BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über Felder in offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Von Josef Weier in Fulda

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 6. März 1959

Übersicht

Eine einfach geartete offene Riemannsche Mannigfaltigkeit entsteht, wenn man im n-dimensionalen euklidischen Raume, n eine natürliche Zahl, einen positiv definiten symmetrischen Maßtensor definiert. Die weiterhin benutzten offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten, die im ersten Abschnitt näherhin erklärt werden, sind aber allgemeiner: offene topologische Mannigfaltigkeiten mit einem Maßtensor. Dabei heiße eine topologische Mannigfaltigkeit, in der jede unendliche Teilmenge einen Häufungspunkt hat, kompakt; jede topologische Mannigfaltigkeit, die nicht kompakt ist, heiße offen. Im vierten Abschnitt sind der Kürze halber offene differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit euklidischer Maßbestimmung zugrunde gelegt.

Es soll uns hier das Problem beschäftigen, Bedingungen für die Existenz orthogonaler Tangentialfelder über einer offenen zusammenhängenden Riemannschen Mannigfaltigkeit R aufzustellen. Sind f, f' zwei zueinander „orthogonale Tangentialfelder" über R, so sei $f(p) \neq 0$ und $f'(p) \neq 0$ für alle Punkte $p \in R$. Denn orthogonale Felder mit Nullstellen existieren stets: $f = f' = 0$. Hier taucht zunächst die Frage auf, die im zweiten Abschnitt bejahend beantwortet wird: Gibt es stets ein stetiges Tangentialfeld φ über R ohne Nullstelle? Es läßt sich übrigens nachweisen, daß sogar *ein stetig differenzierbares Feld über R ohne Nullstelle existiert.* Dieses letztere Ergebnis erlangt Bedeutung, wenn man die Curvatura integra offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten abschätzen will.

Das Problem, bei festem φ ein zu φ orthogonales Tangentialfeld zu konstruieren, wird in den Abschnitten 3 und 4 für offene zusammenhängende differenzierbare Mannigfaltigkeiten mit euklidischer Metrik behandelt. Dabei zeigt sich, daß φ einen eindimensionalen Zyklus z bestimmt, dessen Koeffizienten wie bei Whitney [7] Rotationszahlen von der in Abschnitt 3 definierten Art sind und der die Eigenschaft hat: *genau dann existiert ein zu φ orthogonales Tangentialfeld, wenn z nullhomolog ist.* Die Homologieklasse von z ist durch φ eindeutig bestimmt.

Sämtliche Begriffe, die im folgenden benutzt werden, sind ausführlich erklärt. Im vierten Abschnitt sind die Beweise nur skizziert. Was eine Übertragung der Sätze des vierten Abschnittes auf Riemannsche Mannigfaltigkeiten betrifft, so vergleiche man hierzu die in [1] dargelegten Deformationseigenschaften und die in [4] erörterten Eigenschaften Riemannscher Mannigfaltigkeiten. Man vergleiche [2] und [3] zur Frage, wieweit die unten eingefügte Triangulierbarkeitsvoraussetzung den Fall beliebiger offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten einschränkt.

1. Erklärung offener Riemannscher Mannigfaltigkeiten

Seien n eine natürliche Zahl, E_n der n-dimensionale euklidische Raum, P eine n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit und A Teilmenge eines euklidischen Raumes. Jedem Punkte q aus A seien eine in E_n offene Menge U_q und eine topologische Abbildung φ_q von U_q in P zugeordnet. Alsdann heiße das System (U_q, φ_q, A) ein „differenzierbares Koordinatensystem" von P, falls $P = \bigcup U_q$, und überdies gilt: sind a, b irgend zwei Punkte aus A mit $\varphi_a(U_a) \cap \varphi_b(U_b) = V_{ab} \neq 0$, für jeden Punkt p aus V_{ab} weiter (x^i) die Koordinaten von p bezüglich (U_a, φ_a) und (y^i) die Koordinaten von p bezüglich (U_b, φ_b), so sind die Funktionen

$$x^i = x^i(y^1, \ldots, y^n) \quad \text{und} \quad y^i = y^i(x^1, \ldots, x^n)$$

stetig differenzierbar.

