BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Direkt-infinitesimalgeometrische Eigenschaften und lokale Ordnungswerte von Bogen

Von **Otto Haupt** in Erlangen

Vorgelegt am 7. Februar 1958

1. Zweck der folgenden Zeilen ist ein Hinweis auf Beispiele von Zusammenhängen zwischen direkt-infinitesimalgeometrischen Eigenschaften von Bogen und ihren lokalen Ordnungswerten (vgl. auch Anmerkung (1) und (2)). In Betracht kommt dabei sowohl der Fall (I), in welchem durch die lokalen Ordnungswerte des Bogens B direkt-infinitesimalgeometrische Eigenschaften von B bestimmt werden, als auch umgekehrt der Fall (II), in welchem aus direkt-infinitesimalgeometrischen Eigenschaften von B geschlossen werden kann auf die lokalen Ordnungswerte von B ev. mit Ausnahme einer auf B nirgends dichten Menge von Punkten.

Die gemeinten Zusammenhänge seien zunächst (Nr. 2.) an einigen schon bekannten Beispielen erläutert und veranschaulicht. Sodann (Nr. 3 und 4) werden zwei neue Beispiele angegeben.

Anmerkung. (1) Als direkte Infinitesimalgeometrie bezeichnen wir hier diejenige Richtung in der im weitesten Sinne verstandenen Differentialgeometrie, in welcher systematisch auf die Zuhilfenahme eines Kalküls bei den Begriffsbildungen und Beweisen verzichtet wird, es sei denn, daß ein solcher Kalkül aus den den Ausgangspunkt bildenden geometrischen Voraussetzungen hergeleitet werden kann. (vgl. [2], [3], [13]).* – (2) Lokale Ordnungswerte sind die Ordnungswerte der einzelnen Punkte p von B, nämlich – kurz gesagt – die Minima der Ordnungswerte der Umgebungen der Punkte p auf B; und der Ordnungswert einer Umgebung U von p auf B ist – kurz gesagt – das Maximum

* In eckiger Klammer stehende Ziffern im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schlusse der Note.

der Mächtigkeiten der Durchschnitte von U mit den Ordnungscharakteristiken des jeweiligen (Juelschen) ordnungstheoretischen Problems.

2. Bekannte Beispiele.

2.1. Für den Fall (I) (vgl. Nr. 1.).

2.1.1. Besitzt der Punkt p des Bogens B im (euklidischen) R_n endlichen Ordnungswert bezüglich der Hyperebenen des R_n als Ordnungscharakteristiken, so existieren in p eindeutig die vorderen sowie die geeignet erklärten (vgl. [15]) hinteren Tangential-(schmieg)halbräume der Dimensionen k mit $0 \leq k \leq n-1$ (vgl. [14], auch [15]). Besitzt p höchstens den Ordnungswert $n+1$, so stimmt in jedem inneren Punkt $q \in B$, mit Ausnahme einer abzählbaren Menge, der k-dimensionale vordere Tangentialhalbraum mit dem hinteren überein [12], [5].[1]

2.1.2. Es sei C ein Konvexbogen in der Ebene mit dem lokalen Ordnungswert Drei bezüglich der Kreise als Ordnungscharakteristiken. Dann existiert, mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten, in jedem Punkt p von C genau ein Schmiegkreis (Kreisparatingente) $K(p)$, und dieser ist vom Nullkreis verschieden. Alle diese $K(p)$ liegen gleichartig zu C; d. h.: Wird C orientiert und $K(p)$ mit der durch die Orientierung von C auf $K(p)$ induzierten Orientierung versehen, so liegt die vordere Umgebung von p auf $K(p)$ für alle diese p auf der gleichen Seite von C [9].

