BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 6. Februar 1959

Übersicht

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Darstellung einer Theorie zu einer praktisch einfachen Lösung spezieller Fälle des Dreikörperproblems in bezug auf die Bewegung typischer Planetoidengruppen des Sonnensystems, deren mittlere Bewegungen zu der des großen Planeten Jupiter in einem bestimmten Verhältnis ganzer Zahlen nahezu kommensurabel sind und deren Anzahl bei der bald gegen 2000 ansteigenden Gesamtmenge aller Planetoiden ebenfalls relativ stark angewachsen ist.

Nachdem H. Bruns schon gegen Ende des 19. Jahrhunderts nachgewiesen hatte, daß das Planetenproblem in seiner größten Allgemeinheit keine weiteren algebraischen Integrale als die der lebendigen Kraft, der Flächenmomente und der Schwerpunktsbewegung zulasse, und danach H. Poincaré, darüber weit hinausgehend, bewiesen hatte (in seiner Stockholmer Preisschrift vom Jahr 1889), daß die Lösung des Problems auch nicht durch die eindeutigen Transcendenten möglich sei, außer im Falle der Poincaréschen periodischen Lösungen des Dreikörperproblems, verblieb der astronomischen Forschung zur Lösung des Bewegungsproblems im Sonnensystem und der Welt der mehrfachen Sternsysteme nur der eine Weg zur Beschränkung der Störungsfunktion auf ein spezielles, aber zulässiges Maß der

Entwicklung, verschieden von Problem zu Problem. Besonders wertvoll ist eine solche Beschränkung, wenn sie die erste Integration in geschlossener Form ermöglicht, wie es zufällig bei unserem Problem der genäherten Kommensurabilitäten der mittleren Bewegungen möglich ist. Wie wir sehen werden, führt eine weiter mögliche Integration der Differentialgleichungen auf die Existenz eines 2. Integrals einer in geschlossener Form lösbaren Riccatischen Differentialgleichung.

Die von uns angestrebte Lösung eines Problems der genäherten Kommensurabilitäten soll das „problème restreint" zur Voraussetzung haben, wobei sich ein Planetoid verschwindender Masse in der Ebene der kreisförmig angenommenen Bahn des großen Planeten Jupiter bewegt und die mittlere Bewegung des Planetoiden zu der des Jupiter nahezu im Verhältnis 3:1 kommensurabel ist. Es handelt sich also um diejenigen Planetoiden, deren mittlere tägliche Bewegung n_0 den Grenzwerten $850'' < n_0 < 950''$ unterworfen ist, so daß entsprechend große langperiodische Störungen der Bahnelemente wie der Koordinaten möglich sind. Nach der Veröffentlichung von W. Strobel in den „Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts" zu Heidelberg, Nr. 1: „Elemente und Grundlagen der Kleinen Planeten" vom Jahre 1949 beträgt die Anzahl der Planetoiden der genannten Gruppe 183 Objekte, bei einer Gesamtzahl von 1564 Planetoiden bis 1949, so daß der prozentuale Anteil der nahe kommensurablen Fälle fast 12 Prozent der Gesamtzahl der Planetoiden beträgt, d. h. einem respektablen Anteil der Gruppe entspricht. Deshalb hat die Mechanik des Himmels und die mit ihr eng verbundene Kosmogonie des Sonnensystems ein besonderes Interesse an der genannten Gruppe.

Bevor wir zur theoretischen Untersuchung unseres Problems übergehen, interessiert uns zunächst noch die Verteilung der vorhandenen Planetoiden um das Gruppenmittel, d. h. um das 3-fache der mittleren Bewegung des großen Planeten Jupiter, dessen mittlere tägliche Bewegung $n' = 299''.13$ beträgt, so daß wir die Planetoiden um $n = 3n' = 897''.39$ aufzusuchen haben. Das Verzeichnis von W. Strobel ergibt die folgende Verteilung der genannten Planetoidengruppe zwischen $n = 850''$ und $n = 950''$:

$n =$ 850.0 bis 860.0: 35 Planetoiden		
60.1 bis 70.0: 30 Planetoiden		
70.1 bis 80.0: 29 Planetoiden		
80.1 bis 90.0: 6 Planetoiden	Lückennächster Planet	
890.1 bis 900.0: 0 Planetoiden	Nr. 619 mit $n = 886''.8$	
900.1 bis 910.0: 5 Planetoiden	Lückennächster Planet	
10.1 bis 920.0: 15 Planetoiden	Nr. 381 mit $n = 904''.2$	
20.1 bis 930.0: 20 Planetoiden		
30.1 bis 940.0: 23 Planetoiden		
940.1 bis 950.0: 19 Planetoiden,		

also zusammen 182 Planetoiden, wobei sich bemerkenswerterweise an der kritischen Stelle der 3-fachen Jupiter-Exzentrizität mit $n_0 = 897''.40$ kein einziger Planetoid befindet. Nach beiden Seiten hin wächst die Anzahl der kritischen Planetoiden stark an, so daß sich bei $n_0 = 850'' - 900''$ insgesamt 100 Planetoiden
$= 900'' - 950''$ insgesamt 82 Planetoiden
befinden, so daß die Verteilung der Planetoiden zu beiden Seiten der kritischen Stelle mit $n_0 = 897''.4$ bemerkenswert unsymmetrisch ist. Einer Mehrzahl der Planetoiden von rund 55% entspricht also eine mittlere Bewegung von $n_0 < 900$, der Minderzahl von 45% entspricht $n_0 > 900''$, d. h. also auch, daß der Mehrzahl der kritischen Planetoiden eine größere Halbachse a_0 als der Minderzahl mit kleineren Halbachsen entspricht. Nächst der kritischen Stelle befinden sich gemäß der letzten Tabelle die folgenden speziell aufgeführten 12 Planetoiden, nebst ihren mittleren Bewegungen:

Nr. 46	n 883''.9
292	881.6
495	904.7
619	886.8
381	904.2
877	904.4
887	886.4
994	881.6
1012	908.8
1257	905.2
1368	886.3
1381	904.2

so daß die lücken-nächsten Planetoiden beiderseits der der Lücke entsprechenden Zahl $n = 897''.40$ die Planetoiden Nr. 619 auf der einen Seite und Nr. 381 auf der anderen Seite mit $n = 886''.8$ resp. $n = 904''.2$ auf der anderen Seite der Lücke sind, d. h. mit einem Abstande von der Lücke von $-10''.6$ resp. $+6''.8$, also in einem gegenseitigen Abstande von $17''.6$ der mittleren Bewegung.

Die Grundlage zur Behandlung des Problems bildet die Entwicklung der entsprechenden Störungsfunktion, in der bei unserer

Fassung des Problems die infolge einer genähert kommensurablen Bewegung der Körper langperiodisch und deshalb kritisch werdenden Glieder neben den allgemein säkularen Gliedern zu berücksichtigen sind, während die kurzperiodischen Glieder neben den ausschlaggebenden langperiodischen Termen keine Rolle spielen. Von den durch die genäherte Kommensurabilität kritisch werdenden Gliedern der Störungsfunktion wollen wir nur die das einfach-lineare Argument enthaltenden Terme in Rücksicht ziehen, also die das zwei- und mehrfache Argument des kritischen Winkels enthaltenden Glieder höherer Potenz der Exzentrizitäten vernachlässigen. Unter dieser Voraussetzung kann man zeigen, wie die Integration der Differentialgleichungen des Problems nach entsprechender Ableitung zweier Integrale auf Quadraturen reduziert werden kann, wodurch die Lösung an Einfachheit und Übersichtlichkeit gewinnt.

§ 1. Die Differentialgleichungen und ihre Integration

Die mittleren Bewegungen n und n' des Planetoiden und des großen Planeten Jupiter mögen sich zunächst nicht nahezu wie $3:1$ verhalten, sondern allgemeiner sei $n:n' = (p+2):p$, so daß also bei $p = 1$ der sogleich zu behandelnde Spezialfall eintritt. Im allgemeinen Falle sind die kritisch-langperiodischen Glieder der Störungsfunktion alsdann im Hauptteil der Störungsfunktion vom Grade $(p+2) - p = 2$, im Nebenteil sind sie vom Grade $(p+2) + p - 2 = 2p$. In unserem Spezialfalle $p = 1$ sind die entsprechenden Terme in bezug auf beide Fälle vom Grade 2, wobei aber im Nebenteil der Störungsfunktion der entsprechende Term den Faktor $e \cdot e'$ hat, so daß infolge der Vernachlässigung der Jupiter-Exzentrizität der letztere Term in Wegfall kommt. Allgemein müssen wir noch voraussetzen, daß der Bruch $(p+2):p$ relativ prim ist, weil sonst im Falle $p =$ grader Zahl $= 2q$, der Bruch $(p+2):\ p = (q+1):q$ würde, d. h. auf den sogenannten Hecuba-Fall reduziert würde, bei dem die mittleren Bewegungen im Verhältnis zweier aufeinanderfolgender

Zahlen stünde, einem Falle, bei dem infolgedessen die kritischen Glieder schon in den Termen 1. Grades auftreten. Deshalb beziehen sich der von uns zu behandelnde Fall und die ihm ähnlichen nur auf den Fall, wo die ganze Zahl p immer ungrade ist, also auf die Fälle, wo $n : n' = 3:1$, oder $= 5:3$ etc., wo die kritischen Glieder erst in den Termen 2. und höheren, graden Grades auftreten. Die nun zur Entwicklung des Problems notwendige Störungsfunktion nach der klassischen Theorie von Laplace-Le Verrier-Tisserand nach den „Annales de l'Observatoire de Paris", Mémoires, Bd. 2 und 10, resp. nach Tisserands Traité de Mécanique Céleste, Bd. 1, bei Beschränkung auf die säkularen und kritischen Glieder bis zum 2. Grade einschließlich ist dann:

$$(1) \qquad R = N_0 + N_1 e^2 + N_2 e^2 \cos \zeta,$$

wo e die Exzentrizität des Planetoiden, ferner die Koeffizienten N: von den Laplaceschen Transzendenten abhängige Funktionen der großen Achsen der Planetenbahnen, d. h. von a und a' abhängige Funktionen fixieren, und wo schließlich das kritische Argument $\zeta = (p+2)\, l' - p \cdot l - 2\,\bar{\omega}$ ist, wo $\bar{\omega}$ die Perihellänge. Die Koeffizienten N_i lauten explizit als Funktionen der Transcendenten von Laplace, wenn noch die Masse m' des Jupiter und die Gaußsche Konstante k^2 der Attraktion als Faktoren hinzugefügt werden:

(2)

$$N_0 = \frac{1}{2} k^2 m' A^0, \qquad N_1 = \frac{1}{4} k^2 m' (A_1^0 + A_2^0)$$

$$N_2 = k^2 m' \left[\frac{1}{8}(p+2)(4p+3) A_0^{p+2} + \frac{1}{4}(4p+3) A_1^{p+2} + \frac{1}{4} A_2^{p+2}\right],$$

wobei, wie erwähnt, der Nebenteil der Störungsfunktion keinen Beitrag liefert und von nun ab die Gaußsche Konstante $k^2 = 1$, die Zeiteinheit also $58 \cdot 1325$ mittlere Tage ist.

Die 4 Variablen unseres Problems a, e, ζ und $\bar{\omega}$ unterliegen nun den folgenden Differentialgleichungen:

$$\left\{\begin{array}{ll}
\text{a)}\ \dfrac{d(k\sqrt{a})}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial l} & (3) \\[2ex]
\text{b)}\ \dfrac{de}{dt} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left\{\dfrac{\partial R}{\partial \bar\omega} + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\dfrac{\partial R}{\partial l}\right\} & \\[2ex]
\text{c)}\ \dfrac{d\zeta}{dt} = (p+2)\,n' - p\cdot n + 2p\sqrt{a}\,\dfrac{\partial R}{\partial a} - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(p+2-p\sqrt{a-e^2}\right)\dfrac{\partial R}{\partial e} & \\[2ex]
\text{d)}\ \dfrac{d\bar\omega}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial e}\,. &
\end{array}\right.$$

Da die Störungsfunktion R in bezug auf die Winkelargumente nur von dem einen Argument

$$\zeta = (p+2)\cdot l' - p\,l - 2\,\bar\omega \tag{4}$$

abhängig ist, so folgt aus der Form der Abhängigkeit von ζ, von l und $\bar\omega$ in bezug auf die Ableitungen von R nach $\bar\omega$ und l:

$$p\,\frac{\partial R}{\partial \bar\omega} = 2\,\frac{\partial R}{\partial l} = 2\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\,. \tag{5}$$

Substituieren wir jetzt die aus (5) folgenden Ausdrücke für $\frac{\partial R}{\partial \bar\omega}$ und $\frac{\partial R}{\partial l}$ als Funktion von $\frac{d(\sqrt{a})}{dt}$ in die Gleichung (b) des Systems (3), so ergibt sich die folgende Differentialgleichung zwischen a und e:

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[\frac{2}{p}\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\right]. \tag{6}$$

Bringt man diese Gleichung auf die folgende Form in bezug auf $\sqrt{1-e^2}$ und $\sqrt{a}$, so folgt:

$$\sqrt{a}\cdot\frac{d(\sqrt{1-e^2})}{dt} = \left[\frac{p+2}{p} - \sqrt{1-e^2}\right]\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\,. \tag{6$_a$}$$

Hieraus folgt unmittelbar weiter:

(6$_b$)

$$(p+2)\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = p\sqrt{a}\,\frac{d(\sqrt{1-e^2})}{dt} + p\sqrt{1-e^2}\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} \quad \text{oder}$$

$$(p+2)\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = p\,\frac{d\sqrt{a(1-e^2)}}{dt}\,.$$

Nach Elimination von dt folgt dann bei darauffolgender Integration das Integral:

$$(\mathrm{I}) \qquad (p+2)\sqrt{a} = p\sqrt{a(1-e^2)} + \text{const.}$$

Zur zweckmäßigen Definition der Integrationskonstanten werde $e = 0$ angenommen, dann wird nach dem Integral I erhalten: $2\sqrt{a} = \text{const.} = 2\sqrt{a_*}$, wo a_* die neue Integrationskonstante, so daß wir unserem Integral I die neue zweckmäßige Form geben:

$$(\mathrm{I_a}) \qquad (p+2)\sqrt{a} = p\sqrt{a(1-e^2)} + 2\sqrt{a_*},$$

wo a_* den Maximalwert fixiert, den a zwischen $e = 0$ und $e = 1$ erreichen kann, so daß also allgemein stets $a \leqq a_*$.

