BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1958

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C.H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Geordnete Gruppen mit Zerlegungseigenschaft

Von Heinz Bauer in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 4. Juli 1958

1. Einleitung

Man verdankt G. Choquet [4]–[7]* eine Reihe tiefliegender und für Anwendungen in der Analysis bedeutsamer Sätze über die Existenz und Eindeutigkeit von Integraldarstellungen mit Hilfe extremaler Elemente konvexer Kegel. Es sei nämlich E ein lokalkonvexer Raum (über dem Körper der reellen Zahlen), P ein separierter, konvexer, spitzer Kegel in E mit der Spitze $0 \in P$ und mit kompakter Basis B, sowie B_e die Menge aller Extremalpunkte von B. Dann ist jeder Punkt x_0 von P die Resultante mindestens eines von der abgeschlossenen Hülle von B_e in B getragenen, positiven (Radonschen) Maßes μ auf B, d. h. es gilt

$$x_0 = \int x \, d\mu.$$

Wenn B_e in B abgeschlossen ist, so wird μ speziell von B_e getragen. Ist jedoch B_e in B nicht abgeschlossen, so sichert der Existenzsatz von Choquet für jeden Punkt $x_0 \in P$ die Existenz mindestens eines von B_e getragenen, positiven Maßes μ auf B mit der Resultante x_0 unter der Voraussetzung, daß die Basis B metrisierbar ist. Der Eindeutigkeitssatz von Choquet besagt (ohne eine über die Kompaktheit hinausgehende Voraussetzung über B): Ist der Kegel P bezüglich seiner natürlichen Ordnung $\leq$ ein Verband, so ist jeder Punkt von P die Resultante höchstens eines von B_e getragenen, positiven Maßes auf B.

Beim Studium der Choquetschen Arbeiten habe ich bemerkt, daß der Eindeutigkeitssatz gültig bleibt, wenn man von P nur

* Zahlen in eckiger Klammer verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß dieser Note.

eine Folgerung aus der Verbandseigenschaft, nämlich die folgende Zerlegungseigenschaft fordert: *Zu je drei Elementen* $a, b, x \in P$ *mit* $x \leq a + b$ *existieren Elemente* $a', b' \in P$ *mit* $x = a' + b'$ *sowie* $a' \leq a$ *und* $b' \leq b$. Diese Bemerkung hat dann eine interessante Konsequenz: Immer dann, wenn jeder Punkt $x_0 \in P$ die Resultante mindestens eines von B_e getragenen, positiven Maßes auf B ist, erweist sich diese Zerlegungseigenschaft als äquivalent mit der Eigenschaft von P, ein Verband zu sein. Besitzt dann nämlich P die Zerlegungseigenschaft, so ist P isomorph zum Kegel $\mathcal{M}_e$ aller von B_e getragenen, positiven Maße auf B. Da $\mathcal{M}_e$ ein Verband ist, muß auch P ein solcher sein. Die beiden Eigenschaften sind somit gleichwertig, falls entweder B_e in B abgeschlossen oder B metrisierbar ist. Da die Existenz positiver, auf B_e konzentrierter Maße mit vorgegebener Resultante nur in Spezialfällen gesichert ist, läßt sich durch diese Überlegung nicht entscheiden, ob die beiden Eigenschaften etwa sogar für beliebige Kegel P mit kompakter Basis B äquivalent sind.

Daß dies tatsächlich zutrifft, soll in dieser Note gezeigt werden. Die Äquivalenz der beiden Eigenschaften ergibt sich dabei schon allgemeiner in geordneten abelschen Gruppen, in welchen die Menge der positiven Elemente Dedekind-vollständig ist. Die Dedekind-Vollständigkeit des Kegels P erweist sich als eine Folgerung aus der Kompaktheit seiner Basis B.

Unser Resultat ist auch von Interesse im Hinblick auf ein Beispiel von I. Namioka [8], S. 45, wonach es geordnete Banach-Räume gibt, deren positive Kegel die Zerlegungseigenschaft besitzen, aber keine Verbände sind.

