_{\mu,\mu}(\varrho) = (-1)^{\mu+1} \mu!\, Q(\varrho) \neq 0$, da P und Q zueinander teilerfremd sind. Wegen der Eindeutigkeit der Partialbruchzerlegung sind nun die $[P]$ Polynome $\frac{P(z)}{(\varrho - z)^{\lambda+1}}$ $(0 \leq \lambda < \varkappa(\varrho))$ über Ω linear-unabhängig (bzw. über einem Erweiterungskörper, welcher die Nullstellen ϱ alle enthält). Daher sind, wie man aus (8.3) ersieht, auch die $[P]$ Polynome

$$\sum_{j=0}^{[P]-1} p_j(z)\, \beta_{j,\mu}(\varrho)$$

und somit auch die $p_j(z)$ selber über Ω linear-unabhängig.

Wir formen den Ausdruck (8.1) mit Hilfe von (8.2) jetzt wie folgt um

$$\begin{aligned} \omega\, dx\, dz &= \sum_{j=0}^{[P]-1} V(x) \frac{x^j}{Q} dx\, V^{-1}(z) \frac{p_j(z)}{Q} dz \\ &\quad + \alpha\, V(x)\, v(x)\, dx\, V^{-1}(z)\, v(z)\, dz \\ &= \sum_{j=0}^{[P]-1} V(x) \frac{x^j}{Q} dx\, V^{-1}(z) \frac{p_j(z)}{Q} dz \\ &\quad - \alpha \frac{\partial}{\partial x}(V(x)) \frac{\partial}{\partial z}(V^{-1}(z)). \end{aligned} \tag{8.4}$$

Aus (2.8), (2.9) in Verbindung mit Hilfssatz 4 fließt nun unmittelbar: Die Differentiale $V(x)\frac{x^j}{Q}\,dx$ bilden eine Basis von ${}^{\mathfrak{K}}dx/d(\mathfrak{K})$, die $V^{-1}(z)\frac{p_j(z)}{Q}\,dz$ eine Basis von ${}^{\breve{\mathfrak{K}}}dz/d(\breve{\mathfrak{K}})$. Es gibt daher auf Grund von Satz 1 je N Basiswege $\mathfrak{C}_\nu$, $\breve{\mathfrak{C}}_\mu$, welche für $\mathfrak{K}$ bzw. $\breve{\mathfrak{K}}$ zulässig sind, derart daß die N^2 Perioden $\int\limits_{\mathfrak{C}_\nu} V\frac{x^j}{Q}\,dx$, $\int\limits_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} V^{-1}\frac{p_j(z)}{Q}\,dz$ sich zu einer Fundamentalmatrix F, $\breve{F}$ von $\mathfrak{K}$ bzw. $\breve{\mathfrak{K}}$ anordnen lassen. Vermöge (8.4) und den daraus resultierenden Periodenrelationen

$$\int\limits_{\mathfrak{C}_\nu}\int\limits_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} \omega\,dx\,dz = \sum_{j=0}^{[P]-1} \int\limits_{\mathfrak{C}_\nu} \frac{Vx^j}{Q}\,dx \int\limits_{\breve{\mathfrak{C}}_\mu} \frac{V^{-1}p_j(z)}{Q}\,dz$$

ergibt sich also schließlich

$$\Pi = F\breve{F}^T.$$

Da nach Satz 3 $\det(F) \neq 0$, $\det(\breve{F}) \neq 0$, ist also auch $\det(\Pi) \neq 0$. Wir fassen das Resultat von § 7, § 8 wie folgt zusammen:

Satz 4. *Ist der Grundkörper Ω so beschaffen, daß die Voraussetzung (7.1) erfüllt ist und der Divisor $\mathfrak{v}\mathfrak{b}\mathfrak{g}$ mindestens einen Primteiler ersten Grades besitzt, so kann man zu jeder Basis von ${}^{\mathfrak{K}}/d(\mathfrak{K}_{\mathfrak{g}})$ eine komplementäre Basis von ${}^{\breve{\mathfrak{K}}}dx/d(\breve{\mathfrak{K}}_{\mathfrak{b}})$ finden, derart daß die aus ihnen gebildeten Fundamentalmatrizen F, $\breve{F}$ in der Beziehung stehen*

$$\Pi = F\breve{F}^T$$

mit einer konstanten Matrix Π.