2.2. Für den Fall (II).

2.2.1. Ein Oval O in der (euklidischen) Ebene, für welches in jedem seiner Punkte genau ein (von einem Nullkreis verschiedener) Schmiegkreis (Kreisparatingente) existiert, besitzt mindestens vier Scheitel, d. h. Punkte, deren Ordnungswert bezüglich der Kreise als Ordnungscharakteristiken größer als Drei ist. (Verallgemeinerungen: Für Bogen im (projektiven) R_n bezüg-

---

[1] In [13] wird u. a. gezeigt, daß Differenzierbarkeitseigenschaften im Sinne der klassischen Differentialgeometrie aus ordnungstheoretischen Annahmen gefolgert werden können.

lich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken in [1], [11]; für ebene Bogen aber bezüglich allgemeinerer Ordnungscharakteristiken z. B. in [7]).

Anmerkung. Verzichtet man im Vierscheitelsatz auf die Forderung, daß überall die Kreisparatingente eindeutig bestimmt sein soll, so kann im allgemeinen nur behauptet werden, daß mindestens zwei Scheitel existieren [7].

2.2.2. Ein den Voraussetzungen in Nr. 2.2.1. genügendes Oval (ohne Geraden als Schmiegkreise) mit endlich vielen Scheiteln besitzt den Ordnungswert Vier bezüglich der Kreise als Ordnungscharakteristiken genau dann, wenn O von keinem Kreis in mehr als zwei Punkten berührt wird. Daher besitzt dann jeder Scheitel den Ordnungswert Vier und jeder andere Punkt des Ovals den Ordnungswert Drei (Verallgemeinerung in [8]).

2.2.3. Ein Kontinuum K im R_n, das keine n zur gleichen Hyperebene parallele, 1-dimensionale Paratingenten besitzt, ist ein Bogen vom Ordnungswert n bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken [10].

2.2.4. Der Satz von Herrn A. Rosenthal [16] über ebene dualisierbare (Parameter-) Kurven D. Dabei ist D eindeutiges, stetiges, streckenfreies Bild $p = p(t) \in R_2$ der Einheitsstrecke $J = (0 \leq t \leq 1)$ mit folgenden Eigenschaften: An jeder Stelle $(t, p(t))$ von D existiert genau eine Tangente (ohne daß dabei die Existenz genau einer vorderen oder hinteren Halbtangente gefordert wird); diese Tangente ist stetige Funktion $T(t)$ von t; der Schnittpunkt von $T(t)$ mit $T(t')$ konvergiert gegen $p(t)$, wenn t' gegen t konvergiert. Der Rosenthalsche Satz besagt dann, daß jede Stelle von D, abgesehen von einer auf J nirgends dichten Menge von Urbildpunkten, den Ordnungswert Zwei bezüglich der Geraden als Ordnungscharakteristiken besitzt.

3. Der Rosenthalsche Satz (Nr. 2.2.4.) läßt sich für (Parameter-) Kurven D im R_n, $n \geq 2$, verallgemeinern. Der einfacheren Formulierungen halber erläutern wir die gemeinte Verallgemeinerung für den speziellen Fall, daß die Abbildung $p \mid J$, durch welche D definiert wird, topologisch, also D ein „einfacher Bogen" ist und die Stellen $(t, p(t))$ mit ihren „Trägerpunkten" $p(t)$ identifiziert werden dürfen. Es heiße D *tangierbar*, wenn D in jedem seiner Punkte p genau eine Tangente $T(p)$ besitzt. Die Tangente eines tangierbaren Bogens D heiße von *beschränkter Schwankung* in $p \in D$, wenn eine Umgebung $U = U(p)$ von p auf D und ein abgeschlossener, konvexer Doppelkegel $F = F(p)$ mit p als Spitze existiert von folgender Art: Die durch p gezogenen Parallelen zu den Tangenten $T(q)$ in den Punkten q von U liegen in F. (Dies ist eine Abschwächung der Forderung, daß $T(p)$ stetig sei). Schließlich heiße die Tangente $T(p)$ im Punkt p eines tangierbaren Bogens D *eingeschränkt beweglich*, wenn zu jeder Schmieghyperebene Z an D in p zwei Umgebungen $U' = U'(p; Z)$ und $W' = W'(p; Z)$ von p auf D gehören derart, daß für die Tangente $T(p')$ in jedem $p' \in U'$ der Durchschnitt von $T(p')$ mit $Z \cap W'$ nicht leer ist. Dabei wird eine Hyperebene Z als Schmieghyperebene in p an D bezeichnet, wenn Z Limes von Hyperebenen durch p und $n-1$ gegen p konvergierende Punkte von D ist. Es gilt dann der

