BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1959

MÜNCHEN 1960

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über unendliche C-Kettenbrüche, deren korrespondierende Potenzreihe einer quadratischen Gleichung genügt

Herrn O. Perron zum 79. Geburtstag am 7. Mai 1959 in Dankbarkeit gewidmet

Von **Rudolf Steuerwald** in München

Vorgelegt von Herrn Oskar Perron am 8. Mai 1959

§ 1. Vorbemerkungen

I. Bezüglich der Definitionen und Bezeichnungen hält sich diese Arbeit an das Buch: O. Perron, *Die Lehre von den Kettenbrüchen,* 3. Auflage, Band I (1954) und II (1957), B. G. Teubner, Stuttgart; künftig zitiert „P I" und „P II".

II. Sonst ist über die hier verwendete Symbolik noch folgendes zu sagen: Es bedeuten

alle als Exponenten auftretenden Buchstaben nichtnegative ganzrationale Zahlen,

große lateinische Buchstaben durchweg Polynome von x; dieses Argument wird oft weggelassen.

In allen Potenzreihen, einschließlich der Polynome, sind die Glieder nach wachsendem Grad in x geordnet zu denken; das erste nicht identisch verschwindende Glied (sofern vorhanden) wird Leitglied, sein Koeffizient Leitkoeffizient genannt. Schreibweisen wie

$$\mathfrak{P}(x) = c + \cdots, \quad P(x) = c_m x^m + \cdots \qquad (c_m \neq 0)$$

kennzeichnen dann unzweideutig c als Anfangsglied der Potenzreihe, $c_m x^m$ als Leitglied des Polynoms.

Folgerichtig wird der größte gemeinsame Teiler mehrerer Polynome so normiert, daß nicht, wie meist üblich, das gradbestimmende Glied (hier Schlußglied), sondern das Leitglied den Koeffizienten 1 bekommt.

Unter C-Kettenbrüchen sind hier ausnahmslos solche mit dem Anfangsglied 1 zu verstehen.[1] Dabei wird anstatt

$$1 + \frac{a_1 x^{r_1} |}{| 1} + \frac{a_2 x^{r_2} |}{| 1} + \cdots$$

kurz geschrieben

$$\langle a_1 x^{r_1}, \ a_2 x^{r_2}, \ \ldots \rangle$$

und eine Periode jeweils durch Überstreichung kenntlich gemacht.

§ 2. Problemstellung[2]

I. Zur Entwicklung einer reellen Irrationalzahl ξ_0 in einen unendlichen regelmäßigen Kettenbruch dient die Gleichungskette

$$\xi_\lambda = b_\lambda + \frac{1}{\xi_{\lambda+1}} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots).$$

Analog findet man zu einer Potenzreihe $\mathfrak{P}_0(x) = 1 + \cdots$, die keine rationale Funktion von x darstellt, den korrespondierenden unendlichen C-Kettenbruch mittels der Gleichungen

$$(1) \qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) = 1 + \frac{a_{\lambda+1} x^{r_{\lambda+1}}}{\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)} \ (\lambda = 0, 1, \ldots; \ a_{\lambda+1} \neq 0, \ r_{\lambda+1} > 0).$$

II. Ist speziell ξ_0 eine quadratische Irrationalzahl, so gelten die Aussagen:

a) Unter den ξ_λ befinden sich reduzierte Zahlen.

b) Ist ξ_λ reduziert, dann auch $\xi_{\lambda+1}$.

c) Sind die Zahlen ξ_λ und $\xi_{\lambda+1}$ beide reduziert, so ist durch die Kenntnis einer von ihnen jeweils auch die andere eindeutig bestimmt.

Dazu kommt noch als Folge der Definition einer reduzierten Zahl:

---

[1] Vgl. P II, S. 108, Fußnote 1.

[2] Vgl. zu Abschnitt I: P I, S. 31, Gl. (1) und P II, S. 110, Satz 3.5; zu Abschnitt II: P I, S. 65 ff., S. 73 ff. und S. 54.

d) Es gibt nur endlich viele reduzierte Zahlen, die mit ξ_0 äquivalent sind.

Vermöge a), b), d) gelangt man zu dem Periodizitätssatz von Lagrange, und dann durch Hinzunahme von c) zu den hauptsächlich auf Galois zurückgehenden Sätzen über reine, inverse und symmetrische Perioden.

III. Die unter I festgestellte Analogie legt die Frage nahe: Wenn speziell $\mathfrak{P}_0(x)$ einer im Körper der rationalen Funktionen von x irreduziblen quadratischen Gleichung genügt, gibt es dann vielleicht unter den in (1) auftretenden Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ solche, welche im Sinne der Aussagen a), b), c) die Rolle der reduzierten Zahlen spielen? Hier wird zunächst gezeigt, daß diese Frage zu bejahen ist (§§ 3 und 4).