2. Dedekind-vollständige geordnete Gruppen mit Zerlegungseigenschaft

Es sei G eine *abelsche*, additiv geschriebene Gruppe und P eine Teilmenge von G mit folgenden zwei Eigenschaften:

$$(P_1) \qquad P + P \subset P;$$

$$(P_2) \qquad P \cap (-P) = \{0\}.$$

Dann definiert bekanntlich[1] P in G eine mit der Gruppenstruktur verträgliche Ordnungsrelation (teilweise Ordnung):

$$\text{(R)} \qquad x \leq y \iff y - x \in P \qquad (x, y \in G).$$

In bezug auf diese ist P die Menge aller positiven Elemente, d. h. aller $x \in G$ mit $0 \leq x$. Ist umgekehrt $\leq$ eine mit der Gruppenstruktur verträgliche Ordnungsrelation, so besitzt die Menge P aller positiven Elemente die Eigenschaften (P_1) und (P_2) und P definiert seinerseits wieder die Ausgangsrelation $\leq$.

Insbesondere ist somit P hinsichtlich der induzierten Ordnungsrelation eine geordnete Menge.

Wir nennen die Menge P *Dedekind-vollständig*, wenn gilt:

(P_V) *Für jede nicht leere, nach unten filtrierende Teilmenge Q von P existiert* inf Q *in P, d. h. Q besitzt in der geordneten Menge P eine größte Minorante.*

Dabei heißt bekanntlich $Q \subset P$ *nach unten* (bzw. oben) *filtrierend*, wenn zu je zwei Elementen $x_1, x_2 \in Q$ ein Element $x \in Q$ existiert mit $x \leq x_1$ und $x \leq x_2$ (bzw. $x_1 \leq x$ und $x_2 \leq x$).

Schließlich wollen wir sagen, es besitzt P die *Zerlegungseigenschaft*, wenn gilt:

(P_Z) *Zu je drei Elementen $a, b, x \in P$ mit*

$$x \leq a + b$$

existieren Elemente $a', b' \in P$ mit

$$x = a' + b', \; a' \leq a \quad \textit{und} \quad b' \leq b.$$

Hiermit gleichwertig ist die Eigenschaft:

$$(P'_Z) \qquad P \cap (a + b - P) = P \cap (a - P) + P \cap (b - P) \qquad (a, b \in P).$$

Beispielsweise besitzt P die Zerlegungseigenschaft, wenn G ein Verband, also eine verbandsgeordnete Gruppe ist oder wenn allgemeiner P bezüglich der Ordnungsrelation $\leq$ ein *Verband*

[1] Vgl. hierzu und für das Folgende N. Bourbaki [1], Chap. VI und [2], Chap. II.

ist. In der Tat: in der mit der induzierten Ordnungsrelation versehenen Untergruppe $G' = P - P$ von G ist P die Menge aller positiven Elemente. Nach [1], S. 13 (prop. 8) ist daher G' eine verbandsgeordnete Gruppe; nach [1], S. 14 (corollaire) folgt hieraus die Zerlegungseigenschaft für P.

Der einleitend angekündigte allgemeine Satz gestattet nun eine Aussage in der umgekehrten Richtung:

Satz 1. *Es ist P ein Verband, falls P die Zerlegungseigenschaft besitzt und Dedekind-vollständig ist.*

Dem Beweis stellen wir zwei Hilfssätze und einige Bemerkungen voran.