Satz. Vor. *Es sei D ein tangierbarer Bogen im R_n, der keinen in einer Hyperebene gelegenen Teilbogen enthält. Ferner sei in jedem Punkt von D die Tangente von beschränkter Schwankung und eingeschränkt beweglich.*

Beh. *Abgesehen von einer auf D nirgends dichten Menge, besitzt jeder Punkt von D endlichen (ev. beschränkten) Ordnungswert bezüglich der Hyperebenen als Ordnungscharakteristiken.*

Zusatz. Außerdem gibt es zu jedem Punkt von D eine Umgebung U auf D und n unabhängige Büschel paralleler Hyperebenen derart, daß U den Ordnungswert Eins besitzt bezüglich eines jeden dieser Büschel und daß in jedem Punkt von U die vordere und die hintere (vgl. [15]) Halbtangente übereinstimmen.

Anmerkung. Für $n = 2$ besitzt, abgesehen von den Punkten der nirgends dichten Ausnahmemenge, jeder Punkt den Ordnungswert Zwei (wie im Rosenthalschen Satz). Für $n \geq 3$ besitzt jeder solche Punkt den Ordnungswert n jedenfalls dann, wenn über die Voraussetzung unseres Satzes hinaus die $(n+1)$-

Limessekanten $L(p_1, \ldots, p_r; p)$ durch die $p_1, \ldots, p_r$ und p eindeutig bestimmt sind (vgl. Nr. 4.1.).

Der vorstehende Satz gilt mutatis mutandis auch für Kontinua (im R_n) und – wie schon bemerkt – für Parameterkurven.

4. Wie man weiß, besitzt jeder ebene, streckenfreie, bezüglich der Geraden als Ordnungscharakteristiken ordnungshomogene Bogen den Ordnungswert Zwei oder Unendlich; dabei heißt ein Bogen *ordnungshomogen*, wenn jeder seiner Punkte den gleichen Ordnungswert besitzt. Entsprechend hat, wie man ebenfalls weiß, jeder ebene, keine Kreisbogen enthaltende, bezüglich der Kreise als Ordnungscharakteristiken ordnungshomogene Bogen den Ordnungswert Drei oder Unendlich; und dies gilt allgemeiner, wenn an Stelle der Kreise (stetig) differenzierbare Ovale treten, deren jedes durch drei, im allgemeinen beliebige, Punkte der Ebene eindeutig bestimmt ist, wobei die Geraden zu diesen Ovalen gerechnet werden und gewisse andere Bedingungen erfüllt sind.

Ob ein entsprechender Satz über die Ordnungswerte ordnungshomogener Bogen ausnahmslos auch für Ordnungscharakteristiken gilt mit – unter anderem – der Eigenschaft, daß die einzelne Ordnungscharakteristik durch k, im allgemeinen beliebige, Punkte der Ebene bestimmt wird, ist bisher nicht bekannt. Ein solcher Satz gilt aber bei derartigen (allgemeineren) Ordnungscharakteristiken jedenfalls dann, wenn dem zu betrachtenden Bogen u. a. die Bedingung auferlegt ist, daß die $(k+1)$-Paratingente, soweit sie in einem Punkt $p \in B$ existiert, eindeutig bestimmt ist; unter einer $(k+1)$-*Paratingente* in p an B wird dabei jeder Limes von Ordnungscharakteristiken durch $k+1$ gegen p konvergierende Punkte von B verstanden.