Aus der Gleichung ($\mathrm{I_a}$) folgt die neue Form: $a = a_* \cdot \frac{1}{1+f}$, wo f bedeutet: $f = \frac{1}{2}\,p(1-\sqrt{1-e^2})$, also mit $e = 0$ auch $f = 0$ ist, so daß eine Potenzentwicklung nach f gestattet ist, wenn $f < 1$ ist. Setzen wir $e = \sin\varphi$, so wird $f = p\sin^2\frac{1}{2}\varphi$. Folglich trifft die Annahme $f < 1$ immer zu, wenn $p = 1$, wie in unserem Spezialfalle des Hestiatypus, wo $n : n' = 3 : 1$, und jeder Wert von φ zulässig ist. Im nächstfolgenden Falle, wo $p = 3$, also $n : n' = 5 : 3$, wobei $n = 500''$, muß $e < 0.94$, weiter bei $p = 5$, also $n = 420''$ muß $e < 0.80$ sein, etc. In unserem hier behandelten Spezialfalle, wo $p = 1$, ergibt die Potenzenentwicklung nach e nach $\mathrm{I_a}$ die folgende Potenzreihe, allgemein für jeden Wert von $e < 1$:

$$(\mathrm{I_b}) \qquad \sqrt{a} = \sqrt{a_*}\left[1 - \frac{1}{4}\,p\,e^2 + \frac{1}{16}\,p(p-1)\,e^4 + \cdots\right],$$

woraus ersichtlich ist, daß auffallenderweise der Term in e^4 wegfällt, wenn $p = 1$, so daß der Abbruch der Reihe bei e^2 nur einen Fehler in e^6 zur Folge hat.

Bilden wir nun weiter gemäß dem Gleichungssystem (3) zur Anwendung auf die Gleichungen (3b), (3c) und (3d) die erforderlichen Ableitungen von R und substituieren wir überall für a den unter ($\mathrm{I_b}$) abgeleiteten Ausdruck als Funktion von a_* und e, so erhalten wir bei Beschränkung auf die Glieder 2. Grades in e die neuen Differentialgleichungen:

$$\frac{de}{dt} = \varepsilon_1 e \sin\zeta \tag{7}$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = z_0 + z_1 e^2 + (z_2 + z_3 e^2) \cos\zeta \tag{8}$$

$$\frac{d\tilde{\omega}}{dt} = p_0 + p_1 \cos\zeta\,, \tag{9}$$

wo die Koeffizienten ε_1, z_0, z_1, z_2, z_3, p_0 und p_1 nur noch von a und a' abhängen und die folgende Bedeutung haben, wobei noch $N'(a_*) = \left(\frac{dN_i}{da}\right)_{a=a_*}$ fixiert:

$$10)\left\{\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= -\frac{2}{\sqrt{a_*}} N_2(a_*)\\
z_0 &= (p+2)\,n' - p\,n_* + 2p\sqrt{a_*}\,N_0'(a_*) - \frac{4}{\sqrt{a_*}} N_1(a_*)\\
z_1 &= -\frac{3}{4}p^2 n_* - \frac{1}{2}p^2\sqrt{a_*}\,N_0'(a_*) - p^2 a_*^{3/2}\cdot N_0''(a_*) +\\
&\quad + 4p\sqrt{a_*}\,N_1'(a_*) - \frac{2p}{\sqrt{a_*}} N_1(a_*) + \frac{2}{\sqrt{a_*}} N_1(a_*)\\
z_2 &= -\frac{4}{\sqrt{a_*}} N_2(a_*) = 2\,\varepsilon_1\\
z_3 &= +4p\sqrt{a_*}\,N_2'(a_*) + \frac{2}{\sqrt{a_*}} N_2(a_*) - \frac{2p}{\sqrt{a_*}} N_2(a^*)\\
p_0 &= \frac{2}{\sqrt{a_0}} N_1(a_*)\\
p_1 &= \frac{2}{\sqrt{a_*}} N_2(a_*).
\end{aligned}\right.$$

Alle von den Koeffizienten $N_i(a_*)$ und deren Ableitungen nach a abhängenden Funktionen N_i' sind nach (2) von der Ordnung der störenden Masse m' des großen Planeten Jupiter, die rund 10^{-3} beträgt. Auch die nicht unmittelbar von m' abhängenden Terme sind ebenfalls von der Ordnung m', indem zuerst der in z_0 auftretende Term: $(p+2)\,n' - p\,n_*$, d. h. die Abweichung von der Kommensurabilität, im vorliegenden Falle $3n' - n_*$ im

Höchstfalle zu $50''$ anzunehmen ist, also in bezug auf den arcus-Wert zu: $50''$ arc $1'' = \frac{1}{4000} = \frac{1}{4}\, m'$ der störenden Jupitermasse; ferner lautet der 1. Term von z_1: $-\frac{3}{4}\, p^2 n_*$, also wegen $p = 1$ und $n_* = 900''$: $\frac{3}{4}\, n_* = \frac{3}{4}\, 900''$ arc $1'' = 30\, m'$, also auch von der Ordnung der störenden Masse.

Bevor wir nun die allgemeine Untersuchung fortsetzen, wollen wir vorher unsere Differentialgleichungen zuerst in bezug auf bemerkenswerte partikuläre Lösungen, d. h. insbesondere in bezug auf bemerkenswerte periodische und asymptotische Lösungen untersuchen. In einem willkürlichen Zeitpunkt $t = 0$ sei der kritische Winkel $\zeta = 3l' - l - 2\bar{\omega} = 0$ resp. π, bei geeigneter Wahl von l_0, l'_0, und $2\bar{\omega}$. Ferner habe die Exzentrizität e einen Wert, der der Bedingung $\frac{d\zeta}{dt} = 0$ genügt, so daß nach der Gleichung (8) erhalten wird:

$$e^2 = -\frac{z_0 \pm z_2}{z_1 \pm z_3} \tag{11}$$

bei $\zeta = 0$ resp. π. Bei Substitution der Ausdrücke nach (10) folgt, wenn der Term $(m' f)$ die direkt von der störenden Masse m' abhängigen Terme zusammenfaßt:

$$e^2 = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{p^2} \cdot \frac{-p n_0 + (p+2) n'}{n_0} + m' \cdot f, \tag{11a}$$

wo f den Koeffizienten der in m' multiplizierten Terme fixiert. Da e^2 sich nach (11) aus zwei Summanden zusammensetzt, deren einer der Abweichung von der Kommensurabilität, der andere der störenden Masse proportional ist, so ist der so definierte Wert von e^2 eine kleine Größe, sobald die störende Masse und die Abweichung von der Kommensurabilität kleine Größen sind. Da $\sin\zeta = 0$ ist, so ist nach (7) auch $\frac{de}{dt}$ für $t = 0$ verschwindend; dann verschwinden aber für $t = 0$ nicht nur die ersten Ableitungen $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$, sondern überhaupt sämtliche Ableitungen von e und ζ nach t, wie unmittelbar aus den beiden Differentialgleichungen (7) und (8) folgt. Folglich sind e und ζ für alle Zeiten konstant und gleich ihren Ausgangswerten zur Zeit $t = 0$, abgesehen natürlich von den kurzperiodischen Störungen. Folglich ist dann auch die große Achse gemäß dem Integral (I) für alle Zeiten konstant. Nur die Perihellänge $\bar{\omega}$ ist veränderlich, indem sie der Zeit proportional variiert. Diese Ergebnisse sind unabhängig von jeglicher Beschränkung der Entwicklung der Störungsfunktion, was hervorzuheben ist. Denn bei unbeschränkter Entwicklung der Störungsfunktion verschwindet die Ableitung $\frac{de}{dt}$ für $\sin\zeta = 0$ stets, weil sie $\sin\zeta$ als Faktor enthält resp. nach Sinussen der Vielfachen von ζ fortschreitet. Die Bewegung des gestörten Körpers geht dann in der Weise vor sich, daß er, abgesehen von kurzperiodischen Störungen, eine für alle Zeiten konstante Ellipse beschreibt, deren Apsidenlinie mit konstanter Geschwindigkeit um die Sonne rotiert.

Zur Untersuchung der Stabilität dieser Lösungen haben wir die Variationsgleichungen aufzustellen und die charakteristischen Exponenten zu untersuchen. Setzen wir $e^2 = x$ und $\zeta = y$, ferner $x = x_0 + \xi$ und $y = y_0 + \eta$, wo das Par x_0, y_0 unsere periodische Ausgangslösung und ξ, η die Variationen von x_0 und y_0 fixieren, so lauten die entsprechenden Variationsgleichungen gemäß den Differentialgleichungen (7) und (8):

$$(12) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= \alpha \cdot \eta \\ \frac{d\eta}{dt} &= \beta \cdot \xi \end{aligned} \right. \qquad \text{wo} \quad \begin{aligned} \alpha &= \pm 2\varepsilon_1 x_0 \\ \beta &= z_1 \pm z_3 , \end{aligned}$$

wobei das obere Vorzeichen $\zeta = 0$, das untere $\zeta = \pi$ entspricht. Da die Lösung dieser Variationsgleichungen die folgende Form hat:

$$(13) \qquad \xi = C \cdot E^{s \cdot t} \quad \text{und} \quad \eta = D \cdot E^{s \cdot t} ,$$

so lautet die Bestimmungsgleichung für die charakteristischen Exponenten s:

$$(14) \qquad s^2 = \alpha \cdot \beta .$$

Folglich sind die periodischen Bahnen stabil, wenn α und β entgegengesetztes Vorzeichen, und instabil, wenn α und β das gleiche Vorzeichen haben. Dieses Ergebnis folgt auch aus dem Integral der beiden Variationsgleichungen:

$$F = \alpha \cdot \eta^2 - \beta\,\xi^2 = \text{const.} \tag{15}$$

Stellen ξ und η einen Punkt der $\xi\eta$-Ebene dar, so liegen die Punkte ξ, η auf einer Ellipse, d. h. auf stabiler Bahn, wenn α und β entgegengesetzte Vorzeichen, auf einer Hyperbel, also bei Instabilität, wenn α und β das gleiche Vorzeichen haben. Numerische Daten zur Stabilitätsfrage werden später unten gegeben.

Wir wollen jetzt zu den allgemeinen Untersuchungen zurückkehren, und zwar mit dem Ziele, außer dem schon abgeleiteten Integral (I) weitere Integrale zu suchen. Die Gleichungen (7) und (8) ergeben bei Division, also Elimination von t eine Differentialgleichung, nur zwischen e und ζ, deren Integration uns ein 2. Integral der Differentialgleichungen liefern wird. Multiplizieren wir vor der Division noch die erste Gleichung mit $2e$, so daß in den Differentialgleichungen überhaupt nur noch $e^2 = x$ und $\cos\zeta = y$ auftritt, so erhalten wir unter Division der beiden Gleichungen zwecks Elimination von explizitem t die folgende Differentialgleichung 1. Ordnung:

$$\frac{dy}{dx} = \alpha' + \frac{\beta'}{x} + \left(\gamma' + \frac{\delta'}{x}\right) \cdot y = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) \cdot y\,, \tag{16}$$

d. h. also einen Spezialfall der allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung, wobei die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\left\{\begin{array}{lll} \alpha' = -\dfrac{z_1}{2\,\varepsilon_1}\,, & \gamma' = -\dfrac{z_3}{2\,\varepsilon_1}\,, & \alpha_0 = \alpha' + \dfrac{\beta'}{x} \\ \beta' = -\dfrac{z_0}{2\,\varepsilon_1}\,, & \delta' = -\dfrac{z_2}{2\,\varepsilon_1}\,, & \alpha_1 = \gamma' + \dfrac{\delta'}{x} \end{array}\right\}. \tag{17}$$

Zur notwendigen Darstellung der Koeffizienten α' etc. führen wir zuvor noch statt des N neue Koeffizienten M ein, so daß $M_0' = a'^2 N_0'$, $M_0'' = a'^3 N_0''$, $M_1 = a' N_1$, $M_1' = a'^2 N_1' M_2 = a' N_2$, $M_2' = a a' N_2'$, so daß die Koeffizienten M jetzt nur noch von $\alpha = \dfrac{a}{a'}$ abhängen und die Koffizienten α', β', γ' und δ' auch nur noch von α abhängen; dann lauten die Koeffizienten α', β', γ' und δ' als Funktionen von den M folgendermaßen:

$$\left\{\begin{aligned}
\alpha' &= \frac{1}{M_2}\left[-\frac{3}{16}\frac{p^2}{\alpha} - \frac{1}{8}p^2\alpha M_0' - \frac{1}{4}p^2\alpha^2 M_0'' - \frac{1}{2}(p-1)M_1 + p\alpha M_1'\right] \\
\beta' &= -\frac{1}{4}\sqrt{\alpha}\cdot\frac{pn_0-(p+2)n'}{n'}\,\frac{1}{M_2} + \frac{1}{2}p\alpha\frac{M_0'}{M_2} - \frac{M_1}{M_2} \\
\gamma' &= p\frac{M_2'}{M_2} + \frac{1}{2}(1-p) \\
\delta' &= -1\,.
\end{aligned}\right. \tag{18}$$

Die durch die genäherte Kommensurabilität klein werdende Größe $(p+2)n' - pn_0$ ist nur in dem Koeffizienten β' enthalten.