Hilfssatz 1. *Es sei P Dedekind-vollständig und Q eine nicht leere, nach unten filtrierende Teilmenge von P. Für jedes Element $a \in P$ ist dann auch die Menge $a + Q$ eine nach unten filtrierende Teilmenge von P. Zwischen den größten Minoranten in P dieser beiden Mengen besteht die Beziehung*

$$\inf (a + Q) = a + \inf Q .$$

Beweis. Mit Q ist auch die Menge $a + Q$ nach unten filtrierend, da die Ordnungsrelation $\leq$ mit der Gruppenstruktur verträglich ist; aus $a \in P$ und $Q \subset P$ folgt $a + Q \subset P$ nach (P_1). Gemäß (P_V) existieren also in P die Elemente $q = \inf Q$ und $q' = \inf (a + Q)$. Da aus $q \leq x$ folgt $a + q \leq a + x$ für jedes $x \in Q$, ist $a + q$ eine in P gelegene Minorante von $a + Q$, also $a + q \leq q'$. Weiter ist $a \leq a + x$ für jedes $x \in Q$, also $a \leq q'$ und somit $q' - a$ ein Element von P. Aus $q' \leq a + x$ für alle $x \in Q$ folgt daher, daß $q' - a$ eine zu P gehörige Minorante von Q, also $q' - a \leq q$ ist. Aus $a + q \leq q'$ und $q' - a \leq q$ folgt dann die behauptete Gleichheit: $q' = a + q$.

Dieser Hilfssatz wäre eine bekannte Tatsache aus der Theorie der geordneten Gruppen, wenn in (P_V) die Existenz von $\inf Q$ in G und nicht nur in P gefordert wäre. Aus ihm folgt nun aber, daß das Infimum von Q in P sogar das Infimum von Q in G ist.

Hilfssatz 2. *Ist die Menge P Dedekind-vollständig, so existiert für jede nicht leere, nach unten filtrierende Menge $Q \subset P$ das Infimum in G und ist gleich dem Infimum in P.*

Beweis. Es sei q das Infimum von Q in P. Dann ist zu zeigen: aus $c \in G$ und $c \leq x$ für jedes $x \in Q$ folgt $c \leq q$. Für den Beweis sei x_0 ein beliebiges Element von Q. Wegen $c \leq x_0$ ist dann $a = x_0 - c$ ein Element von P mit $a + c \in P$. Nach Hilfssatz 1 ist daher $q' = a + q$ das Infimum der Menge $a + Q$ in P. Aus $c \leq x$ folgt $a + c \leq a + x$ für jedes $x \in Q$; es ist also $a + c$ eine in P gelegene Minorante von $a + Q$ und somit $a + c \leq q' = a + q$. Hieraus folgt die behauptete Ungleichung $c \leq q$.

Aus Hilfssatz 2 folgt nun mit den aus der Theorie der geordneten Gruppen geläufigen Überlegungen, daß die Eigenschaft (P_V) äquivalent ist mit der folgenden: *Für jede nicht leere, nach oben filtrierende, majorisierte Teilmenge Q von P existiert* $\sup Q$ *in P (und damit auch in G).*

Nun erst soll der Beweis des Satzes 1 erbracht werden:

Wir beweisen zunächst die Existenz von $\sup(a, b)$ in P (und damit auch in G) für je zwei Elemente $a, b \in P$. Es sei hierzu Q die Menge aller Elemente $x \in P$ mit

$$a \leq b + x. \tag{1}$$

Q ist nicht leer, denn es ist beispielsweise a ein Element von Q. Wir zeigen, daß Q nach unten filtrierend ist. Es seien nämlich x_1, x_2 zwei Elemente aus Q. Wegen $a \leq b + x_1$ sichert (P_Z) die Existenz von Elementen $b', x'_1 \in P$ mit

$$a = b' + x'_1, \quad b' \leq b \quad \text{und} \quad x'_1 \leq x_1. \tag{2}$$

Aus $a \leq b + x_2$ und (2) folgt

$$x'_1 \leq b - b' + x_2, \tag{3}$$

wobei $b - b'$, x_2 und x'_1 Elemente von P sind. Eine erneute Anwendung von (P_Z) ergibt daher die Existenz von Elementen b'', $x'' \in P$ mit

$$x'_1 = b'' + x'', \quad b'' \leq b - b' \quad \text{und} \quad x'' \leq x_2. \tag{4}$$

Dann ist x'' ein Element aus Q mit $x'' \leq x_1$ und $x'' \leq x_2$. In der Tat: aus (2) und (4) folgt

$$a = b' + b'' + x'' \leq b + x'' \tag{5}$$

und somit $x'' \in Q$. Nach (4) ist ferner $x'' \leq x_2$ und wegen $b'' \in P$ außerdem $x'' \leq b'' + x'' = x_1'$, also nach (2) schließlich $x'' \leq x_1$. Somit ist Q eine nicht leere, nach unten filtrierende Teilmenge von P.

