BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über approximative Nomographie. II

Von **Georg Aumann** in München

Vorgelegt am 8. Mai 1959

Im folgenden handelt es sich um die Übertragung der in der vorausgehenden Note[1] entwickelten Methode vom diskreten Fall („Matrixproblem") auf den kontinuierlichen, d. h. um die Aufgabe, eine stetige Funktion $f(x, y)$ der zwei Veränderlichen x und y möglichst gut zu approximieren durch eine Summe $a(x) + b(y)$ von zwei stetigen Funktionen je einer der beiden Veränderlichen; die Güte der Approximation soll dabei durch das Maximum des absoluten Fehlers $|f(x, y) - (a(x) + b(y))|$ gemessen werden. Es wird gezeigt, daß das dort beschriebene Verfahren der „alternierenden Symmetrisierung" auch hier konvergent ist und eine Lösung des Approximationsproblems liefert. Während beim diskreten Problem die Methoden des Linear-Programmierens unmittelbar anwendbar sind, sind sie es beim kontinuierlichen Problem nur mittelbar auf dem Umweg über eine Approximation der stetigen Funktion $f(x, y)$ durch eine Gitterfunktion f_{ik} (Matrix), und ergeben daher selber nur Lösungen in Limitengestalt, wie die Methode der alternierenden Symmetrisierung. Dieser Umstand spricht hier zugunsten der letzten Methode.

1. $f \mid Q$ sei eine stetige Funktion auf dem Quadrat

$$Q = \{(x, y): 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\},$$

$a \mid X$ sei auf $X = \{x: 0 \leq x \leq 1\}$ und $b \mid Y$ auf $Y = \{y: 0 \leq y \leq 1\}$ stetig. Wir nennen $\|f\| = \max\{|f(x, y)| : (x, y) \in Q\}$ die *Norm* von f, ferner zwei Funktionen $f \mid Q$ und $f_1 \mid Q$ *verwandt*, wenn es Funktionen $a \mid X$ und $b \mid Y$ gibt mit

$$f = f_1 + a + b.$$

[1] G. Aumann, Über approximative Nomographie. I. Sitz.-Ber. Bayer. Akad. Wiss. 1958, 137–155.

Dann lautet das die Funktion $f \mid Q$ betreffende *Approximationsproblem*:

Zu f ist eine Verwandte kleinster Norm zu finden.

2. Für die Lösung ist folgender Begriff von Bedeutung. Eine Funktion $g \mid Q$ heißt *x-ausgeglichen*, wenn

$$\min \{g(x, y) : x \in X\} = -\max \{g(x, y) : x \in X\} \text{ für } y \in Y,$$

y-ausgeglichen, wenn

$$\min \{g(x, y) : y \in Y\} = -\max \{g(x, y) : y \in Y\} \text{ für } x \in X,$$

(x, y)-ausgeglichen, wenn sie x- und y-ausgeglichen ist. Es gilt nämlich der *Hilfssatz*:

Sind f und g stetig und zueinander verwandt und ist $g(x, y)$-ausgeglichen, dann gilt $\|g\| \leq \|f\|$.

Beweis. Es sei $f = g + a + b$. Ist $\|g\| = 0$, so ist nichts zu beweisen; es sei daher $\|g\| = \alpha > 0$ und $g(x_1, y_1) = \alpha$. Es gibt dann ein x_2 mit $g(x_2, y_1) = -\alpha$, weiter ein y_2 mit $g(x_2, y_2) = \alpha$, usw. Man erhält so eine Folge von Stellen

$$(x_1, y_1), \ (x_2, y_1), \ \ldots, \ (x_n, y_n), \ (x_{n+1}, y_n), \ \ldots,$$

welche abwechselnd α- und $(-\alpha)$-Stellen von g sind. Zwei Fälle sind möglich: 1. Es findet sich in der Folge eine geschlossene Kette, z. B. wenn etwa $x_{n+1} = x_1$ ist. Dann wird die alternierende Summe

$$\sum \pm f = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_1) + - \cdots - f(x_{n+1}, y_n) = 2n\alpha,$$

und wenigstens einer dieser f-Werte ist dem Betrag nach $\geq \alpha$.