Seien P eine n-dimensionale offene topologische Mannigfaltigkeit und (U_q, φ_q, A) ein differenzierbares Koordinatensystem von P. Jedem Tripel (U_q, φ_q, p), wobei q irgendeinen Punkt aus A und p irgendeinen Punkt aus $\varphi_q(U_q)$ bezeichnen, seien n^2 reelle Zahlen

$$g_{ij}(U_q, \varphi_q, p), \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, n,$$

zugeordnet. Hierauf heiße das System $(P, U_q, \varphi_q, A, g_{ij})$ „offene Riemannsche Mannigfaltigkeit", falls gilt: bei festem (U_q, φ_q) und variablem p hängt $g_{ij}(U_q, \varphi_q, p)$ stetig differenzierbar von den Koordinaten des Punktes p ab; die g_{ij} sind in i, j symmetrisch; für alle (U_q, φ_q, p) ist die quadratische Form $g_{ij}(U_q, \varphi_q, p)\, z^i z^j$ positiv definit; die g_{ij} transformieren sich kovariant, es ist also

$$g_{ij}(U_b, \varphi_b, p) = g_{kl}(U_a, \varphi_a, p) \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^l}{\partial y^j},$$

wenn a, b Punkte aus A mit $\varphi_a(U_a) \cap \varphi_b(U_b) = V_{ab} \neq 0$, p ein Punkt aus V_{ab}, (x^i) die Koordinaten von p in (U_a, φ_a) und (y^i) die Koordinaten von p in (U_b, φ_b) sind.

Seien $(P, U_q, \varphi_q, A, g_{ij})$ eine offene Riemannsche Mannigfaltigkeit R, p ein Punkt aus P, A_p die Menge aller Punkte q aus A mit $p \in \varphi_q(U_q)$ und jedem Punkt q aus A_p ein n-Tupel $\xi^1(q), \ldots, \xi^n(q)$ reeller Zahlen zugeordnet, so daß gilt: welches auch die Punkte a, b aus A_p sind, bedeuten (x^i) die Koordinaten des laufenden Punktes aus $\varphi_a(U_a)$ bezüglich (U_a, φ_a) und (y^i) die Koordinaten des laufenden Punktes aus $\varphi_b(U_b)$ bezüglich (U_b, φ_b), so ist $\xi^i(b) = \xi^j(a)\, \partial y^i / \partial x^j$. Dann heiße das System der Zahlen $\xi^i(q)$, $i = 1, \ldots, n$ und $q \in A_p$, ein „Vektor" von R in p. Sind v, w zwei solche Vektoren im Punkte p, (ζ^i) die Komponenten von v bezüglich (U_q, φ_q), (η^i) die Komponenten von w bezüglich (U_q, φ_q) und ist $g_{ij}(U_q, \varphi_q, p)\, \zeta^i \eta^j = 0$, so sind v, w zueinander „orthogonale" Vektoren. Wir bezeichnen R statt durch $(P, U_q, \varphi_q, A, g_{ij})$ auch kürzer durch (P, g_{ij}) und nennen die Paare (U_q, φ_q) „zulässige Paare" von R.

2. Vektorfelder über offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Jedem Punkte p der offenen Riemannschen Mannigfaltigkeit (P, g_{ij}) sei ein Vektor $v(p)$ zugeordnet, so daß für jedes zulässige

Paar (U, φ) von (P, g_{ij}) mit $p \in \varphi(U)$ gilt: bezeichnen $\xi^i(U, \varphi, q)$ für jeden Punkt q aus $\varphi(U)$ die kontravarianten Komponenten von $v(p)$ bezüglich (U, φ), so hängen die ξ^i stetig beziehungsweise stetig differenzierbar von q ab. Dann heiße v ein stetiges bzw. stetig differenzierbares „Vektorfeld" über (P, g_{ij}). Wenn $\xi^i(U, \varphi, r) = 0$ für alle i in einem gewissen Punkte r aus $\varphi(U)$, so ist $\xi^i(V, \psi, r) = 0$ für alle i, welches auch das zulässige Paar (V, ψ) mit $r \in \psi(V)$ sei. Der Punkt r heiße eine „Nullstelle" des Feldes v. Die Länge des Vektors $v(p)$ ist

$$g_{ij}(U, \varphi, p)\ \xi^i(U, \varphi, p)\ \xi^j(U, \varphi, p).$$

Da die quadratische Form $g_{ij}(U, \varphi, p)\, z^i z^j$ positiv definit, ist der Vektor $v(p)$ genau dann Nullstelle, wenn seine Länge gleich Null ist.