Nach ($\mathrm{P_V}$) existiert dann $q = \inf Q$. Nun ist nach Definition von Q das Element $a \in P$ eine Minorante der Menge $b + Q$, also nach Hilfssatz 1

$$a \leq \inf(b + Q) = b + q. \tag{6}$$

Es ist mit anderen Worten q das kleinste Element der Menge Q. Setzen wir $c = b + q$, so ist also $a \leq c$ und wegen $q \in P$ auch $b \leq c$. Wir zeigen, daß c sogar die kleinste Majorante von a und b, also $c = \sup(a, b)$ ist. Es sei hierzu c' eine beliebige Majorante von a und b : $a \leq c'$ und $b \leq c'$. Dann ist $c' - b \in P$ und

$$a \leq c' = b + (c' - b). \tag{7}$$

Es ist daher weiter $c' - b \in Q$ und somit $q \leq c' - b$, also $c \leq c'$. Also existiert wie behauptet $\sup(a, b)$ und es gilt

$$\sup(a, b) = b + q. \tag{8}$$

Schließlich existiert auch $\inf(a, b)$ in G (und damit wegen $0 \leq a$ und $0 \leq b$ auch in P) für beliebige Elemente $a, b \in P$. Wir setzen hierzu

$$d = a + b - \sup(a, b) \tag{9}$$

und zeigen, daß $d = \inf(a, b)$ ist. Zunächst ist $d \in P$, da $a + b$ eine Majorante von a und b ist. Wegen $a \leq \sup(a, b)$ und $b \leq \sup(a, b)$ ist ferner $d \leq a$ und $d \leq b$. Ist weiter $d' \in G$ eine beliebige Minorante von a und b, so ist $a + b - d'$ eine Majorante von a und b und somit $\sup(a, b) \leq a + b - d'$. Also ist $d' \leq d$ und daher $d = \inf(a, b)$.

Damit ist Satz 1 vollständig bewiesen.

Bemerkung. Unser Beweis hat nebenbei ergeben, daß die größte Minorante $\inf(a, b)$ in P je zweier Elemente $a, b \in P$ zugleich die größte Minorante dieser Elemente in G ist. Dies folgt auch bereits aus dem Hilfssatz 2, da die aus den drei Elementen

a, b und $\inf(a, b)$ bestehende Menge $Q \subset P$ nach unten filtrierend ist. Im übrigen gilt dies immer, wenn je zwei Elemente aus P eine größte Minorante in P besitzen. Der Beweis hierfür ist analog zu dem unseres Hilfssatzes 2. Vgl. auch [1], S. 13 (prop. 8).

Mit Hilfe bekannter einfacher Schlüsse (vgl. [2], S. 21 (prop. 1)) ergibt sich noch:

Korollar. *Besitzt P die Zerlegungseigenschaft und ist P Dedekind-vollständig, so existiert für jede nicht leere Teilmenge Q von P das Infimum in G und für jede nicht leere majorisierte Menge $Q \subset P$ das Supremum in G. Wird zusätzlich $G = P - P$ vorausgesetzt, so ist G eine vollständige verbandsgeordnete Gruppe.*

3. Dedekind-Vollständigkeit in topologischen Gruppen

Es soll hier gezeigt werden, daß gewisse Kompaktheitsvoraussetzungen in einer topologischen Gruppe G die Dedekind-Vollständigkeit von P zur Folge haben.