2. Die obige Folge enthält keine geschlossene Kette. Wegen der Kompaktheit von X und Y gibt es dann Teilketten, welche „nahezu“ geschlossen sind. Um dies auszunutzen, setzen wir voraus, daß bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ stets $|a(x) - a(x')| < \varepsilon$, sobald $|x - x'| < \delta$. Wenn nun etwa $|x_{n+1} - x_1| < \delta$, so erhalten wir jetzt für die obige Summe $\sum \pm f = 2n\alpha + a(x_1) - a(x_{n+1}) > 2n\left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2n}\right)$, woraus folgt, daß mindestens einer der f-Werte

von einem Betrag $\geq \alpha - \frac{\varepsilon}{2n} > \alpha - \varepsilon$, also $\|f\| > \alpha - \varepsilon$ ist. Für $\varepsilon \to 0$ folgt die Behauptung.

Aus dem Hilfssatz ergibt sich, daß jede (x, y)-ausgeglichene Verwandte g von f in $a + b = f - g$ eine Lösung des Approximationsproblems liefert; denn jede Verwandte f' von f ist dann auch eine von g, so daß $\|g\| \leq \|f'\|$.

3. Auf Grund von **2.** wird man versuchen zu f eine (x, y)-ausgeglichene Verwandte zu konstruieren. Hierzu dient die *alternierende Symmetrisierung*; sie besteht in der Bildung der *Symmetrisierungsfolge*

$$f_0, f_1, \ldots, f_n, \ldots,$$

wobei $f_0 = f$, $f_{2n+1} = (f_{2n})^{(1)}$, $f_{2n+2} = (f_{2n+1})^{(2)}$, $n = 0, 1, \ldots,$ gesetzt ist und allgemein definiert wird:

die *x-Symmetrisierung* $f \to f^{(1)}$ durch

$$f^{(1)}(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{2}\left(\max_{x'} f(x', y) + \min_{x'} f(x', y)\right),$$

die *y-Symmetrisierung* durch

$$f^{(2)}(x, y) = f(x, y) - \frac{1}{2}\left(\max_{y'} f(x, y') + \min_{y'} f(x, y')\right).$$

In den folgenden Nr. **4.** bis **7.** beweisen wir nun den *Hauptsatz*:

Für jede stetige Funktion $f \mid Q$ konvergiert die zugehörige Symmetrisierungsfolge gegen eine (x, y)-ausgeglichene Verwandte $\bar{f}$ von f.

4. *Die Funktionen f_n der Symmetrisierungsfolge sind gleichgradig und gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt.*

In der Tat, da Symmetrisierungen stets Verwandte liefern, so dürfen wir setzen $f_n = f + a_n + b_n$. Ferner gibt es zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, so daß

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \varepsilon \text{ für } |y' - y''| < \delta \text{ und alle } x,$$

$$|f(x', y) - f(x'', y)| < \varepsilon \text{ für } |x' - x''| < \delta \text{ und alle } y.$$

Anwendung der Symmetrisierungen ergeben z. B.:

$$a_1 = a_0,\ b_1(y) = -\frac{1}{2}\left(\max_x (f(x,y) + a_0(x)) + \min_x (f(x,y) + a_0(x))\right),$$

$$a_2(x) = -\frac{1}{2}\left(\max_y (f(x,y) + b_1(y)) + \min_y (f(x,y) + b_1(y))\right),\ b_2 = b_1,$$

also

$$|b_1(y') - b_1(y'')| < \varepsilon \text{ für } |y' - y''| < \delta,$$

$$|a_2(x') - a_2(x'')| < \varepsilon \text{ für } |x' - x''| < \delta,$$

und entsprechende Aussagen gelten für alle a_n und b_n. Hieraus folgen die Behauptungen bezüglich der Stetigkeit der f_n. Hinsichtlich ihrer Beschränktheit haben wir

$$\|f_{n+1}\| \leq \|f_n\| \leq \|f\| \text{ für } n = 0, 1, \ldots,$$

da bei einer Symmetrisierung offenbar die Norm nicht vergrößert wird.