Die obige lineare Differentialgleichung (16) ist nun in geschlossener Form integrierbar; hätten wir aber in der Entwicklung der Störungsfunktion außer dem Term in $\cos\zeta$ auch noch den Term in $\cos 2\zeta$ mitgenommen, so wäre im Zähler unserer Differentialgleichung außer y auch noch y^2 und ferner ein in y linearer Nenner aufgetreten, so daß die Gleichung die folgende Form erhalten hätte:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\alpha_0(x) + \alpha_1(x)\,y + \alpha_2(x)\,y^2}{\beta_0(x) + \beta_1(x)\cdot y}\,. \tag{19}$$

Wir hätten also alsdann eine allgemeine Riccatische Differentialgleichung erhalten, die wir nicht mehr in geschlossener Form hätten integrieren können.

Die Lösung unserer speziellen Riccatischen Gleichung (16) lautet nun folgendermaßen:

$$y = x^{\delta'}\cdot E^{\gamma' x}\left\{C + \int\left(\alpha' + \frac{\beta'}{x}\right)x^{-\delta'}\cdot E^{-\gamma' x}\,dx\right\}, \tag{20}$$

wo E wieder die Basis der natürlichen Logarithmen und C eine willkürliche Integrationskonstante bedeutet. Da in unserem Falle die Konstante $\delta' = -1$ ist, so ist das Integral rechter Hand von (20) in geschlossener Form integrierbar, so daß wir erhalten:

$$y = \frac{1}{x}E^{\gamma' x}\left\{C - \frac{\beta'}{\gamma'}E^{-\gamma' x} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2}E^{-\gamma' x}(1+\gamma' x)\right\}. \tag{21}$$

Substituieren wir hierin $x = e^2$ und $y = \cos\zeta$, so erhalten wir als Integral (II) unseres Problems:

$$(21_a)\ (\mathrm{II}) \qquad e^2 \cdot \cos\zeta = C \cdot E^{\gamma' e^2} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2}(1 + \gamma' e^2) - \frac{\beta'}{\gamma'}.$$

Hätten wir im Säkularteil und im Koeffizienten von $\cos\zeta$ außer den Termen 2. Grades noch Terme höheren Grades der Störungsfunktion mitgenommen, so wären α_0 und α_1 von der folgenden Form gewesen: $\alpha_0 = \alpha' + \frac{\beta'}{x} + \alpha_1' x + \alpha_2' x^2 + \cdots$ und analog α_1. In diesem Falle hätten wir also auch y nicht mehr in geschlossener Form, sondern von vorneweg in Form einer Potenzreihe wie α_0 und α_1 erhalten.

Das Integral (II) erlaubt uns, die Grenzformen der Bahn des Planetoiden, falls solche existieren, zu diskutieren. Da nämlich: (22) $-1 < \cos\zeta < +1$ sein muß, so liefert das Integral bei Kombination mit dieser Ungleichheit eine Ungleichung zwischen e und den beiden Parametern C und n_0, wo n_0 im Parameter z_0 in (10) resp. in β' (18) enthalten ist, eine noch zu erörternde Ungleichheit. Bei festgehaltenem C erhalten wir nämlich nach (22) eine Ungleichheit zwischen n_0 und e, indem::

$$(22) \qquad \frac{\beta'}{\gamma'} \gtrless \mp e^2 + C \cdot E^{\gamma' e^2} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2}(1 + \gamma'^2).$$

Die Auflösung dieser Ungleichheit nach e^2 wird nur im speziellen Falle $C = 0$ direkt ausführbar, weil die transzendente Funktion $E^{\gamma' e^2}$, die nur an C als Multiplikator gebunden ist, durch das Verschwinden von C in Wegfall käme und die Ungleichung dadurch linear in e^2 würde; weiter unten kommen wir hierauf zurück. Ist e überhaupt in Grenzen eingeschlossen, was wir noch durch Darstellung von e als Funktion von t zu untersuchen haben, so ist auch die große Achse a auf Grund des Integrals ($\mathrm{I_b}$) in Grenzen eingeschlossen.

Nachdem wir die Variabeln a und ζ mittels der Integrale (I) und (II) als Funktionen von e ermittelt haben, verbleibt noch die Darstellung von $\bar{\omega}$ als Funktion von e, und schließlich die Darstellung e als Funktion von t, um so alle 4 Variablen als Funktion der Zeit zu erhalten. Zuerst können wir in der Differentialgleichung (7), in der $\cos\zeta$ als Funktion von e, resp. direkt $e \cdot \cos\zeta$ nach (II) als Funktion von e darstellbar ist, die Variablen e und t separieren, indem nach (7) erhalten wird:

$$\varepsilon_1\, dt = \frac{de}{e \sin\zeta} = \pm \frac{1}{2} \frac{d(e^2)}{\sqrt{e^4 - (e^2 \cos\zeta)^2}}, \tag{23}$$

wo der Wurzel das Vorzeichen von $\sin\zeta$ zu geben ist, das $\sin\zeta$ im Moment t hat, wo der Sonderfall, daß ζ resp. $180 - \zeta$ sehr nahe 0 sind, noch besonders untersucht werden wird. Hier sei angenommen, daß $\sin\zeta$ im betrachteten Zeitintervall das Vorzeichen nicht ändert. Da $e^2 \cdot \cos\zeta$ nach (II) eine transzendente Funktion von e^2 ist, führt die Integration von (23) auf ein transzendentes Integral, das wir durch eine Potenzentwicklung von $e \cdot \cos\zeta$ nach Potenzen von e^2 vermeiden können. Durch nachfolgende Entwicklung der ganzen rechten Seite von (23) nach Potenzen von e^2 erhalten wir weiter die ganze rechte Seite von (23) als eine Potenzreihe nach e^2 und dann bei Umkehrung e^2 als eine nach positiven Potenzen von $t - t_0$ fortschreitende Reihe. Deshalb haben wir die rechte Seite von (23) zunächst in eine Potenzreihe nach e^2 zu entwickeln, und zwar zunächst den Nenner, weshalb wir zuerst die Funktion $e^2 \cdot \cos\zeta$ gemäß dem obigen Integral (II) nach e^2 bis e^4 zu entwickeln haben. Die Entwicklung ergibt, zuerst für $e^2 \cdot \cos\zeta$, nach II oben:

$$\begin{aligned} e^2 \cdot \cos\zeta &= C - \frac{\beta'}{\gamma'} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2} + e^2\left(C\gamma' - \frac{\alpha'}{\gamma'}\right) + \frac{1}{2} e^4 C \gamma'^2 = \\ &= K_0 + K_1 e^2 + K_2 \cdot e^4, \end{aligned} \tag{II$_a$}$$

so daß

$$e^4 - (e^2 \cos\zeta)^2 = A'(e^2)^2 + 2 B' e^2 + C'), \tag{24}$$

wo die Koeffizienten bedeuten:

$$\left\{ \begin{aligned} A' &= 1 - 2 C^2 \gamma'^2 + 3 C \alpha' + C \beta' \gamma' - \frac{\alpha'^2}{\gamma'^2} \\ B' &= -(C\gamma'^2 - \beta'\gamma' - \alpha')(C\gamma' - \alpha') \cdot (\gamma')^{-3} \\ C' &= -(C\gamma'^2 - \beta'\gamma' - \alpha')^2 \cdot (\gamma')^{-4}. \end{aligned} \right. \tag{24a}$$

Aus diesen Definitionen der Koeffizienten folgt, daß stets $C' < 0$ und wegen des mit B' gemeinsamen Faktors $(C\gamma'^2 - \beta'\gamma' - \alpha')$ die Koeffizienten C' und B' zugleich 0 sind, wenn der genannte Faktor 0 ist.

Ist nun im allgemeinen Falle $A' \neq 0$, so führt die Lösung unseres Integrals (23) nach (24), falls $A' > 0$ auf eine logarithmische, im Falle $A' < 0$ auf eine arc sin-Lösung und im Ausnahmefall $A' = 0$ auf eine algebraische Lösung in e^2. Die Lösungen lauten entsprechend:

$$
(25) \quad \left\{
\begin{aligned}
&(1)\ A' > 0 : \varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2 = \\
&\qquad = \frac{1}{2\sqrt{A'}} \ln \left[\frac{A' e^2 + B'}{\sqrt{A'}} + \sqrt{A' e^4 + 2 B' e^2 + C'} \right. \\
&(2)\ A' < 0 : \varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2 = \frac{1}{2\sqrt{-A'}} \arcsin \left(- \frac{A' e^2 + B'}{\sqrt{B'^2 - A' C'}} \right) \\
&(3)\ A' = 0 : \varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2 = \frac{1}{2 B'} \sqrt{2 B' e^2 + C'},
\end{aligned}
\right.
$$

wo ε_2 die willkürliche Konstante, bei $t = t_0$ direkte Funktion von $e = e_0$.

Bei Umkehrung der Darstellung erhalten wir e^2 als Funktion der Zeit, wenn $t_0 =$ Epoche:

$$
(26) \quad \left\{
\begin{aligned}
&1.\ e^2 = \frac{1}{2\sqrt{A'}} \cdot \\
&\left\{ \left(E^{\varepsilon_1 \sqrt{A'} (t - t_0) + \varepsilon_3} - \frac{B'}{\sqrt{A'}} E^{-(\varepsilon_1 \sqrt{A'} (t - t_0) + \varepsilon_3)} \right)^2 - C' \cdot E^{-2 (\varepsilon_1 \sqrt{A'} (t - t_0) + \varepsilon_3)} \right\} \\
&\qquad \text{wo} \quad \varepsilon^3 = \varepsilon_2 \sqrt{A'} \\
&2.\ e^2 = - \frac{B'}{A'} - \sqrt{B'^2 - A' C'} \sin \left[2 \varepsilon_1 \sqrt{-A'} (t - t_0) + \varepsilon_3 \right] \\
&\qquad \text{wo} \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_2 \sqrt{-A'} \\
&3.\ e^2 = - \frac{C'}{2 B'} + 2 B' \left[\varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2 \right]^2,
\end{aligned}
\right.
$$

so daß wir also im 1. Falle eine exponentielle, im 2. Falle eine periodische und im 3. Falle eine algebraische Form der Lösung erhalten. Sobald e bekannt ist, folgt nach (21a) resp. (II) die Kenntnis von ζ auf Grund von C.

Im Ausnahmefalle, wo die Discriminante $B'^2 - A' \cdot C' = 0$, wo $C' < 0$ (24a), also $A' < 0$ sein muß, ergibt die Substitution von $C' = \frac{B'^2}{A'}$, so daß also: $A'(e^2)^2 + 2B'e^2 + C' = \frac{1}{A'}(A'e^2 + B')^2$ in (23) die folgende Gleichung:

$$\varepsilon_1 \cdot dt = \frac{1}{2}\sqrt{A'} \cdot \frac{d(e^2)}{A'e^2 + B'} = \frac{1}{2\sqrt{A'}}\, d\,[\ln(A'e^2 + B')] =$$
$$= \text{imaginär},$$

so daß der Ausnahmefall verschwindender Diskriminante in Wegfall kommt. Ist die Bedingung des Nullwerdens der Discriminante aber dadurch erfüllt, daß $B' = 0$, alsdann den Definitionen (24a) entsprechend, auch $C' = 0$, indem der gemeinsame Faktor: $C \cdot \gamma'^2 - \beta'\gamma' - \alpha' = 0$ ist, so geht unsere Gleichung (23) nach (24) über in die folgende Gleichung: $\varepsilon_1 dt = \frac{1}{2}\frac{d(e^2)}{e^2\sqrt{A'}} = \frac{1}{2\sqrt{A'}}\, d\ln(e^2)$, so daß, falls $A' > 0$, bei Integration:

$$\varepsilon_1(t - t_0) = \frac{1}{2\sqrt{A'}} \ln\left(\frac{e^2}{e_0^2}\right), \tag{27}$$

wo e_0 eine willkürliche Integrationskonstante fixiert, nämlich die dem Zeitpunkt t_0 entsprechende Exzentrizität e_0. Die Umkehrung ergibt dann: $e^2 = e_0^2 \cdot E^{2\sqrt{A'}\varepsilon_1(t-t_0)}$, wo der Zeitkoeffizient $\varepsilon_1 < 0$ nach (10), weil $N_2 > 0$ wie auch M_2. Folglich geht die Exzentrizität e in Richtung auf $t = +\infty$ asymptotisch in $e = 0$ über, die Bahn also in eine Kreisbahn.