Wir ergänzen hierzu die in der letzten Nummer über G und P gemachten Voraussetzungen. Es sei jetzt G eine *topologische* abelsche Gruppe und P eine Teilmenge von G mit den Eigenschaften (P_1) und (P_2). Für jedes Element $a \in P$ setzen wir

$$[0, a] = P \cap (a - P). \tag{10}$$

Es ist also $[0, a]$ die Menge aller $x \in G$ mit $0 \leq x \leq a$.

Wir behaupten:

Satz 2. *Die Menge P ist Dedekind-vollständig, wenn für jedes Element $a \in P$ die Menge $[0, a]$ kompakt*[2] *ist.*

Beweis. Es sei Q eine nicht leere, nach unten filtrierende Teilmenge von P. Für ein beliebiges Element $a \in Q$ ist dann auch die Menge Q' aller $x \in Q$ mit $x \leq a$ nicht leer und nach unten

---

[2] Wir verwenden den Bourbakischen Kompaktheitsbegriff (kompakt = separiert und bikompakt).

filtrierend. Da ferner jede Minorante von Q' eine Minorante von Q ist und umgekehrt, genügt es zu zeigen, daß $\inf Q'$ in P existiert. Wir können also ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß Q ein größtes Element a besitzt: $Q \subset [0, a]$ und $a \in Q$. Nach Voraussetzung ist $[0, a]$ kompakt, also der Filterbasis $\mathfrak{F}$ aller Mengen $Q \cap [0, x]$ mit $x \in Q$ mindestens ein Punkt $q \in [0, a]$ adhärent. Wir wollen zeigen, daß $q = \inf Q$ ist. Zunächst ist nach Voraussetzung jede Menge $[0, x]$ eine kompakte Teilmenge des kompakten Raumes $[0, a]$, also $[0, x]$ in $[0, a]$ abgeschlossen für jedes $x \in Q$. Da $q \in [0, a]$ der Filterbasis $\mathfrak{F}$ adhärent ist, folgt hieraus $q \in [0, x]$ und damit $q \leq x$ für jedes $x \in Q$. Ist andererseits $q' \in P$ eine beliebige Minorante von Q, so ist Q und damit jede Menge aus $\mathfrak{F}$ enthalten in der Menge aller $x \in G$ mit $q' \leq x \leq a$, also in $q' + [0, a - q']$ $\subset [0, a]$. Da die Abbildung $x \to q' + x$ eine Homöomorphie des Raumes G auf sich ist, folgt aus der Kompaktheit von $[0, a - q']$ die von $q' + [0, a - q']$ und hieraus die Abgeschlossenheit dieser Menge in $[0, a]$. Der der Filterbasis $\mathfrak{F}$ adhärente Punkt q muß also in $q' + [0, a - q']$ liegen, d. h. es ist insbesondere $q' \leq q$. Wie behauptet, ist daher q das Infimum von Q in P.

Korollar. *Die Menge* $[0, a]$ *sei für jedes Element* $a \in P$ *kompakt. Dann sind die beiden folgenden Eigenschaften gleichwertig:*

(I) *P ist ein Verband.*

(II) *P besitzt die Zerlegungseigenschaft.*

Beweis. (I) $\Rightarrow$ (II): Der Beweis ist enthalten in der im Anschluß an die Eigenschaft (P'_Z) gemachten Bemerkung auf S. 27–28 dieser Note. Die Topologie von G bleibt hierbei noch unberücksichtigt.

(II) $\Rightarrow$ (I): Dies folgt unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2.