5. Weiter gilt:

(1) $\|f_{n+1} - f_n\| \leq \|f_{n} - f_{n-1}\|$ *für* $n = 2, 3, \ldots;$

(2) *Sind alle* $\|f_{n+1} - f_n\| > 0$, *so steht in* (1) *unendlich oftmals das Kleinerzeichen:*

(3) $\lim\limits_n \|f_{n+1} - f_n\| = 0.$

Beweis. Wir setzen $\sigma_n = \|f_{n+1} - f_n\|$ und bezeichnen mit τ_n das Maximum des Betrages eines Funktionswertes von f_n, der beim Übergang zu f_{n+1} um $\pm\sigma_n$ geändert wird.

Zu (1). Sei etwa n gerade, s' das Minimum und S' das Maximum von f_n auf der Geraden $y = y_0$; beim Übergang zu f_{n+1} werden also die Funktionswerte von f_n auf dieser Geraden um $-\frac{1}{2}(s' + S')$ abgeändert. Ist s bzw. S das Minimum bzw. Maximum von f_{n-1} auf der betrachteten Geraden, so gelten

$$S - \sigma_{n-1} \leq S' \leq S + \sigma_{n-1},$$

$$s - \sigma_{n-1} \leq s' \leq s + \sigma_{n-1},$$

also wegen $s + S = 0$

$$-\sigma_{n-1} \leq \frac{1}{2}(s' + S') \leq \sigma_{n-1}, \text{ und somit}$$

$$\sigma_n \leq \sigma_{n-1}.$$

Zu (2). Wir beweisen zunächst die Ungleichung

(4) *Wenn* $\sigma_n = \sigma_{n-1}$, *dann gilt* $\tau_n + \sigma_n \leq \tau_{n-1}$.

In der Tat: Wir wählen im vorausgehenden Beweis die Gerade $y = y_0$ derart, daß die Änderung $\frac{1}{2}|s' + S'| = \sigma_n$ maximal ist und zugleich auf dieser Geraden f_n den Betrag τ_n erreicht. Wenn nun $\sigma_n = \sigma_{n-1}$ ist, so ist dies nur möglich, wenn

entweder $\sigma_n = 0$ (Fall I),

oder $\sigma_n > 0$, $S' = S + \sigma_{n-1}$ und $s' = s + \sigma_{n-1}$ (Fall II),

oder $\sigma_n > 0$, $S' = S - \sigma_{n-1}$ und $s' = s - \sigma_{n-1}$ (Fall III)

vorliegt.

Im Falle I ist f_{n-1} (x, y)-ausgeglichen, so daß wir in

$$\|f_n\| = \tau_n = \tau_{n-1} = \|f_{n-1}\|$$

(3) bestätigt finden.

Im Falle II ist $\tau_n = S' = S + \sigma_{n-1}$ mit etwa $S = f_{n-1}(x_0, y_0)$. Da auf der Geraden $x = x_0$ die Gleichung $f_n = f_{n-1} + \sigma_{n-1}$ gilt, so muß auf dieser Geraden f_{n-1} neben dem Wert S auch einen Wert $\leq -S - 2\sigma_{n-1}$ annehmen, damit bei der y-Symmetrisierung von f_{n-1} der Änderungswert σ_{n-1} zustande kommt. Nach Definition von τ_{n-1} ist aber $-\tau_{n-1} \leq -S - 2\sigma_{n-1}$, also $S \leq$ $\leq \tau_{n-1} - 2\sigma_{n-1}$ und somit $\tau_n \leq \tau_{n-1} - \sigma_{n-1}$.

Nun folgt leicht (2). Wäre nämlich $\sigma_n = \sigma_{n-1} = \varrho > 0$ für alle $n \geq n_0$, so folgte

$$\tau_{n_0+m} + m\varrho \leq \tau_{n_0} \leq \|f\|,$$

was für hinreichend große m einen Widerspruch darstellte.

Der Fall III erledigt sich analog. Im Falle eines ungeraden n haben x und y die Rollen zu tauschen.