Ist aber der den beiden Koeffizienten B' und C' gemeinsame Faktor: $F = C\gamma'^2 - \beta'\gamma' - \alpha' \neq 0$, so kann B' nur dadurch 0 sein, daß der 2. Faktor in B': $C\gamma'^2 - \alpha' = 0$ ist, also $C = \frac{\alpha'}{\gamma'^2}$. Folglich lautet unsere Differentialgleichung nach (23) und (24), wenn noch $e^2 = x$ und $C' = -C''$, wo dann $C'' > 0$ ist, wie folgt:

$$\varepsilon_1 dt = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{A'x^2 - C''}}, \tag{28}$$

wo $A' > 0$, weil bei $A' < 0$ der Radikand $A'x^2 - C'' < 0$ würde, die Wurzel also imaginär wäre, da $C'' > 0$ ist. Substituieren wir in (28): $x = \sqrt{\frac{C''}{A'}} \cdot y$, so folgt die neue Gleichung:

$$(29) \qquad 2\,[\varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2]\, \sqrt{A'} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 - 1}},$$

so daß bei Substitution von $y = \frac{1}{\sin\varphi}$ die folgende Endform für die Lösung entsteht: $2\,[\varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2]\, \sqrt{A'} = -\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$. Zur praktischen Auswertung dieses transzendenten Integrals werde $\frac{1}{\sin\varphi}$ in eine Potenzreihe nach φ entwickelt und dann eine Zerlegung des Integrals in folgender Weise vorgenommen, daß:

$$(31) \qquad \frac{d\varphi}{\sin\varphi} = \frac{1}{\varphi}\, d\varphi + \left(\frac{1}{6}\,\varphi + \frac{19}{720}\,\varphi^3 + \cdots\right) d\varphi,$$

so daß bei Integration erhalten wird:

(32)

$$2\,[\varepsilon_1 (t - t_0) + \varepsilon_2]\, \sqrt{A'} = -\ln\varphi - \frac{1}{12}\,\varphi^2 - \frac{19}{2880}\,\varphi^4 + \cdots,$$

also auf Grund einer schnell konvergenten Potenzreihe nach dem Parameter φ mit der Integrationskonstanten ε_2. Es war $A' > 0$ angenommen, weil sonst bei $A' < 0$ der Radikand $A'x^2 - C'' < 0$ wird, die Wurzel also imaginär geworden wäre, da $C'' > 0$ ist.

Jetzt bleibt der Fall nachzuholen, wo die Funktion $\sin\zeta$ im Zeitintervall, über welches integriert wird, das Vorzeichen ändert, also ζ in der Nähe $\zeta = 0°$ resp. $180°$ gelegen ist, so daß die obige Betrachtungsweise hinfällig wird. Anstatt wie oben $e^2 \cdot \cos\zeta$ nach (II) als Funktion von e^2 in die Differentialgleichung (7) für $\frac{de}{dt}$ zu substituieren, soll jetzt e^2 als Funktion von $\cos\zeta$ in die Differentialgleichung (8) für $\frac{d\zeta}{dt}$ substituiert werden. Schon nach oben $\mathrm{II_a}$ haben wir der Funktion $e^2 \cos\zeta$ die Form:

$$(33a) \qquad e^2 \cos\zeta = K_0 + K_1 e^2 + K_2 e^4$$

gegeben, wo die Koeffizienten K_1 die folgende Bedeutung haben:

$$(33b) \qquad K_0 = C - \frac{\beta'}{\gamma'} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2} \qquad K_1 = C\gamma' - \frac{\alpha'}{\gamma'} \qquad K_2 = \frac{1}{2}\, C\gamma'^2,$$

so daß bei Auflösung nach e^2 als Funktion von ζ erhalten wird:

$$(34)\quad \begin{cases} e^2 = b_0 + b_1 \cos\zeta + \sqrt{c_0 + c_1 \cos\zeta + c_2 \cos^2\zeta}, \\ \text{wo } b_0, b_1 \text{ etc. die folgende Bedeutung haben:} \\ b_0 = -\frac{1}{2}\frac{K_1}{K_2}, \quad b_1 = \frac{1}{2}\frac{1}{K_2}, \quad c_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{K_1}{K_2}\right)^2 - \frac{K_0}{K_2}, \\ c_1 = -\frac{1}{2}\frac{K_1}{K_2^2}, \quad c_2 = \frac{1}{4}\frac{1}{K_2^2}. \end{cases}$$

Geben wir nun der Gleichung (8) in ζ die Form

$$(35)\qquad t - t_0 = \int \frac{d\zeta}{f(e,\zeta)}$$

so bedeutet:

$$(36)\qquad f(e,\zeta) = z_0 + z_1 e^2 + (z_2 + z_3 e^2)\cos\zeta,$$

also bei Substitution von e^2 nach (34), und $e^2 \cos\zeta$ nach (33a): $f(e,\zeta) = d_0 + d_1 \cos\zeta + d_2 \cos^2\zeta + \sqrt{c_0 + c_1 \cos\zeta + c_2 \cos^2\zeta} \times (d_3 + d_4 \cos\zeta)$. Im Integral (35) verschwindet der Nenner $f(e,\zeta)$ weder mit $\zeta = 0$ noch mit $\zeta = 180°$, so daß wir die Darstellung (35) zur Untersuchung des Verhaltens des Integrals um $\zeta = 0$ und $\zeta = 180°$ heranziehen können, während dies bei Verwendung der Differentialgleichung (7) in $\frac{de}{dt}$ mit $\sin\zeta$ als Koeffizienten nicht der Fall gewesen wäre.

Um nun das obige Integral (35) für kleine Werte von $\sin\zeta$ um $\zeta = 0$ resp. $180°$ zu untersuchen, wollen wir das Integral nach Potenzen von ζ entwickeln, so daß sich die folgenden Entwicklungen direkt auf den Fall $\zeta = 0$ resp. $\zeta = 180°$ beziehen. Die dem letzteren Falle entsprechenden Formeln folgen aus denen um $\zeta = 0°$ herum durch eine Umkehrung der Vorzeichen von c_1, d_1, und d_4, die in der Formel für $f(\zeta)$ mit dem Faktor $\cos\zeta$ vorkommen, der also bei ζ um $180°$ das negative Zeichen erhält. Entwickeln wir nun die rechte Seite von (36) $\frac{d\zeta}{dt} = f(\zeta)$ in eine Potenzreihe nach ζ, so geht diese Gleichung in die folgende über, entwickelt bis zu den Termen 4. Grades in ζ:

$$(37)\qquad \frac{d\zeta}{dt} = l_0 + l_2\zeta^2 + l_4\zeta^4 + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten l_i die folgende Bedeutung haben:

$$(38)\qquad l_0 = d_0 + d_1 + d_2 + i_0, \quad l_2 = -\frac{1}{2}\,d_1 - d_2 + i_2,$$
$$l_4 = \frac{1}{24}\,d_1 + \frac{1}{3}\,d_2 + i_4$$

unter folgender Bedeutung der in den l_i enthaltenen Koeffizienten: i_0, i_2 und i_4:

$$(39)\left\{\begin{aligned} i_0 &= (d_3 + d_4)\,(c_0 + c_1 + c_2),\\ i_2 &= (c_0 + c_1 + c_2)^{-1/2}\left\{-\frac{1}{2}\,d_3\left(\frac{1}{2}\,c_1 + c_2\right) - \frac{1}{2}\,d_4\left(c_0 + \frac{3}{2}\,c_1 + 2\,c_2\right)\right.\\ i_4 &= (c_0 + c_1 + c_2)^{-3/2}\left\{d_3\left[\frac{1}{6}\,c_0\left(\frac{1}{8}\,c_1 + c_2\right) - \frac{1}{96}\,c_1^2 + \frac{1}{24}\,c_2^2 + \frac{1}{16}\,c_1 c_2\right]\right.\\ &\qquad \left. + d_4\left[\frac{1}{24}\,c_0\left(c_0 + \frac{11}{2}\,c_1 + 12\,c_2\right) + \frac{5}{32}\,c_1^2 + \frac{1}{3}\,c_2^2 + \frac{25}{48}\,c_1\,c_2\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Bei Umkehrung der Differentialgleichung (37) auf die Form:

$$(40)\qquad dt = \frac{d\zeta}{l_0 + l_2\zeta^2 + l_4\zeta^4 + \cdots},$$

ergibt sich dann nach Potenzentwicklung der rechten Seite nach ζ die folgende Lösung:

$$(41)\qquad t - t_0 = m_0 + m_1 \cdot \zeta + m_3\,\zeta^3 + m_5\,\zeta^5 + \cdots,$$

wobei die Koeffizienten m_i die folgende Bedeutung erhalten: $m_0 = -m_1\,\zeta_0 - m_3\,\zeta_0^3 - m_5\,\zeta_5^0$, wo ζ_0 der für $t = t_0$ gültige Wert von ζ ist. Weiter wird:

$$(42)\qquad m_1 = \frac{1}{l_0}, \qquad m_3 = -\frac{1}{3}\cdot\frac{l_2}{l_0^2}, \qquad m_5 = \frac{1}{5}\,\frac{l_2^2 - l_0\,l_4}{l_0^3}.$$

Entwickeln wir umgekehrt ζ nach Potenzen von $t - t_0 = \tau$, so daß also:

$$(43)\qquad \zeta = \zeta_0 + f_1 \cdot \tau + f_3 \cdot \tau^3 + f_5 \cdot \tau^5 + \cdots,$$

so ergibt die Substitution von (43) in (41) die folgende Gleichung in τ zur Bestimmung der Koeffizienten der Potenzen von τ:

$$\tau = \sum_{i=1}^{i=3} m_i (f_1 \tau + f_3 \tau^3 + f_5 \tau^5)^i . \tag{44}$$

Der Vergleich gleichhoher Potenzen von τ ergibt dann die Gleichungen, d. h. bis zur 5. Potenz von τ, zur Bestimmung der Koeffizienten f_i, nämlich:

$$(1)\ \text{bei } (\tau)^1 : 1 = m_1 f_1, \quad 2.\ (\tau)^3 : 0 = m_1 f_3 + m_3 \cdot f_1^3,$$
$$3.\ (\tau)^5 : 0 = m_1 f_5 + 3 m_3 f_1^2 \cdot f_3 + m_5 f_1^5,$$

also f_i sukzessive durch folgende Ausdrücke dargestellt werden:

$$f_1 = \frac{1}{m_1} \qquad f_3 = -\frac{m_3}{m_1^4} \qquad f_5 = 3\frac{m_3^2}{m_1^7} - \frac{m_5}{m_1^6} . \tag{45}$$

Die Kriterien zu beiden Sorten von Lösungen, nämlich: $A' \gtreqless 0$, welche nach der Darstellung von A' in der Definition (24_a) eine Ungleichung zwischen den Integrationskonstanten C und dem in β', Formel (18) enthaltenen n_0 darstellen, können, wenn für C der aus dem Integral (21_a) $\equiv$ (II) folgende Ausdruck als Funktion von e, ζ und dem von β' abhängigen n_0 substituiert wird, in für die Theorie wichtige Ungleichungen in bezug auf die Größen e und n_0 übergeführt werden. Unser Ziel ist, die Grenzwerte, in welche n_0 im Falle der Libration eingeschlossen resp. von deren Intervall n_0 ausgeschlossen ist, zu bestimmen. Geben wir deshalb dem Koeffizienten A' die von β' abhängige gesuchte Form, gemäß (24_a), nachdem C und C^2 nach (II) als Funktionen von e, ζ, α', β', γ' substituiert worden sind, so folgt:

$$A' = \varkappa \cdot \beta'^2 + \lambda \cdot \beta' + \mu, \tag{46}$$

wo die Koeffizienten $\varkappa$, λ und μ folgendermaßen lauten:

$$(47)\left\{\begin{aligned}
\varkappa &= (1 - 2E^{-\gamma' e^3})\, E^{-\gamma' e^2} \\
\lambda &= \left[4\frac{\alpha'}{\gamma'} + \alpha' e^2 - 4\frac{\alpha'}{\gamma'} E^{-\gamma' e^2} - 4\alpha' e^2 E^{-\gamma' e^2} + \cos\zeta\,(\gamma' e^2 - 4\gamma' e^2 E^{-\gamma' e^2})\right] E^{-\gamma' \cdot e^2} \\
\mu &= 1 - \frac{\alpha'^2}{\gamma'^2} + 3\frac{\alpha'^2}{\gamma'^2}(1 + \gamma' e^2)\, E^{-\gamma' e^2} - 2\frac{\alpha'^2}{\gamma'^2} - 2\frac{\alpha'^2}{\gamma'}(2 + \gamma' e^2) e^2 \cdot E^{-2\gamma' e^2} \\
&\quad + \left\{3\alpha' - [4\alpha'(1 + \gamma' e^2) + 2\gamma'^2 e^2 \cos\zeta]\, E^{-\gamma' e^2}\right\} e^2 \cdot E^{-\gamma' e^2} \cos\zeta .
\end{aligned}\right.$$

Für die Praxis ist es zweckmäßig, in λ und μ die von ζ abhängigen Teile von den übrigen zu trennen, so daß wir erhalten:

$$
(48)\left\{
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\lambda &= \lambda_1 + \lambda_2 \cos\zeta \\
\mu &= \mu_1 + (\mu_2 + \mu_3 \cos\zeta)\cos\zeta
\end{aligned}\right\} \quad \text{wo} \\
&\lambda_1 = \left(4\frac{\alpha'}{\gamma'} + \alpha' e^2 - 4\frac{\alpha'}{\gamma'} E^{-\gamma'\varepsilon^2} - 4\alpha' e^2 \cdot E^{-\gamma'\varepsilon^2}\right) E^{-\gamma'\varepsilon^2} \\
&\lambda_2 = (1 - 4E^{-\gamma'\varepsilon^2})\,\gamma' e^2 \cdot E^{-\gamma'\varepsilon^2} \\
&\mu_1 = 1 - \frac{\alpha'^2}{\gamma'^2} + 3\frac{\alpha'^2}{\gamma'^2}(1 + \gamma' e^2) E^{-\gamma' e^2} - 2\frac{\alpha'^2}{\gamma'^2} E^{-2\gamma'\varepsilon^2} \\
&\qquad\qquad - 2\frac{\alpha'^2}{\gamma'}(2 + \gamma' e^2)\, e^2 \cdot E^{-2\gamma'\varepsilon^2} \\
&\mu_2 = [3 - 4(1 + \gamma' e^2) E^{-\gamma' e^2}]\,\alpha' e^2 \cdot E^{-\gamma'\varepsilon^2} \\
&\mu_3 = -2\gamma'^2 \cdot e^4 \cdot E^{-2\gamma' e^2}.
\end{aligned}\right.
$$

Da nun λ_1 und $\mu_1 - 1$ nach diesen Formeln für $e = 0$ durch gegenseitiges Wegheben aller Summanden verschwinden, so müssen wir diese Größen, um sie numerisch genau und nicht als kleine Differenz großer Zahlen zu erhalten, nach Potenzen von e entwickeln. Die Rechnung ergibt:

$$
(49)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left(1 + 2\gamma' e^2 - \frac{4}{3}\gamma'^2 \cdot e^4 + \cdots\right)\alpha' e^2 E^{-\gamma' e^2} \\
\mu_1 &= 1 + \frac{1}{2}\alpha'^2 e^4 \left(1 - \frac{2}{3}\gamma' e^2 + \cdots\right).
\end{aligned}\right.
$$

Die Koeffizienten λ_2, μ_2 und μ_3 verschwinden direkt mit $e = 0$, und zwar λ_2 und μ_2 im 2. Grade von e, μ_3 mit dem 4. Grade in e.