4. Anwendung auf Kegel mit kompakter Basis

Es sei jetzt G speziell ein *topologischer* (nicht notwendig lokalkonvexer) *Vektorraum* E über dem Körper $\boldsymbol{R}$ der reellen Zahlen und P ein *konvexer Kegel* in E mit der Spitze $0 \in P$; der Kegel sei *spitz*, d.h. es sei $P \cap (-P) = \{0\}$;[3] ferner sei P, aufgefaßt als Unterraum des topologischen Raumes E, *separiert*, genüge also dem Hausdorffschen Trennungsaxiom. Schließlich besitze P eine *kompakte Basis*, d. h. es wird die Existenz einer affinen linearen Mannigfaltigkeit M in E gefordert, welche den Punkt 0 nicht enthält und mit jeder Erzeugenden von P einen Punkt gemeinsam hat und für welche $B = M \cap P$ kompakt ist. Die kompakte konvexe Menge B heißt eine Basis von P. Es hat dann M mit jeder Erzeugenden von P genau einen Punkt gemeinsam, woraus folgt, daß jeder Punkt $x \neq 0$ aus P *auf genau eine Weise* in der Form

$$x = \lambda b \quad \text{mit} \quad \lambda > 0 \ (\lambda \in \boldsymbol{R}) \ \text{und} \ b \in B \tag{11}$$

dargestellt werden kann.

Wir stellen zunächst einige weitere Eigenschaften solcher Kegel P zusammen, die wir für unsere Zwecke benötigen.

Hierzu definieren wir die Menge

$$S = \{\lambda b \mid 0 \leq \lambda \leq 1, \quad b \in B\} \tag{12}$$

und behaupten:

Hilfssatz 3. *Die Menge S ist kompakt.*

Beweis. Es sei $I = [0, 1]$ das bezüglich seiner üblichen Topologie kompakte Einheitsintervall auf der Zahlengeraden $\boldsymbol{R}$. Durch die Abbildung $(\lambda, b) \to \lambda b$ wird der Produktraum $I \times B$ stetig auf S abgebildet. S ist kompakt als stetiges Bild des kompakten Raumes $I \times B$ im separierten Raum P.

Nun ist E eine abelsche Gruppe und P eine Teilmenge dieser mit den Eigenschaften (P_1) und (P_2). Daher definiert P in E eine Ordnungsrelation $\leq$ gemäß (R), die wegen der zusätzlichen Eigenschaft von P, stabil bezüglich der Anwendung von Homothetien mit positivem Betrag zu sein, sogar mit der Vektorraumstruktur von E verträglich ist.

Hilfssatz 4. *Für jedes Element $a \in P$ ist die Menge $[0, a]$ kompakt.*

---

[3] Definitionen dieser Begriffe findet der Leser bei N. Bourbaki [3].

Beweis. Die Behauptung ist trivial für $a = 0$. Also kann $a \neq 0$ und dann sogar $a \in B$ angenommen werden, da $x \to \lambda x$ für jedes $\lambda > 0$ eine Homöomorphie von E auf sich ist, die auf P einen Automorphismus hinsichtlich der Ordnungsstruktur induziert. Wir zeigen zunächst: aus $a \in B$ folgt $[0, a] \subset S$. Für jedes Element $x \in [0, a]$ ist $y = a - x$ ein Element von P mit $a = x + y$. Für $x = 0$ oder $x = a$ gilt trivialerweise $x \in S$, so daß also $x \neq 0$ und $y \neq 0$ angenommen werden kann. Nach (11) existieren dann Elemente $x_0, y_0 \in B$ und Zahlen $\lambda > 0$, $\mu > 0$ mit $x = \lambda x_0$ und $y = \mu y_0$. Folglich ist

$$\frac{1}{\lambda + \mu} a = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} x_0 + \frac{\mu}{\lambda + \mu} y_0$$

ein Element der konvexen Basis B. Wegen $a \in B$ und der Eindeutigkeit der Darstellung (11) muß dann $\lambda + \mu = 1$, also $0 < \lambda < 1$ sein. Also ist $x \in S$. Daß schließlich $[0, a]$ kompakt ist, folgt aus der jetzt leicht zu bestätigenden Gleichheit

$$[0, a] = S \cap (a - S)$$

und aus Hilfssatz 3.