Bedeute E einen Euklidischen Raum. „Simplexe" in E seien offen und gradlinig. Weiterhin kennzeichne der Querstrich den Übergang einer Menge zu ihrer abgeschlossenen Hülle. Sind $S_1, S_2, \ldots$ endlich oder abzählbar unendlich viele Simplexe aus E und ist jede beschränkte Teilmenge von E zu fast allen S_i fremd, so heiße $\bigcup \bar{S}_i$ ein „Euklidisches Polyeder". Eine topologische Mannigfaltigkeit, die sich topologisch auf ein solches Polyeder abbilden läßt, heiße „triangulierbar".

Theorem. *Seien n eine natürliche Zahl, E ein Euklidischer Raum und (P, g_{ij}) eine triangulierbare n-dimensionale offene Riemannsche Mannigfaltigkeit in E. Dann existiert ein stetiges Vektorfeld über (P, g_{ij}), das in jeder kompakten Teilmenge von P höchstens endlich viele Nullstellen hat.*

Beweis. Da P in E liegt und triangulierbar ist, existieren unendlich viele in P offene Mengen $V_1, V_2, \ldots$ mit $P = \bigcup V_i$ und den weiteren Eigenschaften: zu jedem V_i gibt es ein zulässiges Paar (U_i, φ_i) und in U_i eine offene n-dimensionale Vollkugel U_{i0} mit $\bar{U}_{i0} \subset U_i$ und $\varphi_i(U_{i0}) = V_i$; zu jedem Punkte p aus P existiert eine Zahl k, so daß $p \notin V_j$ für alle $j \geq k$.

Seien V_0 die leere Menge und j eine ganze Zahl ≥ 0. Wir machen die für $j = 0$ richtige Annahme, es existiere ein Vektorfeld a_j über $\bar{V}_0 \cup \ldots \cup \bar{V}_j$ mit höchstens endlich vielen Nullstellen, die überdies in $V_0 \cup \ldots \cup V_j$ liegen. Dann ergibt sich eine stetige Fortsetzung a_{j+1} von a_j über $\overline{V}_{j+1}$, die höchstens endlich viele Nullstellen und in $\overline{V}_{j+1} - V_{j+1}$ keine Nullstelle hat, wie folgt.

Man bestätigt leicht: Sind W eine offene n-dimensionale Vollkugel in E, X eine offene Teilmenge von W und f eine stetige Abbildung von $\overline{X}$ in E, die höchstens endlich viele Nullstellen und in $\overline{X} - X$ keine Nullstelle hat, so existiert eine stetige Fortsetzung von f über $\overline{W}$, die höchstens endlich viele Nullstellen und in $\overline{W} - W$ keine Nullstelle hat.

Bedeute V die offene Teilmenge $\varphi_{j+1}^{-1}(V_{j+1} \cap (V_0 \cup \ldots \cup V_j))$ von $U_{j+1,0}$. Für $p \in \overline{V}$ seien $\xi^1(p), \ldots, \xi^n(p)$ die Komponenten von $a_j\, \varphi_{j+1}(p)$ bezüglich (U_{j+1}, φ_{j+1}) und $g(p)$ der Punkt in E mit den Koordinaten $\xi^1(p), \ldots, \xi^n(p)$. Dann gibt es, wie im letzten Absatz bemerkt wurde, eine stetige Fortsetzung g' von g über $\overline{U}_{j+1,0}$, die höchstens endlich viele Nullstellen und auf dem Rand von $\overline{U}_{j+1,0}$ keine Nullstelle hat.

Hierauf setzen wir zunächst $a_{j+1} \mid \overline{V}_0 \cup \ldots \cup \overline{V}_j = a_j \mid \overline{V}_0 \cup \ldots \cup \overline{V}_j$. Wenn p ein Punkt aus $\overline{V}_{j+1} - (\overline{V}_0 \cup \ldots \cup \overline{V}_j)$, so seien die kontravarianten Komponenten des Vektors $a_{j+1}(p)$ bezüglich (U_{j+1}, φ_{j+1}) gleich den Koordinaten des Punktes

$$g'\, \varphi_{j+1}^{-1}(p).$$

Bezüglich einer anderen (U, φ) berechne man die Komponenten von $a_{j+1}(p)$ aus den Transformationsgleichungen. Offenbar folgt aus der Existenz von a_{j+1} die Existenz eines Feldes über (P, g_{ij}) mit den verlangten Eigenschaften.