Nehmen wir nun an, daß in der Bedingung für eine Libration:

$$
(50)\qquad A' = \varkappa\beta'^2 + \lambda\cdot\beta' + \mu < 0,
$$

der Koeffizient K nach (47) in eine Potenzreihe nach e^2 entwickelt werde, so daß $\varkappa = -1 + 3\gamma' e^2 + \cdots$, so ist also $\varkappa$ für kleine Werte von e negativ, nahezu -1, so daß folglich in A' der nach Abzweigung von K verbleibende Faktor:

$$
(51)\qquad \beta'^2 + \frac{\lambda}{\varkappa}\beta' + \frac{\mu}{\varkappa} > 0
$$

sein muß

Da sich aus der Auflösung von (51) ergibt, daß

$$(52)\qquad \left(\beta' + \frac{1}{2}\frac{\lambda}{\varkappa}\right)^2 - \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\varkappa^2} + \frac{\mu}{\varkappa} > 0,$$

so folgt zuerst, daß, wenn die Summe

$$(53)\qquad \frac{1}{4}\frac{\lambda^2}{\varkappa^2} - \frac{\mu}{\varkappa} = \nu^2, \quad \text{also}$$

$$(53a)\qquad \nu = \frac{1}{2\varkappa}\sqrt{\lambda^2 - 4\varkappa\mu}$$

ist, die Ungleichung besteht:

$$(54)\qquad \left(\beta' + \frac{\lambda}{2\varkappa}\right)^2 > \nu^2 \quad \text{oder} \quad \left|\beta' + \frac{\lambda}{2\varkappa}\right| > \nu,$$

so daß bei Auflösung nach β', das nach (18) die kritische Differenz $p\,n_0 - (p+2)\,n'$ enthält, die Grenzgleichung für β' entsteht:

$$(55)\qquad -\nu - \frac{\lambda}{2\varkappa} > \beta' > +\nu - \frac{\lambda}{2\varkappa},$$

wo nach der Definition (9) β' explizit lautet:

$$(56)\qquad M_2 \cdot \beta' = -\frac{1}{4}\sqrt{\alpha} \cdot \frac{p\,n_0 - (p+2)\,n'}{n'} + \frac{1}{2}\,p\,\alpha\,M_0' - M_1,$$

woraus β' als Funktion von n_0 und umgekehrt folgen. Durch Substitution von (56) in (55) folgt bei Auflösung nach der kritischen Differenz, wobei $M_2 > 0$ ist:

$$(57\text{a})\qquad F_l < \frac{p\,n_0 - (p+2)\,n'}{n'} < F_r, \quad \text{wo } F_l \text{ und } F_r:$$

$$(57\text{b})\left\{\begin{aligned} F_l &= \left[+\frac{1}{2}\,p\,\alpha\,M_0' - M_1 - M_2\left(+\nu + \frac{\lambda}{2\varkappa}\right)\right]\frac{4}{\sqrt{\alpha}} \\ F_r &= \left[+\frac{1}{2}\,p\,\alpha\,M_0' - M_1 - M_2\left(+\nu - \frac{\lambda}{2\varkappa}\right)\right]\frac{4}{\sqrt{\alpha}} \end{aligned}\right\}.$$

§ 2. Die Integration der Differentialgleichungen für die Perihellänge

Es verbleibt nun noch die Integration der Differentialgleichungen für die Perihellänge, entsprechend der Differentialgleichung (9), wonach

$$\frac{d\varpi}{dt} = p_0 + p_1 \cos\zeta, \tag{58}$$

wo die Koeffizienten p_0 und p_1 Konstanten sind, definiert durch die Formeln (10), wonach beide vom Grade 0 in den Exzentrizitäten. Zuerst können wir den Koeffizienten cos ζ nach (33a) auf die folgende nur von e abhängige Form bringen:

$$\cos\zeta = \frac{1}{e^2}(K_0 + K_1 e^2 + K_2 e^4), \tag{59}$$

so daß wir also die folgenden Integrale (a) $K_0 \int \frac{dt}{e^2}$, (b) $K_1 \int dt$, (c) $K_2 \int e^2\, dt$ als Funktion der Zeit darzustellen haben, wobei e^2 als Funktion der Zeit durch die entsprechenden Darstellungen in III zu ersetzen ist, also durch periodische resp. asymptotische Darstellungen als Funktion der Zeit, in Abhängigkeit von dem Koeffizienten $A' \gtrless 0$.

Zuerst soll der Fall $A' > 0$, einer logarithmisch-asymptotischen Darstellung entsprechend, behandelt werden, also der Term der Form: $J_0 = K_0 \int \frac{dt}{e^2}$. Durch die Substitution der entsprechenden früheren Lösung erhalten wir zuerst die folgende Form für J_0:

$$J_0 = 2K_0\sqrt{A'} \int \frac{E^{2\varepsilon_1\sqrt{A'}(t-t_0)}}{\left[\left(E^{2\varepsilon_1\sqrt{A'}(t-t_0)} - \frac{B'}{\sqrt{A'}}\right)^2 - C'\right.}\,. \tag{60}$$

Lösen wir das Integral mittels der Substitution:

$$E^{2\varepsilon_1\sqrt{A'}(t-t_0)} - \frac{B'}{\sqrt{A'}} = x, \tag{61}$$

so ergibt sich, wenn noch

$$-\frac{B'}{\sqrt{A'}} = \nu \tag{62}$$

gesetzt wird:

$$J_0 = 2 K_0 \sqrt{A'} \int \frac{x-\nu}{x^2+\nu^2}\, dt\,, \tag{63}$$

wo nach (24a) $\lambda^2 = -C' > 0$. Da nach obiger Definition (61) von x: $dt = \frac{1}{2\varepsilon_1 \sqrt{A'}} E^{-2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} \cdot dx$, so folgt, wenn noch

$$\varepsilon_1 \sqrt{A'} = \mu \tag{64}$$

gesetzt und nach obiger Definition (61) die Funktion $E^{2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} = x - \nu$ substituiert wird, analog $dt = \frac{1}{2\mu} \frac{dx}{x-\nu}$, die neue Form für J_0:

$$J_0 = K_0 \frac{\sqrt{A'}}{\mu} \int \frac{dx}{x^2+\lambda^2}\,, \tag{65}$$

oder nach Substitution von $x = \lambda \cdot y = \sqrt{-C'} \cdot y$

$$J_0 = K_0 \frac{\sqrt{A'}}{\mu - \lambda} \text{ arc tg } y, \tag{66}$$

wo schließlich noch $\mu \cdot \lambda = \varepsilon_1 \sqrt{A'} \sqrt{-C'}$ und $y = \frac{x}{\sqrt{-C'}}$, so daß:

(67)

$$J_0 = \frac{K_0}{\varepsilon_1 \sqrt{-C'}} \text{ arc tg } \frac{x}{\sqrt{-C'}}\,, \text{ wo } \frac{x}{\sqrt{-C'}} = \frac{1}{\sqrt{-C'}} \left(E^{-2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} - \frac{B'}{\sqrt{A'}} \right),$$

womit der 1. Term des Integrals in $\bar{\omega}_0'$: $\int \cos \zeta \cdot dt$ als Funktion der Zeit explizit dargestellt ist.

Das 2. Integral lautet nach obiger Definition (59b): $J_1 = \int \frac{1}{e^2} K_1 e^2\, dt$, so daß also $J_1 = K_1 (t - t_0)$, wo nach obiger Definition (33b): $K_1 = C\gamma' - \frac{\alpha'}{\gamma'}$, so daß das 2. Integral eine der Zeit t proportionale Größe fixiert.

Schließlich wird der 3. Term der logarithmisch-asymptotischen Lösung: $K_2 \int e^2\, dt$, wo e^2 jetzt dem Term 1) von (26) zu entnehmen ist, mit dem Resultate, daß:

(68) $$J_2 = K_2 \int e^2 \cdot dt =$$

$$= K_2 \frac{1}{2\sqrt{A'}} \left\{ \frac{1}{2\varepsilon_1 \sqrt{A'}} \cdot E^{2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} - \frac{B'^2}{2\varepsilon_1 A' \sqrt{A'}} E^{-2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} - \frac{2B'}{\sqrt{A'}}(t-t_0) + \frac{C'}{2\varepsilon_1 \sqrt{A'}} E^{-2\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t-t_0)} \right\}.$$

Die Zusammenfassung der Terme ergibt dann den gesuchten analytischen Ausdruck für die Perihellänge: $\tilde{\omega} = p_0'(t - t_0) + p_1(J_0 + J_1 + J_2)$ mit in t säkularer und exponentieller Darstellung der logarithmisch-asymptotischen Lösung, wobei $p_0' = p_0 + \Delta p$, wo in Δp die Säkularterme in J_1 und J_2 zusammengefaßt sind.

Jetzt gehen wir zum Falle $A' < 0$ der libratorischen Lösung über. In diesem Falle ist nach (26): $e^2 = a + b \cdot \sin(c \cdot t)$ von periodischer Form, wobei $a = -\frac{B'}{A'}$ und $b = -\frac{\sqrt{B'^2 - A'C'}}{A'}$ $c = 2\varepsilon_1 \sqrt{-A'}$, also das zu lösende Integral

(69) $$J_1 = \int \frac{dt}{e^2} = \int \frac{dt}{a + b \sin A}$$

mit der Lösung:

$$J_1 = \frac{2}{ac\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}} \operatorname{arc\,tg} \left[\sqrt{\frac{1 - b/a}{1 + b/a}} \operatorname{tg} \left\{ \frac{1}{2} c(t - t_0) - \frac{1}{4}\pi \right\} \right],$$

wobei in unserem Falle: $\frac{b}{a} = \frac{B'^2 - A'C'}{B'}$, also $\sqrt{1 - (b/a)^2} = \frac{\sqrt{A'C'}}{B'}$ und $ac = -2\varepsilon_1 \frac{B'}{A'} \sqrt{-A'(t - t_0)}$ und folglich:

$$\sqrt{\frac{1 - b/a}{1 + b/a}} = \frac{\sqrt{A'C'}}{B' + \sqrt{B'^2 - A'C'}} \quad \text{oder} \quad = \frac{B' - \sqrt{B'^2 - A'C'}}{\sqrt{A'C'}}.$$

Da ferner $a \cdot c = -2 \frac{B'}{A'} \varepsilon_1 \sqrt{-A'}$, so erhalten wir die folgende Darstellung:

wenn noch

$$A' = -A'', \text{ wo } A' < 0, \text{ also } A'' > 0 \text{ und } C' < 0:$$

(71)

$$J_1 = p_1 K_0 \frac{\sqrt{A''}}{\sqrt{A' C'}} \operatorname{arc\,tg} \left\{ \frac{B' - \sqrt{B'^2 - A' C'}}{\sqrt{A' C'}} \operatorname{tg} \left[\varepsilon_1 \sqrt{-A'} (t - t_0) - \frac{\pi}{4} \right] \right\},$$

wo noch für K_0 zu setzen ist: $K_0 = C - \frac{\beta'}{\gamma'} - \frac{\alpha'}{\gamma'^2}$ und zu beachten, daß $A' < 0$ und $C' < 0$.