Der in der Einleitung erwähnte Satz ist nun eine unmittelbare Folgerung aus Hilfssatz 4 und dem Korollar zu Satz 2:

Satz 3. *Für einen separierten, konvexen, spitzen Kegel P mit kompakter Basis in einem topologischen Vektorraum E sind folgende zwei Eigenschaften gleichwertig:*

(I) *P ist ein Verband.*

(II) *P besitzt die Zerlegungseigenschaft.*

Bemerkung. Im Anschluß an den Hilfssatz 3 kann man zeigen: S ist eine kompake Umgebung der Null in P, der Kegel P also lokalkompakt. Bei G. Choquet [4], [7] wird (ohne Beweis) behauptet, daß aus der Existenz einer kompakten Basis schon allein die lokale Kompaktheit (und damit die Separiertheit) von P folgt. Man kann aber Beispiele dafür angeben, daß dies selbst in lokalkonvexen Räumen ohne die Voraussetzung der Separiertheit nicht zutrifft. Umgekehrt gilt nach Choquet (loc. cit.):

Ist E lokalkonvex und besitzt die Null eine kompakte Umgebung in P, so ist P separiert und es besitzt P eine kompakte Basis.

5. Anwendung auf Teilbarkeitsfragen

Bekanntlich kann aus jedem Resultat der Theorie der geordneten Gruppen eine Aussage über Teilbarkeitsverhältnisse in Integritätsbereichen bzw. deren Quotientenkörpern gefolgert werden.[4] Ohne auf Einzelheiten einzugehen, soll hier abschließend die dem Satz 1 entsprechende teilbarkeitstheoretische Aussage formuliert werden.

Es sei hierzu A ein *kommutativer Integritätsbereich mit Einselement* und A^* die Menge aller von Null verschiedenen Elemente aus A. Dann folgt aus Satz 1 und seinem Korollar:

Satz 1*. *Der Integritätsbereich A besitze folgende zwei Eigenschaften:*

(P_Z^*) *Ist $x \in A^*$ Teiler des Produktes ab zweier Elemente $a, b \in A^*$, so ist x das Produkt $a'b'$ von Elementen $a', b' \in A^*$, von denen a' ein Teiler von a und b' ein Teiler von b ist.*

(P_V^*) *Ist Q eine nicht leere Teilmenge von A^* derart, daß je zwei Elemente $x_1, x_2 \in Q$ einen gemeinsamen Teiler $x \in Q$ besitzen, so existiert in A^* ein größter gemeinsamer Teiler von Q.*

Unter diesen Voraussetzungen besitzt dann jede nicht leere Teilmenge von A^* einen größten gemeinsamen Teiler; jede nicht leere Teilmenge von A^* mit einem gemeinsamen Vielfachen besitzt ein kleinstes gemeinsames Vielfaches.

---

[4] Vgl. N. Bourbaki [1], S. 6 ff.

Literatur

[1] N. Bourbaki, *Algèbre, Chap. VI–VII.* Actual. scient. et ind. 1179, Paris, Hermann (1952).

[2] N. Bourbaki, *Intégration, Chap. I–IV.* Actual. scient. et ind. 1175, Paris, Hermann (1952).

[3] N. Bourbaki, *Espaces vectoriels topologiques, Chap. I–II.* Actual. scient. et ind. 1189, Paris, Hermann (1953).

[4] G. Choquet, *Unicité des représentations intégrales au moyen de points extrémaux dans les cônes convexes réticulés.* C. r. Acad. Sci., Paris 243, 555–557 (1956).

[5] G. Choquet, *Existence des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes.* C. r. Acad. Sci., Paris 243, 699–702 (1956).

[6] G. Choquet, *Existence des représentations intégrales dans les cônes convexes.* C. r. Acad. Sci., Paris 243, 736–737 (1956).

[7] G. Choquet, *Existence et unicité des représentations intégrales au moyen des points extrémaux dans les cônes convexes.* Exposé au Séminaire Bourbaki, Décembre 1956.

[8] I. Namioka, *Partially ordered linear topological spaces.* Memoirs of the Amer. Math. Soc. 24 (1957).