Wir erläutern die an B, an die Ordnungscharakteristiken und die $(k+1)$-Paratingenten dabei zu stellenden Forderungen im einzelnen für den Fall, daß als Ordnungscharakteristiken die Parabeln höchstens $(k-1)$-ten Grades $(3 \leq k)$ zugrunde gelegt werden, also $y = a_{k-1} x^{k-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ (bezogen auf kartesische Koordinaten x, y). Der betrachtete Bogen B sei (wie dies für die Parabeln der Fall ist) vom Ordnungswert Eins bezüglich des Büschels der zur y-Achse parallelen Geraden, also darstellbar durch $y = f(x)$ mit eindeutigem, stetigem $f(x)$, wobei $x \in J = [a, b]$. Weiter sollen die $(k+1)$-Paratingenten (nicht ausgeartet, d. h.) selbst Parabeln und, wenn in p vorhanden, eindeutig bestimmt sein durch p. Eine Parabel ist durch k Punkte $(x_\varkappa, y_\varkappa)$, $\varkappa = 1, \ldots, k$, eindeutig bestimmt, sofern keine zwei der $x_\varkappa$ einander gleich sind. Ferner entspricht, der Orientierung von J im Sinne z. B. wachsender x eindeutig eine *Orientierung des Bogens B, der Ordnungscharakteristiken* sowie *der $(k+1)$-Paratingenten* und damit die Feststellung dessen, was unter einer vorderen bzw. hinteren Umgebung von p auf B bzw. auf einer Ordnungscharakteristik oder $(k+1)$-Paratingente zu verstehen ist.

Ist nun B zugleich ordnungshomogen von endlichem Ordnungswert, aber von mindestens dem Ordnungswert $k+2$ (bezüglich der Parabeln), so zeigt man mit Hilfe des sogenannten Kontraktionssatzes (vgl. [4]), daß Punkte q auf B existieren, in denen es zwei $(k+1)$-Paratingenten gibt, auf deren einer eine vordere Umgebung von q unterhalb von B verläuft, während auf der anderen eine vordere Umgebung von q oberhalb B liegt. Solche zwei $(k+1)$-Paratingenten sind aber verschieden. – Daß keine ordnungshomogenen Bogen mit dem Ordnungswert $k+1$ existieren, folgt aus einem allgemeinen Satz [4]. Wir haben also den

Satz. *Es sei c das System der Parabeln $y = p(x)$ von höchstens dem Grade $k-1$ in der x, y-Ebene. Ferner sei B ein Bogen $y = f(x)$ mit eindeutiger $(k+1)$-Paratingente bezüglich c. Ist der Bogen ordnungshomogen bezüglich c, so besitzt er entweder den Ordnungswert k oder den Ordnungswert Unendlich.*

4.1. Der (in Nr. 4 am Beispiel der Parabeln als Ordnungscharakteristiken erläuterte) Satz über die Ordnungswerte ordnungshomogener Bogen mit eindeutiger $(k+1)$-Paratingente kann zum Beweise des entsprechenden Satzes für Bogen im R_n, $n \geq 3$, herangezogen werden. Man zeigt nämlich in vollständiger Induktion durch Projektion: Jeder ordnungshomogene Bogen enthält Teilbogen, die auf einem Kegel K liegen; dabei werden auf K durch die nicht durch die Kegelspitze gehenden Hyperebenen Kurven ausgeschnitten, die – als Ordnungscharakteristiken – zusammen mit B den Voraussetzungen des in Nr. 4 angedeuteten allgemeinen Satzes für $k = n$ genügen, falls die $(n+1)$-*Limessekanten* $L(p_1, \ldots, p_r; p)$ an B, soweit sie existieren, durch die p_ϱ und p eindeutig bestimmt sind. Unter $L(p_1, \ldots, p_r; p)$ mit $0 \leq r \leq n-1$ ist hierbei jeder Limes von Hyperebenen H durch die $p_1, \ldots, p_r$ auf B und weitere $n+1-r$ gegen p konvergierende Punkte von B zu verstehen; dabei sind $r; p_1, \ldots, p_r \in B$ und ebenso $p \in B$ beliebig, insoweit nur Hyperebenen H durch $n+1$ Punkte der erwähnten Art existieren. Es ergibt sich so der