Theorem. *Sind n eine natürliche Zahl, E ein Euklidischer Raum und (P, g_{ij}) eine zusammenhängende triangulierbare n-dimensionale offene Riemannsche Mannigfaltigkeit in E, so existiert ein nullstellenfreies stetiges Vektorfeld über (P, g_{ij}).*

Beweis. Seien K eine Zellenzerlegung von P und S_i die offenen n-Zellen dieser Zerlegung. Sind $T_1, T_2, \ldots$ abzählbar unendlich viele der S_i und haben T_k, T_{k+1} für alle k eine gemeinsame $(n-1)$-Seite, so heiße die Folge $T_1, T_2, \ldots$ eine reguläre Folge.

Seien f ein Vektorfeld, wie es im ersten Theorem dieses Abschnittes erklärt ist, und $q_1, q_2, \ldots$ die Nullstellen von f. Man kann annehmen, daß $q_j \notin \bar{S}_i - S_i$ für alle (i, j). Weiter überlegt man sich leicht: zu jedem q_j existiert eine reguläre Folge

$$T_{j1},\ T_{j2},\ \ldots$$

mit $q_j \in T_{j1}$ und den weiteren Eigenschaften: jedes S_i kommt in der Folge T_{jk}, $k = 1, 2, \ldots$, höchstens endlich viele Male vor; zu jedem S_i gibt es eine natürliche Zahl $\zeta(i)$ derart, daß S_i zu allen Folgen T_{jk}, $k = 1, 2, \ldots$, mit $j \geq \zeta(i)$ fremd ist.

Hierauf führt man den Beweis zu Ende, indem man jede Nullstelle q_j längs der Folge $T_{j1}, T_{j2}, \ldots$ ins Unendliche verschiebt. Daß diese Operation möglich ist, folgt aus dem nachstehenden lokalen Satze.

Seien (U, φ) ein zulässiges Paar von (P, g_{ij}) und g ein Vektorfeld über (P, g_{ij}), V eine in $\varphi(U)$ gelegene n-Zelle, $q \neq r$ Punkte aus V und q die einzige Nullstelle von g auf $\bar{V}$. Dann existiert ein Vektorfeld h über (P, g_{ij}) mit $g \,|\, P - V = h \,|\, P - V$ und r als einziger Nullstelle auf $\bar{V}$. Diesen Satz beweist man dadurch, daß man ihn vermöge φ^{-1} in U projiziert. Verschiebung einer Nullstelle innerhalb U überträgt sich in alle zulässigen Paare (X, ψ) mit $V \cap \psi(X) \neq 0$, während die übrigen zulässigen Paare von der Verschiebung nicht berührt werden.

3. Über eine Rotationszahl

Seien $n > 1$ eine natürliche Zahl und E_n der n-dimensionale Euklidische Raum. Setzt man dann in dem System $(P, U_q, \varphi_q, A, g_{ij})$ des ersten Abschnittes $A = \{1\}$, $P = U_1 = E_n$, $\varphi_1 =$ Identität und $g_{ij} = \delta^i_j$, so gelangt man zu den elementaren Vektorfeldern, wie sie hier benutzt werden.

Bedeute B eine orientierte Gerade in E_n, v ein nullstellenfreies Vektorfeld in E_n und v' ein nullstellenfreies Vektorfeld von $E_n - B$. Für alle Punkte p aus $E_n - B$ seien die Vektoren $v(p)$, $v'(p)$ orthogonal und $|v(p)| = |v'(p)| = 1$. Dann kommt dem Tripel (B, v, v') wie folgt eine „Rotationszahl" $\varrho(B, v, v')$ zu, die im letzten Abschnitt benutzt wird.

Seien q ein Punkt aus B, C die $(n-1)$-Ebene senkrecht zu B durch q und D die $(n-1)$-Ebene senkrecht zu $v(q)$ durch q. Aus

Stetigkeitsgründen darf man annehmen: es gibt eine Zahl $\varepsilon > 0$, so daß für alle Punkte p aus der bezüglich C gebildeten offenen ε-Umgebung U von q die Vektoren $v(q)$ und $v(p)$ parallel sind. Heftet man für $p \in \overline{U} - U$ den Vektor $v'(p)$ in q an, so liegt die Spitze $v''(p)$ des angehefteten Vektors in D. Bezeichnet S die $(n-2)$-Sphäre in D mit q als Mittelpunkt und 1 als Radius, so ist v'' eine stetige Abbildung der $(n-2)$-Sphäre $\overline{U} - U$ in S.