§ 9. Beispiel: Die Laplacesche Differentialgleichung

Wir arbeiten wieder mit einem primitiven Element x, dessen Nenner-Divisor $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{v}\mathfrak{b}$ aufgeht. An Stelle des Divisors $\mathfrak{g}$ führen wir das ihm entsprechende doppelwurzelfreie Polynom G ein, das von u unabhängig sei. Wir setzen ferner voraus, daß es einen normierten Vertreter der Form

$$\left(u + \frac{S}{Q}\right) dx$$

in Φ gibt, wobei S, Q ebenfalls von u unabhängig sind. Die zugeordnete multiplikative Klasse wird dann von der Funktion

$$V = e^{ux} \exp\left(\int^{x} \frac{S}{Q}(\xi)\, d\xi\right) \tag{9.1}$$

erzeugt, und es ist offenbar $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} V = x^\nu V$. Ist daher G_0 ein Polynom, welches nur Primteiler von G aufweist, so hat die aus den N Differentialen $\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu} VG_0\, dx = VG_0\, x^\nu\, dx$ bestehende Zeile Basischarakter, der Feststellung (2.10) zufolge. Das Differentialsystem (4.5) ist also in diesem Falle nichts anderes als eine lineare Differentialgleichung N-ter Ordnung für die Integrale $\int\limits_{\mathfrak{C}} VG_0\, dx$, die in engem Zusammenhang steht mit der linearen Beziehung (2.10) für die rationalen Differentiale $x^\nu G_0\, dx$. Letztere schreibt sich in unserem Falle, wenn man von den rationalen zu den multiplikativen Funktionen übergeht, in der Form

$$\{(uQ + S)\, GG_0 + (QGG_0)'\}\, V\, dx \in d\,(\mathfrak{K}_0)$$

oder

$$\left\{uGQ + SG + \frac{(QGG_0)'}{G_0}\right\} G_0\, V\, dx \in d\,(\mathfrak{K}_0) \tag{9.2}$$

(man beachte, daß $(QGG_0)'$ durch G_0 teilbar ist.). Nun ist partielle Differentiation nach u bei VG_0 gleichbedeutend mit der Anbringung des Faktors x. Daher ändert sich an (9.2) nichts, wenn innerhalb der $\{\,\}$ x ersetzt wird durch den Differentialoperator $D = \frac{\partial}{\partial u}$. Es genügen daher die Integrale $\int\limits_{\mathfrak{C}} VG_0\, dx$ einer Laplaceschen Differentialgleichung

$$\{u\, K(D) + L(D)\}\, y = 0$$

mit

$$\begin{aligned} QG &= K \\ SG &= L - K' - K\frac{G_0'}{G_0}\,. \end{aligned} \tag{9.3}$$

Dabei gilt:

(9.4)
a) $(Q, G) = 1$, $(S, Q) = 1$,

b) G ist quadratfrei und enthält sämtliche Primteiler von G_0,

c) der Bruch $\frac{S}{Q}$ gestattet keine Aufspaltung der Form $\frac{S_1}{Q_1} + \frac{R'}{R}$, wobei R ein zu Q_1 teilerfremdes Polynom ist (da $v\,dx$ normiert),

d) der größte gem. Teiler (K, K', L) der drei Polynome K, K', L ist gleich 1.

d) bedarf einer näheren Begründung. Dividiert man die beiden Gleichungen (9.3) durcheinander, so ergibt sich

$$\frac{L}{K} - \frac{K'}{K} = \frac{S}{Q} + \frac{G_0'}{G_0}, \tag{9.5}$$

und daraus folgt durch Wegkürzen gemeinsamer Teiler von G_0 und G_0'

$$\frac{L}{K} - \frac{K'}{K} = \frac{S}{Q} + \frac{H}{\tilde{G}},$$

wobei $\tilde{G}$ der quadratfreie Kern von G_0 und somit Teiler von G ist. Daher gilt erst recht $(Q, \tilde{G}) = 1$. $Q\tilde{G}$ ist also der Nenner einer unkürzbaren Bruchdarstellung von $\frac{L-K'}{K}$, und dies besagt wegen (9.3) $\frac{G}{\tilde{G}} = (L - K', K)$. $(L - K', K)$ ist daher ein solcher Teiler von K, welcher zum komplementären Teiler $K \cdot (L - K', K)^{-1}$ prim und selbst quadratfrei ist, und das kann dann und nur dann der Fall sein, wenn $(K, K', L) = 1$ ist.