Das nächste Teil-Integral (72) $J_2 = p_1 \int K_1 \cdot dt = p_1 K_1 (t - t_0)$ ist hiermit analytisch sogleich erledigt, wobei $K_1 = C\gamma' - \frac{\alpha'}{\gamma'}$. Zur Frage der Größenordnung der Koeffizienten ist zu bemerken, daß zunächst allgemein in bezug auf alle 4 Koeffizienten α', β', γ' und δ', zuerst α', wie aus der Definition in (18) ersichtlich ist, infolge von M_2 immer von der Ordnung -1 der störenden Masse m' ist; weiter ist β' wegen der Proportionalität zu $\frac{pn - (p+2)n'}{n'} : M_2$ zuerst im Falle starker Annäherung an die Kommensurabilitätsstelle, wenn also der 1. Faktor sehr klein im Verhältnis zum Koeffizienten M_2, der stets von der Ordnung der störenden Masse des Jupiter ist, klein von der 1. Ordnung. Sonst wird β' von der -1. Ordnung der störenden Masse m'. Die beiden letzten Koeffizienten γ' und δ' sind nach ihrer Definition stets von der 0. Ordnung der störenden Masse m'. Folglich ergibt sich in bezug auf das Integral J_2 nach obiger Definition des Koeffizienten K_1, daß zuerst der 1. Term $C \cdot \gamma'$ gemäß der Definition von C in (21_a) wegen des Koeffizienten α' von der Ordnung $(m')^{-1}$, also numerisch groß ist, ebenso wie der 2. Term in K_1, ebenfalls wegen des Koeffizienten α'. Folglich ist K_1 insgesamt als von der Ordnung -1 in bezug auf die Masse m' anzusehen. Da J_2 aber noch p_1 zum Faktor hat, so wird insgesamt die Störung J_2 von der Ordnung 0 der Jupitermasse.

Als 3. Term bleibt noch die Untersuchung von $J_3 = p_1 \cdot K_2 \int e^2 \cdot dt$, wenn $K_2 = \frac{1}{2} C\gamma'^2$ und $e_2 = -\frac{B'}{A'} - \frac{\sqrt{B'^2 - A'C'}}{A'} \times$ $\times \sin 2\varepsilon_1 \sqrt{-A'} (t - t_0)$, so daß:

$$(73) \quad J_3 = -\frac{1}{2} p_1 C \frac{B'}{A'} \gamma'^2 (t - t_0) +$$

$$+ \frac{1}{4} p_1 C \frac{\gamma'^2}{\varepsilon_1 \sqrt{-A'}} \sqrt{B'^2 - A'C'} \cos \left[2\sqrt{-A'}\, \varepsilon_1 (t - t_0)\right],$$

so daß schließlich

$$\bar{\omega} = \bar{\omega}_0 + \bar{\omega}_1 (t - t_0) + P, \tag{74}$$

wo P die langperiodischen Terme in J_1, J_2 und J_3, ferner $\bar{\omega}_1$ die säkularen Teile und $\bar{\omega}_0 = (\bar{\omega} - P)$ die Perihellänge für den Moment $t = t_0$ der Epoche fixieren.

Zum Schluß der Analyse der verschiedenen Fälle in bezug auf die analytische Darstellung der Größe ζ verbleibt nochmals der kritische Fall, wo ζ in der Nähe von $\zeta = 0$ resp. $\zeta = 180^\circ$ gelegen ist. Die Funktion $f(\zeta)$ reduziert sich in diesen Fällen auf:

$$f(\zeta) = d_0 \pm d_1 + d_2 + \sqrt{c_0 \pm c_1 + c_2}\,(d_3 \pm d_4),$$

so daß gemäß der Gleichung:

$$t - t_0 = \int \frac{d\zeta}{f(\zeta)} \tag{75}$$

die einfache Lösung lauten würde: $\zeta = f_0(t - t_0)$, wo f_0 bei $\zeta = 0$ resp. 180° eine Konstante fixiert. In unserem Spezialfalle werde nun $f(\zeta)$ in der Umgebung von 1) $\zeta = 0$ resp. 2) 180° untersucht, so daß ζ eine kleine Größe fixiert und im ersten Falle $\cos\zeta = 1 - \frac{1}{2}\zeta^2$, im 2. Falle um $\zeta = 180^\circ$ herum, also $\cos(180 + \zeta) = -\cos\zeta = -\left(1 - \frac{1}{2}\zeta^2 + \cdots\right)$ gesetzt. Folglich wird dann gemäß (37) die Funktion $f(\zeta) = d_0 + d_1 \cos\zeta + d_2 \cos^2\zeta^2 = d_0 + d_1 + d_2 - \left(+\frac{1}{2}d_1 + d_2\right)\cdot\zeta^2$, wobei im Falle $\zeta = 180^\circ$ der Koeffizient d_1 das negative Vorzeichen erhält; analog ist $d_3 + d_4 \cos\zeta = d_3 + d_4 - \frac{1}{2}d_4\zeta^2$, wo bei $\zeta = 180^\circ$ ebenfalls bei d_4 der Vorzeichenwechsel eintreten muß. Von jetzt ab werde nur der erste Fall betrachtet, indem im 2. Falle dann nur die Vorzeichen von c_1, d_1 und d_4 zu vertauschen sind. Die weiteren nach Potenzen von ζ zu entwickelnden Funktionen sind dann sukzessive:

$$\sqrt{c_0 + c_1 \cos\zeta + c_2 \cos^2\zeta} = \sqrt{\Sigma c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta c}{\Sigma c}\right), \tag{76}$$

wo $\Sigma c = c_0 + c_1 + c_2$ und $\Delta c = -\frac{1}{2}\left(c_1 + 2c_2\right)\zeta^2$, so daß schließlich bei Potenzentwicklung nach ζ bis ζ^2 einschließlich die Funktion:

$$(77)\quad F = d_0 + d_1 \cos\zeta + d_2 \cos^2\zeta + \\ + \sqrt{c_0 + c_1 \cos\zeta + c_2 \cos^2\zeta} \cdot (d_3 + d_4 \cos\zeta) = F_0 + F_1 \cdot \zeta^2,$$

wo

$$(78)\quad F_0 = d_0 + d_1 + d_2 + \sqrt{\Sigma c}\,(d_3 + d_4);$$
$$F_1 = \left\{-\frac{1}{2} d_1 - d_2 - \frac{1}{4}\sqrt{\Sigma c}\left[(d_3 + d_4)\frac{c_1 + 2c_2}{\Sigma c} - \frac{1}{2} d_4\right]\right\},$$

so daß unsere obige Differentialgleichung (75) in die folgende Form übergeht:

$$(79)\qquad t - t_0 = \int \frac{d\zeta}{F_0 + F_1\zeta^2}.$$

Die Form der Lösung hängt vom Vorzeichen von F_1 ab. Setzen wir zur Reduktion des Integrals

$$(79a)\qquad F_1 = K \cdot F_0,$$

so erhalten wir:

$$(80)\qquad (t - t_0) \cdot F_0 = \int \frac{d\zeta}{1 + K \cdot \zeta^2};$$

ist dann zuerst a) $K > 0$, also $\sqrt{K} \cdot \zeta = \eta$ reell, so ergibt die Integration:

$$(81)\qquad \sqrt{K} \cdot F_0 (t - t_0) = \operatorname{arc\,tg}(\sqrt{K} \cdot \zeta)$$

oder b):

$$(82)\qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{K}} \operatorname{tg}\left[\sqrt{K} \cdot F_0 (t - t_0)\right],$$

also in trigonometrischer Form mit der Periode $P = \dfrac{2\pi}{\sqrt{K} \cdot F_0}$.

Ist im 2. Falle b) die Größe $K < 0$, so folgt, wenn also $K = \dfrac{F_1}{F_0} = -\lambda$, wo $\lambda > 0$, gesetzt wird, das Integral:

$$(83)\qquad (t - t_0) \cdot F_0 = \int \frac{d\zeta}{1 - \lambda\zeta^2},$$

also bei Integration:

$$(84)\qquad (t - t_0)\sqrt{\lambda} F_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{\lambda} \cdot \zeta}{1 - \sqrt{\lambda} \cdot \zeta},$$

also bei Umkehrung:

$$(85) \qquad \zeta = \frac{1}{\sqrt{-K}} \cdot \frac{E^2 F_0 \sqrt{-K}(t-t_0) - 1}{E^2 F_0 \sqrt{-K}(t-t_0) + 1}.$$

Ist schließlich $K = 0$, indem $F_1 = 0$, so folgt:

$$(86) \qquad \zeta = F_0 (t - t_0) + \text{const., wo const.} = \zeta_0$$

dem Wert von ζ für $t = t_0$ entspricht. Analog ergeben sich Sonderlösungen in den Fällen, wo $F_0 = 0$, $F_1 = 0$, $F_0 = F_1$, $F_0 = -F_1$, Lösungen, die in einfacher Weise aus dem Grundintegral (79) ableitbar sind und mit Rücksicht auf die großen Ausnahmen hier nicht weiter zu fixieren sind.

Im Anschluß an die Integration resp. Darstellung der Elemente a, e, ζ und $\bar{\omega}$ als Funktionen der Zeit verbleibt nebenher noch die Darstellung der mittleren Länge ε der Epoche, die aus der Definition der Länge

$$(87) \qquad l = \varepsilon + \int n \cdot dt$$

folgt, so daß die mittlere Länge der Epoche: $\varepsilon = l - \int n \cdot dt$, wo die mittlere Länge l wiederum aus der Definition des Librationswinkels $\zeta = (p + 2)\, l' - p \cdot l - 2\,\omega$ folgt, so daß also $l = \frac{1}{p} [(p + 2)\, l' - 2\,\bar{\omega} - \zeta]$. Es verbleibt also die Darstellung des Integrals $\int n \cdot dt$, um die mittlere Länge der Epoche darstellen zu können. Da die mittlere Bewegung $n = \frac{K}{a^{3/2}}$, so ist zuerst die große Halbachse a als Funktion der Zeit darzustellen, weshalb wir von dem Integral ($\mathrm{I_b}$) auszugehen haben, wonach:

$$(88) \qquad \sqrt{a} = \sqrt{a_*} \left(1 - \frac{1}{4}\, p\, e^2 + \frac{1}{16}\, p (p - 1)\, e^4 + \cdots\right),$$

so daß bei erneuter Potenzentwicklung nach e, wenn noch $\frac{K}{a_*^{3/2}} = n_*$ gesetzt wird, folgt:

$$(89) \qquad n = n_* \left[1 + \frac{3}{4}\, p e^2 + \frac{3}{16}\, p (p + 1)\, e^4 + \cdots\right],$$

wo die Größen a_* und n_* nicht mit den Werten von a und n für $t = 0$ zu verwechseln sind, wie schon oben vermerkt wurde, weil a_* und n_* nur Integrationskonstanten sind, verschieden von den Werten von a und n für $t = t_0$. Alsdann folgt der analytische Ausdruck von $\int n \cdot dt$ als Funktion der Zeit, nachdem e^2 und e^4 als Funktionen der Zeit dargestellt worden sind. Die Größe e^2 ist bereits oben unter (26) als Funktion der Zeit t dargestellt worden; indem wir sie entwickeln, unter Bezeichnung des Exponenten $\varepsilon_1 \sqrt{A'}(t - t_0) + \varepsilon_2 = \tau$, nimmt die Funktion die Form an:

$$(90) \qquad e^2 = \frac{1}{2\sqrt{A'}}\left[E^{2\tau} - 2\frac{B'}{\sqrt{A'}} + \left(\frac{B'^2}{A'} - C'\right) E^{-2\tau}\right],$$

also entsprechend

$$(91\text{a}) \quad e^4 = \frac{1}{4A'}\left[E^{4\tau} - 4\frac{B'}{\sqrt{A'}} \cdot E^{2\tau} + 6\frac{B'^2}{A'} - 2C' + E^{4\tau} - 4\frac{B'}{\sqrt{A'}} E^{2\tau} + \right.$$
$$\left. + \left(-4\frac{B'^3}{\sqrt{A'^3}} + 4\frac{B'C'}{\sqrt{A'}}\right) E^{-2\tau} + \left(\frac{B'^4}{A'^2} + C'^2 - 2\frac{C'B'^2}{A'}\right) E^{-4\tau}\right].$$

Im Falle der periodischen Lösung nimmt e^4 nach $(26)_2$ die folgende Form an:

$$(91\text{b}) \quad e^4 = \left(\frac{B'}{A'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{B'^2 - A'C'}{A'^2} +$$
$$+ 2\frac{B'}{A'^2}\sqrt{B'^2 - A'C'} \sin 2\tau - \frac{1}{2} \cdot \frac{B'^2 - A'C'}{A'^2} \cos 4\tau.$$

Entsprechend lauten dann die Integrale von e^2 und e^4 nach der Zeit, zuerst im exponentiellen Falle, wo $A' > 0$:

$$(92\text{a}) \quad \int e^2\, dt =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{A'}}\left\{\frac{1}{2\varepsilon_1\sqrt{A'}} E^{2\tau} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1\sqrt{A'}}\left(\frac{B'^2}{A'} - C'\right) E^{-2\tau} - 2\frac{B'}{\sqrt{A'}}(t - t_0)\right\}$$

analog ist im Falle $A' < 0$:

$$(92\text{b}) \quad \int e^2\, dt = -\frac{B'}{A'}(t - t_0) + \frac{\sqrt{B'^2 - A'C'}}{2\varepsilon_1\sqrt{-A'} \cdot A'} \cos 2\tau.$$

Weiter ergeben die in bezug auf e^4 zu integrierenden Funktionen, zuerst im Falle der exponentiellen Lösung, a) $A' > 0$:

(93a)

$$\int e^4 \cdot dt = \frac{1}{4A'} \left\{ \frac{1}{4\varepsilon_1 \sqrt{A'}} E^{4\tau} - 2\frac{B'}{\varepsilon_1 A'} E^{2\tau} + \left(6\frac{B'^2}{A'} - 2C'\right)(t-t_0) \right.$$

$$\left. -2\frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{A'}} E^{-2\tau}\left(-\frac{B'^3}{\sqrt{A'^3}} + \frac{B'C'}{\sqrt{A'}}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{A'}} E^{-4\tau}\left(\frac{B'^4}{A'^2} + C'^2 - 2C'\frac{B'^2}{A'}\right)\right\}.$$

Schließlich folgt in bezug auf die Integration der periodischen Basis-Lösung, wo $A' < 0$:

(93b)

$$\int e^4 \cdot dt = \left[\left(\frac{B'}{A'}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{B'^2 - A'C'}{A'^2}\right](t-t_0) - \frac{B'}{A'^2} \cdot \frac{\sqrt{B'^2 - A'C'}}{\varepsilon_1 \sqrt{-A'}} \cos 2\tau -$$

$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{B'^2 - A'C'}{A'^2} \cdot \frac{1}{\varepsilon_1 \sqrt{-A'}} \sin 4\tau .$$

Die Vereinigung der entsprechenden Terme ergibt dann das Integral: $\int n \cdot dt$, das in Verbindung mit der mittleren Länge l die mittlere Länge der Epoche $\varepsilon = l - \int n \cdot dt$ als Funktion der Zeit liefert.