Satz. Vor. *Es sei B ein Bogen im R_n. Es soll jede Limessekante $L(p_1, \ldots, p_r, p)$ an B, soweit sie existiert, eindeutig durch die $p_1, \ldots, p_r; p$ bestimmt sein.*

Beh. *Ist B überdies ordnungshomogen bezüglich der Hyperebenen, so kann B nur die Ordnungswerte n oder Unendlich besitzen.*

Der Satz läßt sich auch auf Parameterkurven ausdehnen.

1. Anmerkung. Offen ist die Frage, ob der vorstehende Satz ohne die Einschränkung gilt, daß die $L(p_1, \ldots, p_r; p)$ eindeutig bestimmt sind.

2. Anmerkung. Eine früher [6] angegebene Differenzierbarkeitsbedingung, derzufolge bei ordnungshomogenen Bogen nur der Ordnungswert n auftritt, ist nicht direkt-geometrischer Natur und übrigens vermutlich stärker als die obige Limessekantenbedingung.

Literatur

[1] M. Barner, Über die Mindestanzahl stationärer Schmiegebenen bei geschlossenen streng-konvexen Raumkurven. Abh. math. Seminar Univ. Hamburg 20 (1956) 196–215.

[2] G. Bouligand, Introduction à la géométrie infinitésimale directe, Paris 1932.

[3] G. Bouligand, Essai sur l'unité des méthodes directes. Mémoires Soc. royale Sci. Liège (3) 19 (1934) H. 4, 1–88.

[4] Haupt, Zur Theorie der Ordnung reeller Kurven in der Ebene usw. Monatsh. f. Math. u. Phys. 40 (1933) 1–53.

[5] Haupt, Ein Satz über die reellen Raumkurven vierter Ordnung usw. Math. Ann. 108 (1933) 126–142.

[6] Haupt, Zur Differentialgeometrie der Kurven und Flächen, Journ. f. d. r. u. angew. Math. 169 (1933) 177–185.

[7] Haupt, Zur Verallgemeinerung des Vierscheitelsatzes und seiner Umkehrung. Annali di mat. pura ed appl. (4) 27 (1948) 293–320; ebenda 28 (1949) 345.

[8] Haupt, Über eine Beziehung zwischen Ordnung und Singularitäten. Math. Nachr. 4 (1950) 81–96.

[9] Haupt, Über Bogen mit lauter gleichartigen Schmieggebilden. Portugaliae Math. 13 (1953), 1–23.

[10] Haupt, Bestimmung der Kontinua im E_n ohne n richtungsabhängige Paratingenten ($n \geq 2$). Bayer. Akad. d. Wiss., Sitz.-Ber. d. math.-naturw. Kl. Jahrg. 1956, 295–327.

[11] Haupt, Streng-konvexe Bogen und Kurven in der direkten Infinitesimalgeometrie. Arch. d. Math. (im Druck).

[12] J. Hjelmslev, Introduction à la théorie des suites monotones, Overs. over d. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Forh., 1914, Nr. 1.

[13] J. Hjelmslev, Die graphische Geometrie. Forhandl. Ättonde skandinav. Mat. Kongr. Stockholm 1934, 3–12 (1935).

[14] A. Marchaud, Sur les continus d'ordre borné. Acta math. 55 (1930) 67–115.

[15] I. Sauter, Zur Theorie der Bogen n-ter Realitätsordnung im R_n. (1. Mitt.) Math. Zeitschr. 41 (1936) 507–536.

[16] A. Rosenthal, Über die Singularitäten der reellen, ebenen Kurven. Math. Ann. 73 (1913) 480–521.