Zu zwei beliebig vorgegebenen Polynomen $K \neq 0$, L, welche die Eigenschaft (9.4) d) besitzen, kann man auf eine und nur eine Weise Polynome Q, S, G, G_0 finden, derart daß die Beziehungen (9.3) mit sämtlichen Nebenbedingungen (9.4) a)–d) erfüllt sind: Aus der Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion

$$\frac{L}{K} - \frac{K'}{K}$$

bestimme man das größte Polynom G_0, dessen logarithmische Ableitung sich abspalten läßt in der Form

$$\frac{L}{K} - \frac{K'}{K} = \frac{S}{Q} + \frac{G_0'}{G_0} = \frac{S}{Q} + \frac{H}{\hat{G}} \tag{9.6}$$

mit $(Q, G_0) = 1$. $\hat{G}$ ist wieder der quadratfreie Kern von G_0. Vergleich von Zähler und Nenner ergibt die Lösung von (9.3) mit allen verlangten Eigenschaften.

Aus (9.5) ersieht man noch, daß VG_0 (vgl. (9.1)) auch in der Form

$$e^{ux} \frac{\exp\left(\int^{x} \frac{L}{K}(\xi)\, d\xi\right)}{K(x)}$$

geschrieben werden kann. Die Nullstellen von G sind entweder Nullstellen von VG_0 oder solche von $(L - K', K)$. Demnach können wir das Resultat wie folgt aussprechen:

Satz 5. *Ist $K \neq 0$ und genügen K, L der Bedingung $(K, K', L) = 1$, so besitzt die Laplacesche Differentialgleichung*

$$\{u K(D) + L(D)\} y = 0$$

ein Fundamentalsystem von Lösungen der Form

$$\int_{\mathfrak{C}} e^{ux} \frac{\exp\left(\int^{x} \frac{L}{K}(\xi)\, d\xi\right)}{K(x)}\, dx.$$

Die Wege $\mathfrak{C}$ werden hierbei nach § 5 oder gem. Röhrl [8], *§ 1 konstruiert, wobei als die vier Punktsorten einfach die exp. Sing., Verzweigungsstellen, Pole und Nullstellen des Integranden sowie des größten gem. Teilers von $L - K'$ und K zu nehmen sind.*

Schlußbemerkung

Falls die Bedingung (4.1) hinsichtlich der Klasse Φ nicht erfüllt ist, genügen die Periodenintegrale keinem Differentialsystem mehr. Die Matrix Π ist dann von u abhängig, ihre Determinante verschwindet aber nicht identisch. Mit dieser Modifikation bleiben alle unsere Betrachtungen, insbesondere die Aussagen von Satz 4 und Satz 5, gültig.

Literaturverzeichnis

[1] G. D. Birkhoff, Equivalent Singular Points of Ordinary Linear Differential Equations. Trans. Am. Math. Soc. 10, 436–470 (1909).

[2] E. Böhmer, Differenzengleichungen und bestimmte Integrale. Leipzig: K. F. Kohler, 1939.

[3] H. Hasse, Zahlentheorie. Berlin: Akademieverlag 1949.

[4] J. Horn, Integration linearer Differentialgl. durch Laplacesche Integrale und Fakultätenreihen. Jber. DMV 24, 309–329 (1915).

[5] R. König, Über Polynomsysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen. I. J. f. d. reine u. angew. Math. 159, 67 (1928).

[6] R. König-H. Schmidt, Über Polynom- und allgemeinere Funktionssysteme, die aus der hypozykloidischen Abbildung entspringen. II. J. f. d. reine u. angew. Math. 162, 69 (1930).

[7] H. Röhrl, Über Differentialsysteme, welche aus multiplikativen Klassen mit exponentiellen Singularitäten entspringen.
I. Math. Annalen 123, 53–75 (1951).

[8] II. Math. Annalen 124, 187–218. (1952).

[9] III. Math. Annalen 125, 448–466 (1953).

[10] H. Schmidt, Über multiplikative Funktionen und die daraus entspringenden Differentialsysteme. Math. Annalen 105, 325–380 (1931).