Insgesamt ergeben unsere obigen Untersuchungen, daß im Falle einer beliebig genäherten Kommensurabilität der mittleren Bewegungen nach der oben dargelegten Methode keine Diskontinuität der Lösung eintritt gegenüber der klassischen Methode, nach der bei starker Annäherung an die Stellen der Kommensurabilitäten eine scheinbar große, bei strengerer Behandlung nicht mehr stichhaltige Vergrößerung der Störungen eintritt. Im Falle nahezu kommensurabler Bewegungen tritt sehr wohl, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Fällen, eine große Störung ein, besonders in der mittleren Länge, weil zuerst die mittlere Bewegung n und dann noch $\int n \cdot dt$ zu integrieren ist, also eine doppelte Integration stattfindet. In unserer Methode enthält nur der Koeffizient β' auch die Größe, die dem in den klassischen Methoden so gefürchteten kleinen Divisor, nämlich: $p \cdot n - (p+2)n'$, als Summanden entspricht; verschwindet dieser Summand infolge strenger Kommensurabilität der mittleren Bewegungen, so bleibt dieser Umstand hier ohne Einfluß auf die Lösung, weil der die genannten Terme enthaltende Koeffizient β' nach (18) noch andere Terme, und zwar von der 0. Ordnung der störenden Masse, enthält, die nicht verschwinden, wenn strenge Kommensurabilität der mittleren Bewegungen eintritt.

§ 3. Anwendung auf diejenigen Planetoiden, deren mittlere Bewegung nahezu das 3-fache der des großen Planeten Jupiter beträgt

Dieser Fall entspricht der Annahme $p = 1$. Unser Ziel soll im besonderen die Untersuchung der Kriterien für die beiden Sorten von Lösungen sein. Auf Grund der „Recherches Astronomiques" von Le Verrier in den Bänden I und X der „Annales de l'Observatoire de Paris" leiten sich die folgenden Darstellungen der Koeffizienten M unserer Abhandlung als Funktion der Laplaceschen Transcendenten A_k^i und b_k^i ab:

$$M_0' = a'^2 N_0' = \frac{1}{2}\frac{m'}{\alpha}\, a' A_1^0 = \frac{1}{2}\frac{m'}{\alpha}\, b_1^0$$

$$M_0'' = a'^3 N_0'' = \frac{m'}{\alpha^2}\, a' A_2^0 = \frac{1}{2}\frac{m'}{\alpha^2}\, b_2^0$$

$$M_1 = a' N_1 = \frac{1}{4}\, m' (a' A_1^0 + a' A_2^0) = \frac{1}{4}\, m' \left(b_1^0 + \frac{1}{2}\, b_2^0\right)$$

$$\begin{aligned} M_1' = a'^2 N_1' &= \frac{1}{4}\frac{m'}{\alpha}\,(4\, a' A_2^0 + a' A_1^0 + 3\, a' A_3^0) = \\ &= \frac{1}{4}\frac{m'}{\alpha}\left(b_1^0 + 2\, b_2^0 + \frac{1}{2}\, b_3^0\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2 = a' N_2 &= \frac{1}{8}\, m' (4p^2 + 11p + 6)\, a' A_0^{p+2} + \\ &+ \frac{1}{4}\, m' (2p + 3)\, a' A_1^{p+2} + \frac{1}{4}\, m'\, a' A_2^{p+2} \\ &= \frac{1}{8}\, m' (4p^2 + 11p + 6)\, b_0^{p+2} + \\ &+ \frac{1}{4}\, m' (2p + 3)\, b_1^{p+2} + \frac{1}{8}\, m'\, b_2^{p+2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_2' = a a' N_2' &= \frac{1}{8}\, m' (4p^2 + 11p + 6)\, a a' \frac{\partial A_0^{p+2}}{\partial a} + \\ &+ \frac{1}{4}\, m' (2p + 3)\, a a' \frac{\partial A_1^{p+2}}{\partial a} + \frac{1}{4}\, m'\, a a' \frac{\partial A_2^{p+2}}{\partial a} = \\ &= \frac{1}{2}\, m' \left(p^2 + \frac{15}{4} p + 3\right) b_1^{p+2} + \frac{1}{2}\, m' (p + 2)\, b_2^{p+2} + \\ &+ \frac{1}{8}\, m'\, b_3^{p+2}. \end{aligned}$$

Zur genauen und sicheren Berechnung der Koeffizienten b_k^i ist es zweckmäßig, zuerst diese Koeffizienten b_k^i und mit ihrer Hilfe die Koeffizienten M_i durch die Gyldénschen Funktionen β_n^s, deren numerische Werte von Masal im 4. Bande der „Annalen der Stockholmer Sternwarte" tabuliert worden sind, darzustellen. Auf Grund meiner Darstellung der b_k^i in meiner Abhandlung „Über die Transcendenten von Laplace", Astron. Nachrichten Nr. 3974 (Bd. 165, Nr. 4), wonach sich die b_k^i als Summen nur positiver Linearterme in β_s^n ergeben, was für die exakte Berechnung wertvoll ist, erhalten wir für die Koeffizienten M_i die folgenden Darstellungen, unter Hinzufügung des Massenfaktors m':

$$M_0' = m' \alpha \beta_1^3$$

$$M_0'' = m' (\beta_1^3 + 3 \alpha^2 \beta_2^5)$$

$$M_1 = \frac{3}{4} \alpha^2 m' (\beta_1^3 + \alpha^2 \beta_2^5)$$

$$M_1' = \frac{3}{4} \alpha m' (2 \beta_1^3 + 7 \alpha^2 \beta_2^5 + 5 \alpha^4 \beta_3^7)$$

$$M_2 = \frac{1}{4} m' (p+2)(9p+10) \alpha^{p+2} \beta_{p+2}^1 + \frac{1}{4} m' (6p+11) \alpha^{p+4} \beta_{p+3}^3 + \\ + \frac{3}{4} m' \alpha^{p+6} \beta_{p+4}^5$$

$$M_2' = \frac{1}{4} m' (p+2)^2 (9p+10) \alpha^{p+2} \beta_{p+2}^1 + \\ + \frac{1}{4} m' (15p^2 + 63p + 64) \alpha^{p+4} \beta_{p+3}^3 + \frac{3}{4} m' (7p+17) \alpha^{p+6} \beta_{p+4}^5 + \\ + \frac{15}{4} m' \alpha^{p+8} \beta_{p+5}^7 .$$

Praktisch genügt es, wenn wir die Koeffizienten M für alle der Kommensurabilitätsstelle benachbarten Werte der mittleren Bewegung mit dem der strengen Kommensurabilität entsprechenden Wert von $\alpha = \frac{a_*}{a'}$ berechnen. Aus der Beziehung $\frac{n_*}{n'} = \frac{p+2}{p}$ folgt nach dem 3. Keplerschen Gesetz für α:

$\alpha = \frac{a_*}{a'} = \sqrt[3]{\frac{p^2}{(p+2)^2 (1+m')}}$. Die numerische Berechnung ergibt dann für $p = 1$, wo also $\frac{n_*}{n'} = \frac{3}{1}$, wenn noch $m' = \frac{1}{1047.35}$ die Jupitersmasse fixiert: $\lg \alpha = (9.68178) = 0.48060$, so daß die β_n^s die folgenden aus Masals Tafeln entnommenen Werte annehmen:

$$\beta_1^3 = (9.82659) \qquad \beta_2^5 = (9.81104) \qquad \beta_3^7 = (9.84359)$$
$$\beta_3^1 = (9.54416) \qquad \beta_5^5 = (9.65104) \qquad \beta_6^7 = (9.72248)$$
$$\beta_4^3 = (9.58965)$$

wo die eingeklammerten Zahlen stets Logarithmen bedeuten. Folglich lauten die M wie folgt:

$$M_0' = m' \cdot (9.50837) \qquad M_0'' = m' \cdot (0.04893)$$
$$M_1 = m' \cdot (9.15258) \qquad M_1' = m' \cdot (9.96746)$$
$$M_2 = m' \cdot (9.77677) \qquad M_2' = m' \cdot (0.31503)$$

Daraus ergeben sich weiter die folgenden numerischen Werte für α', β' und γ' ($\delta' = -1$): $\alpha' = (2.83415)_n$, $\beta' = (2.48214)_n \times \times \frac{n_0 - 3n'}{n'} + (9.03369)_n$, $\gamma' = (0.53826)$. Um dann in Anwendung obiger Rechnungen auf die Planetoiden des Sonnensystems über die Art der Lösungen entscheiden zu können, ist zuerst die Größe A' zu diskutieren, zuerst in ihrer Abhängigkeit von der Integrationskonstanten C, die von ζ, der kritischen Differenz $n - 3n'$ und der Exzentrizität e abhängig ist. Aus dem Integral II ist ersichtlich, daß C in folgender Art in 2 Summanden zerlegt werden kann: $C = C_1(e^2, \zeta) + C_2(e^2, n - 3n')$, wo $n - 3n'$ in ζ_0 resp. β' enthalten ist. Substituieren wir sogleich überall die numerischen Werte resp. deren Logarithmen, so erhalten wir:

$$C_1 = -\{(2.29589) - \cos\zeta\}\, e^2 \cdot E^{-(0.53826)\,e^2}$$
$$C_2 = -\{(1.75763) + (9.46802)\,(n_0 - 3n')''\}\, E^{-(0.53826)\,e^2}$$

wo im Faktor $(n_0 - 3n')$: n' in C_2 der Divisor n' in Bogensekunden angesetzt ist, also auch der verbliebene Faktor $n - 3n'$ in Bogensekunden anzusetzen war.

Die folgende Tabulierung soll sich nun in bezug auf die variablen Parameter auf die folgenden Einzelwerte beziehen: $n - 3n'$ soll von $-50''$, $-40''$ etc. bis $+50''$ laufen, ferner e^2 von 0.00, 0.01 bis 0.10, ferner soll z variieren von $z = 0°$, $10°$ etc. bis $z = 360°$. Die numerische Rechnung ergibt dann für die Funktionen $-C_1$ und $-C_2$ die folgenden entsprechenden Tafelwerte, bei deren Berechnung die Funktion E^{ψ} den Burrauschen Tafeln entnommen wurden:

Tafel für $-C_1(e^2, \zeta)$

ζ \ e^2	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10	e^2 / ζ
0°	0.000	+1.900	+3.671	+5.319	+6.851	+8.273	+9.591	+10.809	+11.934	+12.970	+13.922	360°
10	0.000	00	71	20	52	74	92	10	36	71	23	50
20	0.000	00	72	21	53	75	94	13	38	74	26	40
30	0.000	01	73	23	56	78	97	17	42	79	31	30
40	0.000	02	75	25	59	83	602	22	49	86	39	20
50	0.000	03	77	29	64	88	08	29	56	94	48	10
60	0.000	05	80	33	69	94	15	37	65	13.003	58	300
70	0.000	06	83	37	74	301	23	46	74	14	69	290
80	0.000	08	86	42	80	08	31	55	85	25	81	80
90	0.000	09	89	46	86	15	40	64	95	36	93	70
100	0.000	11	92	51	92	22	48	74	12.005	47	14.005	60
110	0.000	13	96	55	98	30	56	83	16	59	17	50
120	0.000	14	99	60	903	36	64	92	26	69	28	40
130	0.000	16	701	63	08	42	71	900	34	78	38	30
140	0.000	17	04	67	13	47	77	07	42	87	47	20
150	0.000	18	06	70	16	52	82	12	48	93	54	10
160	0.000	18	07	72	19	55	86	16	52	98	60	200
170	0.000	19	08	73	20	56	88	18	55	101	62	190
180	0.000	1.919	3.708	5.373	6.921	8.357	9.688	10.920	12.056	13.102	14.064	180°