Die natürliche Orientierung von E_n ist die Orientierung, die die Einheitsvektoren in der Reihenfolge $(1, 0, \ldots, 0), \ldots, (0, \ldots, 0, 1)$ bestimmen. Seien C^* eine Orientierung von C, so daß (B, C^*) die natürliche Orientierung von E_n bestimmt, und D^* eine Orientierung von D, so daß (B, D^*) die natürliche Orientierung von E_n bestimmt, weiter U^* die von C^* in $\overline{U} - U$ und S^* die von D^* in S induzierte Orientierung. Dann ist der Grad der Abbildung $v'': U^* \to S^*$ die Rotationszahl $\varrho(B, v, v')$.

Wenn etwa $n = 3$ und $v(p)$ für alle p zur Geraden B parallel ist, so seien wie oben C die zu B senkrechte $(n-1)$-Ebene durch q, T die $(n-2)$-Sphäre in C mit q als Mittelpunkt und 1 als Radius. Für jeden Punkt p aus T ist $v'(p)$ ein in p angehefteter in C liegender Vektor der Länge 1. Man hefte $v'(p)$ in q an und bezeichne die Spitze des angehefteten Vektors mit $v^*(p)$. Dann ist $\varrho(B, v, v')$ die Umlaufszahl der Selbstabbildung $v^*: T \to T$.

4. Orthogonale Tangentialfelder über offenen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten

Sind n eine natürliche Zahl, E ein Euklidischer Raum, P eine in E gelegene n-dimensionale topologische Mannigfaltigkeit, existiert in jedem Punkte p aus P eine n-dimensionale Tangentialebene $T(p)$ und ist die Funktion T in p stetig differenzierbar, so heiße P eine „differenzierbare Mannigfaltigkeit" aus E. Sind Q eine Teilmenge von P, f eine differenzierbare Abbildung von Q in E und $f(p) \in T(p) - p$ für alle Punkte $p \in Q$, so heiße f ein differenzierbares Tangentialfeld über Q bezüglich P.

Seien $n > 1$ eine ganze Zahl, E ein Euklidischer Raum, P eine in E gelegene triangulierbare orientierte zusammenhängende n-dimensionale offene differenzierbare Mannigfaltigkeit und f ein differenzierbares Tangentialfeld über P. Dann existieren ein (i. a. krummliniges unendliches) eindimensionales Polyeder A in P und ein zu $f|P-A$ orthogonales Tangentialfeld f' über $P-A$ bezüglich P. Sind K eine Zellenzerlegung von A, x_i die mit einer Orientierung versehenen 1-Zellen von K und ϱ_i die oben definierte Rotationszahl von (x_i, f, f'), so ist $\sum \varrho_i x_i$ ein Zyklus z mit der Eigenschaft: *genau dann wenn*

$$z \sim 0,$$

existiert ein zu f orthogonales differenzierbares Tangentialfeld über P.

Vergleicht man den letzten Satz mit anderen allgemeinen Sätzen aus der Differentialgeometrie differenzierbarer Faserräume, etwa mit (*) oder ('), so fällt auf, daß bereits ein einziges „Hindernis", der Zyklus z, eine notwendige und hinreichende Existenzbedingung liefert, während die allgemeine Theorie wenigstens zwei Hindernisse erwarten läßt.

Der Beweis des letzten Satzes, zu dem man auch [5] vergleiche, sei wenigstens kurz skizziert. Zunächst ist die Bedingung $z \sim 0$ notwendig. Denn die Homologieklasse von z ist durch P eindeutig bestimmt. Dieser Verhalt entspricht der Tatsache, daß die charakteristischen Cozyklen einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit im Sinne von Stiefel, Whitney, Chern u. a. stets bis auf Cohomologien eindeutig bestimmt sind.

Zum Nachweis, daß $z \sim 0$ auch hinreichend ist, sei $y = \sum \alpha_i y_i$ eine ganzzahlige 2-Kette in P mit $z = \partial y$. Dann kann man offenbar annehmen: f' ist auf P definiert und stetig,

$$f'^{-1}(0) = \sum |\partial y_i| = A,$$

d. h. es ist $\sum |\partial y_i| = A$ die Menge aller Punkte $p \in P$, für die $f(p)$ der in p angeheftete Nullvektor ist.