Zu (3). Da die f_n beschränkt und gleichgradig stetig sind, so gibt es nach bekannten Sätzen eine konvergente Teilfolge

$$f_{N_1}, f_{N_2}, \ldots, f_{N_\nu}, \ldots, \tag{5}$$

etwa mit dem Limes g. Da nun wegen (1) $\lim_n \|f_{n+k+1} - f_{n+k}\| = \vartheta$ existiert, so folgt mit der Stetigkeit der Symmetrisierung

$$\|g_{k+1} - g_k\| = \vartheta \quad \text{für } k = 0, 1, \ldots .$$

Dies ist nach (2) nur mit $\vartheta = 0$ möglich.

6. *Ist $f = g + \bar{a}_0 + \bar{b}_0$, wo g (x, y)-ausgeglichen ist, und setzt man $f_n = g + \bar{a}_n + \bar{b}_n$ gemäß der Formeln von* **4.**, *so gelten die folgenden Beziehungen:*

$$\bar{b}_{n+1} = \bar{b}_n, \quad \bar{a}_n = \bar{a}_{n-1} \quad \textit{für ungerades } n; \tag{6}$$

$$-\max_x \bar{a}_n(x) \leq \bar{b}_{n+1}(y) \leq -\min_x \bar{a}_n(x) \quad \textit{für alle } y, \tag{7}$$

$$-\max_y \bar{b}_{n-1}(y) \leq \bar{a}_n(x) \leq -\min_y \bar{b}_{n-1}(y) \quad \textit{für alle } x,$$

und beides für gerades n.

In der Tat, es ist z. B. nach den Formeln in **4.**

$$-\bar{b}_1(y) \leq \tfrac{1}{2}\left(\max_x g(x, y) + \max_x \bar{a}_0(x) + \min_x g(x, y) + \max_x \bar{a}_0(x)\right)$$
$$= \max_x \bar{a}_0(x), \text{ andererseits}$$

$$-\bar{b}_1(y) \geq \tfrac{1}{2}\left(\max_y g(x, y) + \min_x \bar{a}_0(x) + \min_x g(x, y) + \min_x \bar{a}_0(x)\right)$$
$$= \min_x \bar{a}_0(x).$$

Analog beweist man die übrigen Ungleichungen.

Insbesondere folgt aus (7)

$$\|\bar{b}_{n+1}\| \leq \|\bar{a}_n\| \leq \|\bar{b}_{n-1}\| \quad \text{für gerades } n \tag{8}$$

(wobei z. B. $\|a\| = \max(|a(x)| : x \in X)$ gesetzt ist).

7. Der Limes g von (5) ist wegen $\vartheta = 0$ (x, y)-ausgeglichen; wir können dabei die Folge (5), eventuell durch Teilfolgenauswahl, so einrichten, daß $a_{N_\nu}(x) \to \bar{a}(x)$ und $b_{N_\nu}(y) \to \bar{b}(y)$ für $\nu \to \infty$ streben. Dann ist $g = f + \bar{a} + \bar{b}$, oder indem wir $f = g + \bar{a}_0 + \bar{b}_0$ schreiben, gelten die Beziehungen von **6.**, wobei $\bar{a}_{N_\nu} + \bar{b}_{N_\nu} \to 0$. Durch eine weitere Teilfolgenauswahl können wir auch

$$\bar{a}_{N_\nu} \to \gamma, \quad \bar{b}_{N_\nu} \to -\gamma \text{ für } \nu \to \infty$$

erzwingen. Da $\bar{a}_n$ nur von x, $\bar{b}_n$ nur von y abhängen, so ist notwendig γ eine Konstante. (6) und (7) lehren nun, daß $\gamma = 0$ ist, und die Ungleichungen (8), daß allgemein

$$\bar{a}_n \to 0 \text{ und } \bar{b}_n \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Damit ist $f_n \to g$ bewiesen.

Bemerkung. Der hier für den Hauptsatz gegebene Beweis ist auch auf das Matrixproblem der eingangs genannten Note [1] anwendbar, und liefert so einen neuen, kürzeren Beweis für die Konvergenz beim diskreten Problem.

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1960

Band/Volume: 1959

Autor(en)/Author(s): Aumann Georg

Artikel/Article: Approximative Nomographie 103-109