Tafel für $-C_2(e^2, n_0 - 3n')$

n_0-3n' \ e^2	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09	0.10
−50	+42.542	+41.098	+39.705	+38.355	+37.053	+35.795	+34.581	+33.406	+32.273	+31.176	+30.119
−40	45.480	43.936	42.446	41.005	39.613	38.267	36.968	35.713	34.502	33.329	32.198
−30	48.418	46.773	45.188	43.653	42.171	40.738	39.356	38.020	36.730	35.482	34.278
−20	51.355	49.611	47.929	46.301	44.729	43.210	41.744	40.326	38.958	37.635	36.357
−10	54.293	52.449	50.671	48.950	47.288	45.681	44.132	42.633	41.187	39.788	38.437
0	57.231	55.288	53.414	51.599	49.847	48.153	46.520	44.941	43.416	41.941	40.517
+10	60.169	58.126	56.155	54.248	52.406	50.626	48.908	47.248	45.644	44.094	42.597
20	63.107	60.965	58.898	56.897	54.965	53.099	51.297	49.556	47.874	46.248	44.678
30	66.044	63.802	61.639	59.544	57.523	55.569	53.684	51.861	50.101	48.399	46.757
40	68.982	66.640	64.380	62.193	60.082	58.040	56.071	54.168	52.330	50.552	48.836
50	71.920	69.478	67.123	64.843	62.642	60.513	58.460	56.476	54.560	52.706	50.917

Zunächst ist aus diesen Tafeln direkt ersichtlich, daß das Maximum von $C = C_1 + C_2$ als Funktion von e^2 und ζ bei festgehaltenem Argument $n_0 - 3\,n'$ bei $\zeta = 0^\circ$ das Minimum bei $\zeta = 180^\circ$ gelegen ist. Das Maximum möge mit C_M, das Minimum mit C_m bezeichnet werden. Insbesondere interessiert uns der bei $A' = 0$ eintretende Wert C_0. Liegt derselbe nämlich zwischen den beiden Werten C_M und C_m, so gehören die zwischen C_0 und C_M resp. C_m gelegenen Werte von C entweder zu einer periodischen resp. zu einer logarithmischen Lösung. Die Werte C_0 ergeben sich aus der folgenden Gleichung auf Grund der Bedingung, daß $A' = 0$ sein muß:

$$C_0 = -42.931 - 0.073445\,(n_0 - 3\,n') \pm$$
$$\pm \sqrt{-1637.6 + [42.931 + 0.073445\,(n_0 - 3\,n')]^2}.$$

Die folgende Tafel enthält in der 2. und 4. Kolumne die so errechneten Maxima und Minima von C, wie sie direkt aus den obigen Tafeln für C_1 und C_2 abgelesen wurden, und in der 3. Kolumne die $A' = 0$ entsprechenden auch nach (25) berechneten Nullstellen C_0, soweit dieselben zwischen C_M und C_m gelegen sind. Die C_0 sind obiger Gleichung zufolge zweideutig, aber die in der Tabelle nicht aufgeführten Wurzelwerte liegen außerhalb der Grenzen von C_M und C_m und sind deshalb nicht aufgeführt worden. Die $A' = 0$ entsprechenden Werte C_0 entsprechen den der Zeit t proportionalen, also instabilen Lösungen.

Tabelle (a)

$n_0 - 3\,n'$	C_M	$A' = 0$ $C = C_0$	C_m
$-50''$	-42.5	kompl.	-44.3
40	45.5	,,	46.3
30	48.2	-45.3	49.1
20	50.3	-50.5	51.6
-10	52.3	-54.2	54.5
0	54.4	-57.3	57.2
$+10$	56.5	-60.1	60.2
20	58.6	-62.7	63.1
30	60.7	-65.1	66.0
40	62.8	-67.5	69.0
50	-64.8	-69.7	71.9

Die obige Tabelle (a) muß nun verallgemeinert werden, um entsprechend einem beliebigen Betrage von A' als Funktion von $n_0 - 3n'$ und der Integrationskonstanten C das Kriterium für die Existenz einer periodischen resp. einer logarithmischen Lösung des Problems zu erhalten. Deshalb soll das Argument $n_0 - 3n'$ von $-40''$ über $0''$ bis $+40''$ und C von $C = -40, -42, -46, -50$ bis -70 laufen, um A' als Funktion von $n - 3n'$ und C zu erhalten, wie die folgende Tabelle zeigt. Die Kurve, die in dieser Tabelle durch die Werte $A' = 0$ geht, trennt die Librationslösungen mit $A' < 0$ von den durch $A' > 0$ gekennzeichneten Exponentiallösungen, wobei die durch $A' = 0$ charakterisierten Lösungen die der Zeit t proportionalen Grenzlösungen fixieren, die also eine Entartung der Exponentiallösungen darstellen. Ihre Lage ist in der Tabelle durch einen Stern (*) in jeder Horizontalen gekennzeichnet, ihre C-Werte werden weiter unten fixiert.

Die in Tabelle (b) mit * bezeichneten Stellen entsprechen den Nullwerten von A', formelmäßig fixiert durch die Auflösung von $A' = 0$ nach $C = C_0 = -42.931 - 0.073445\,(n_0 - 3n') \pm \sqrt{R}$, wo $R = -1637.7 + [42.931 + 0.073445\,(n_0 - 3n')]^2$. Numerisch tritt dann die reale Grenze von $R = 0$ ein bei den Werten: (1) $n_0 - 3n' = -33''.521$ und (2) $n_0 - 3n' = -83''.40$, welcher Wert aus dem Rahmen um die Kommensurabilitätsstelle herausfällt und deshalb nicht in Frage kommt. Der zu 1. gehörige C_0-Wert ist $C_0 = -40.469$, liegt also in unserer obigen Tabelle in der linken oberen Ecke, dem Argument $n_0 - 3n' = -33''.52$ entsprechend zwischen den C-Werten -40 und -42. Weitere reale Nullstellen von $A' = 0$ sind nicht vorhanden, sondern sind nach der Formel für C_0 von jetzt ab komplex, wie auch schon in der Tabelle (a) oben fixiert.

Denkt man sich in obiger Tabelle (b) die Nullstellen von A' miteinander verbunden, so gehört das über dieser Grenzlinie nach rechts oben gelegene Gebiet den Librations-Lösungen an, während das darunter gelegene Gebiet den Exponentiallösungen angehört und schließlich die auf der Grenzlinie mit $A' = 0$ liegenden Lösungen die der Zeit t proportionalen Säkularlösungen fixierten.

Weiter wollen wir numerisch das Kriterium, welches im Falle der libratorischen Form der Lösungen die Grenzen von n_0 fest-

Tabelle (b) $10^{-2} \cdot A'$

$n-3n'$ \ C	— 40	— 42	— 46	— 50	— 54	— 58	— 62	— 66	— 70
—40″	— 9.10	— 10.07	— 17.93	— 32.98	— 55.90	— 86.45	— 124.63	— 170.44	— 223.87
—33.5	*								
—30	+ 4.90	+ 4.65 *	— 1.60						
—20	+ 18.92	+ 19.36	+ 14.51	+ 2.04 *	— 18.07	— 45.79	— 81.18	— 124.19	— 174.84
0	+ 46.95	+ 48.79	+ 46.75	+ 37.07	+ 19.78 *	— 5.17	— 36.93	— 77.94	— 125.78
+20	+ 74.93	+ 78.22	+ 78.98	+ 72.11	+ 57.61	+ 35.48	+ 5.71 *	— 31.69	— 76.73
+40	+ 103.04	+ 107.65	+ 111.21	+ 107.13	+ 95.44	+ 76.10	+ 49.13	+ 14.53 *	— 28.19

e^2	K	λ_1	λ_2	μ_1	μ_2	a_0	a_1	a_2
0.00	—1.00000	0.0	0.0	+ 1.00	0.0	+ 1.0	0.0	0.0
0.01	—0.90048	— 7.0392	—0.09556	+ 23.760	+ 6.5789	+ 41.663	+ 7.6943	0.00010
0.02	—0.80882	—14.420	—0.17619	+ 89.892	+12.628	+ 190.60	+17.325	0.00046
0.03	—0.72413	—22.024	—0.24347	+196.20	+18.093	+ 502.18	+29.272	0.00120
0.04	—0.64622	—29.746	—0.29885	+339.41	+22.953	+1046.0	+44.033	0.00251

setzt, und zwar in seiner Abhängigkeit von e und ζ untersuchen, wofür die Formeln (47) bis (57) heranzuziehen sind. Dazu wollen wir zuerst noch einige Vereinfachungen für die Zwecke der numerischen Rechnung vornehmen, indem wir zuerst: [s. (53a)] $v = \sqrt{a_0 + a_1 \cdot \cos\zeta + a_2 \cos^2\zeta}$ setzen, wo die Koeffizienten als Funktionen von K, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 und μ_3 die folgende Bedeutung haben:

$$a_0 = \frac{1}{4}(\lambda_1^2 - 4K\mu_1)K^{-2}, \quad a_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1\lambda_2 - 2K\mu_2)K^{-2},$$

$$a_2 = \frac{1}{4}(\lambda_2^2 - 4K\mu_3)K^{-2}.$$

Im Falle kleiner Exzentrizitäten muß man die mit e verschwindenden Teile der Koeffizienten in Potenzreihen nach e entwickeln, so daß alsdann:

$$a_1 = \frac{1}{2} e^2 \alpha' E^{-2\gamma' e^2} \alpha' K^{-2} \cdot$$
$$\cdot \left\{ 2(2E^{-\gamma' e^2} - 1)\left(-1 + 2\gamma'^2 e^4 - \frac{4}{3}\gamma'^3 e^6 + \cdots\right) + \gamma' e^2 (1 - 4E^{-\gamma' e^2}) \right\}.$$

Dagegen ergibt sich für a_2 in geschlossener Form: $a_2 = \frac{1}{4}\gamma'^2 \cdot e^4 \cdot E^{-2\gamma' e^2} K^{-2}$.

Wir lassen alsdann den Winkel ζ von $0°$, $10°$ etc. bis $\zeta = 360°$, ferner e^2 von 0.00, 0.01 bis 0.04, d. h. e von $e = 0.00$, 0.10 bis 0.20 variieren. Die erforderlichen Koeffizienten K, λ_1, λ_2, μ_1, μ_2, a_0, a_1 und a_2 sind dann in der Tabelle S. 99 zusammengestellt.

Für die n_0 ergeben sich dann die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Grenzwerte n_0 für den Fall einer libratorischen Form der Bewegung.

Aus der obigen Tabelle der Grenzwerte für n_0 ist zuerst ersichtlich, daß in den Intervallen zwischen den Grenzwertpaaren, z. B. dem links oben gelegenen Grenzpaar: $n_0 = 898''.26$ und $n_0 = 896''.30$, entsprechend $e^2 = 0$ keine periodischen, sondern nur exponentielle Lösungen möglich sind. Ferner ist bemerkenswert, daß die bei $n_0 < 897''.4$ (Kommensurabilitätsstelle) gelegenen Grenzwerte der Tafel stets näher an der Kommensurabilitätsstelle gelegen sind als die Grenzwerte mit $n_0 > 897''.4$. Ferner wächst die Gesamtdifferenz zwischen diesen Grenzwerten von $1''.96$ bei $e = 0$ und $\zeta = 0$ an bis zu $62''.40$ bei $e = 0.20$ und $\zeta = 180°$.

Grenzwerte von n_0 bei Libration

ζ \ e^2	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	e^2 / ζ
0°	>898″.26 <896.30	>908″.62 <894.26	>920″.38 <891.98	>935″.18 <889.72	>952.75 <887.66	360°
10	>898.26 <896.30	>908.10 <894.26	>920.38 <892.00	>935.15 <889.72	>952.73 <887.66	350
20	>998.26 <896.30	>908.08 <894.30	>920.34 <892.00	>935.13 <889.76	>952.68 <887.68	340
30	>898.26 <896.30	>908.02 <894.34	>920.30 <892.04	>935.06 <889.80	>952.62 <887.70	330
40	>898.26 <896.30	>907.96 <894.38	>920.22 <892.08	>934.98 <889.84	>952.54 <887.74	320
50	>898.26 <896.30	>907.90 <894.44	>920.1 <892.14	>934.88 <889.90	>952.43 <887.80	310
60	>898.26 <896.30	>907.82 <894.52	>920.02 <892.20	>934.76 <889.94	>952.30 <887.88	300
70	>898.26 <896.30	>907.72 <894.60	>919.92 <892.28	>934.63 <890.02	>952.16 <887.96	290
80	>898.26 <896.30	>907.60 <894.66	>919.82 <892.38	>934.50 <890.10	>952.00 <888.02	280
90	>898.26 <896.30	>907.50 <894.76	>919.66 <892.44	>934.35 <890.18	>951.83 <888.08	270
100	>898.26 <896.30	>907.38 <894.85	>919.54 <892.54	>934.22 <890.26	>951.68 <888.16	260
110	>898.26 <896.30	>907.28 <894.96	>919.44 <892.64	>934.08 <890.34	>951.55 <888.24	250
120	>898.26 <896.30	>907.15 <895.04	>919.30 <892.70	>933.94 <890.40	>951.40 <888.30	240
130	>898.26 <896.30	>907.06 <895.12	>919.20 <892.80	>933.84 <890.50	>951.26 <888.36	230
140	>898.26 <896.30	>906.98 <895.20	>919.12 <892.86	>933.73 <890.56	>951.15 <888.44	220
150	>898.26 <896.30	>906.92 <895.26	>919.03 <892.92	>933.64 <890.60	>951.06 <888.48	210
160	>898.26 <896.30	>906.88 <895.30	>918.98 <892.98	>933.60 <890.66	>950.98 <888.50	200
170	>898.26 <896.30	>906.84 <895.32	>918.94 <893.00	>933.56 <890.66	>950.94 <888.52	190
180	>898.26 <896.30	>906.82 <895.32	>918.94 <893.00	>933.56 <890.68	>950.94 <888.54	180