Wir spalten nun von dem Zyklus z den Bestandteil $-\alpha_1 \partial y_1$ ab, kontrahieren diesen Bestandteil auf einen Punkt und verschieben

---

(*) A. Kirchhoff, Sur l'existence de certains champs tensoriels sur les sphères à n dimensions. C. R. Acad. Sci. Paris 225 (1947), 1258–1260.

(') A. Lichnerowicz, Quelques théorèmes de géométrie différentielle globale. Comment. Math. Helvet. 22 (1949), 271–301.

den Punkt längs einer Kurve ins Unendliche; parallel zu dieser Operation läuft eine Deformation von f'. Hierauf verfahren wir mit $-\alpha_2 \partial y_2$ entsprechend, mit $-\alpha_3 \partial y_3$ ebenso, ... Es entsteht ein zu f orthogonales Feld f'' mit $f''^{-1}(0) = A$ und der zusätzlichen Eigenschaft: in allen Punkten p aus A ist die Rotationszahl von (f, f'') Null. Simplexe mit der Rotationszahl Null lassen sich bis auf ihre Endpunkte beseitigen. Dies beweist man wie einen verwandten Satz in [6]. Die verbleibenden Endpunkte kann man wieder längs einer Kurve ins Unendliche abschieben.

Die beiden im letzten Absatz erwähnten Operationen (1) des Abspaltens und (2) des Beseitigens mögen noch näherhin präzisiert werden.

(1). Seien P eine orientierte differenzierbare Mannigfaltigkeit einer Dimension > 1, f ein nullstellenfreies Tangentialfeld über P, f' ein zu f orthogonales tangentiales Vektorfeld, $f'^{-1}(0)$ ein 1-dimensionales Polyeder A, weiter B ein offenes 2-Simplex in P mit $A \cap B = 0$ und $\overline{B} - B \subset A$, ferner b_i die mit gleichlaufender Orientierung versehenen 1-Seiten von B und β_i die Rotationszahl von b_i bei (f, f'), schließlich γ eine ganze Zahl. Dann existieren ein zu f orthogonales tangentiales Vektorfeld f'' und ein offenes 2-Simplex C mit $\overline{C} \subset B$, die die Eigenschaften haben: $f''^{-1}(0) = A \cup (\overline{C} - C)$, außerhalb $\overline{B}$ stimmen die Rotationszahlen von (f, f') und (f, f'') überein, die Rotationszahl von b_i bei (f, f'') ist $\beta_i - \gamma$, die Rotationszahl von $\overline{C} - C$ bei (f, f'') ist $\pm\gamma$.

(2). Die Bedeutung von P, f, f' und A sei die gleiche wie unter (1). Seien K eine simpliziale Zerlegung von A, A_1 ein 1-Simplex aus K und die Rotationszahl von A_1 bei (f, f') Null, weiter U eine in P offene Menge mit $A_1 \subset U$ und $A \cap U = A_1$. Dann existiert ein zu f orthogonales tangentiales Vektorfeld f'', das auf $P - U$ mit f' übereinstimmt und in U keine Nullstelle hat.

Literatur

[1] Bompiani, E., *Geometrie Riemanniane di specie superiore.* Mem. Reale Acc. d'Italia 6, 269–520 (1935).

[2] Brouwer, L. E. J., *Zum Triangulierbarkeitsproblem.* Akad. Wetensch. Amsterdam 42, 701–706 (1939).

[3] Cairns, S. S., *Triangulated manifolds and differentiable manifolds.* Lectures in topology, Univ. of Michigan, 143–157 (1941).

[4] Lichnerowicz, A., *Théorie globale des connexions.* Roma Cremonese (1957).

[5] Steenrod, N., *The topology of fibre bundles.* Princeton Mathem. Series 14 (1957).

[6] Weier, J., *On the topological degree.* Compos. Mathem. 13, 119–126 (1957).

[7] Whitney, H., *On the theory of sphere bundles.* Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 26, 143–148 (1940).

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1960

Band/Volume: 1959

Autor(en)/Author(s): Weier Josef

Artikel/Article: Felder in offenen Riemannschen Mannigfaltigkeiten 13-22