Daraus folgt dann schon, daß ein Analogon zu d) fehlt. Wäre nämlich ein solches auch noch vorhanden, so ließe sich genau wie beim Satz von Lagrange beweisen, daß der mit $\mathfrak{P}_0(x)$ korrespondierende C-Kettenbruch immer periodisch sein müßte. Das braucht aber bekanntlich[3] nicht der Fall zu sein. Trotzdem lassen sich die Galoisschen und verwandten Sätze auf C-Kettenbrüche übertragen, wenn man nur, soweit nötig, deren Periodizität zusätzlich voraussetzt. Das wird in § 5 ausgeführt. § 6 endlich bringt Beispiele.

§ 3. V-Reihen

I. **Definition 1.** *Eine Potenzreihe*

$$\mathfrak{P}(x) = 1 + c_1 x + \cdots, \tag{2}$$

welche einer im Körper der rationalen Funktionen von x irreduziblen quadratischen Gleichung genügt, werde V-Reihe genannt.

Eine solche Reihe läßt sich demnach immer darstellen durch eine Gleichung der Gestalt

$$\mathfrak{P}(x) = f(x) = \frac{\sqrt{S(x)} + P(x)}{Q(x)}, \tag{3}$$

[3] Vgl. P II, S. 113 unten.

wo $S(x)$ nicht Quadrat eines Polynoms ist, $Q(x)$ nicht identisch verschwindet und die Wurzel eindeutig erklärt sei. Damit aber durch (3) wirklich eine V-Reihe definiert wird, muß noch

$$f(0) = 1 \tag{4}$$

und (zur Vermeidung gebrochener Exponenten) der Grad des Leitgliedes von $S(x)$ gerade sein, etwa

$$S(x) = c^* x^{2s} + \cdots \qquad (c^* \neq 0). \tag{5}$$

Diese notwendigen Bedingungen sind dann zusammen auch hinreichend.

II. Die Polynome auf der rechten Seite von (3) sind nicht eindeutig bestimmt. Aber es gilt der

Satz 1. *Unter allen Darstellungen* (3) *der nämlichen V-Reihe gibt es genau eine mit folgenden drei Eigenschaften:*

(6) *Die Reihe für $\sqrt{S(x)}$ hat den Leitkoeffizienten* 1, *also* $\sqrt{S(x)} = x^s + \cdots$.

(7) $\dfrac{S(x) - P^2(x)}{Q(x)}$ *ist ein Polynom $R(x)$.*

(8) *Die Polynome $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ sind teilerfremd.*

Diese Darstellung heiße normiert.

Zum Beweis leiten wir zunächst aus (3) die normierte Darstellung her.

Sei $T(x)$ der größte gemeinsame Teiler der Polynome

$$S - P^2, \quad PQ, \quad Q^2.$$

Dann ist auch

$$\frac{Q^2}{T} \cdot \frac{S - P^2}{T} + \left(\frac{PQ}{T}\right)^2 = \frac{Q^2 S}{T^2}$$

ein Polynom, aber nicht Quadrat eines solchen. Setzt man also

$$\frac{cQ}{T}\sqrt{S} = \sqrt{S'}, \quad \frac{cQ}{T} P = P', \quad \frac{cQ}{T} Q = Q'$$

und bestimmt die Konstante c so, daß in der Reihe für $\sqrt{S'}$ der Leitkoeffizient gleich 1 wird, so genügt offenbar die Darstellung

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\sqrt{S'(x)} + P'(x)}{Q'(x)} \tag{9}$$

den Forderungen (6′), (7′), (8′), die aus (6), (7), (8) durch Hinzufügung der Akzente hervorgehen.

Um jetzt auch noch die Eindeutigkeit der normierten Darstellung zu beweisen, nehmen wir an, es seien für (3) die Bedingungen (6), (7), (8) und für (9) die Bedingungen (6′), (7′), (8′) erfüllt. Dann folgt aus

$$\frac{\sqrt{S} + P}{Q} = \frac{\sqrt{S'} + P'}{Q'}$$

durch Trennung von Rationalem und Irrationalem

$$Q'P = QP', \quad Q'\sqrt{S} = Q\sqrt{S'}, \tag{10}$$

und daraus weiter mit

$$R = \frac{S - P^2}{Q}, \quad R' = \frac{S' - P'^2}{Q'}$$

das Gleichungssystem

$$Q'P = QP', \quad Q'Q = QQ', \quad Q'R = QR'.$$

Wegen (8) haben die linken Seiten dieser drei Gleichungen einen größten gemeinsamen Teiler der Form $q'Q'$, und wegen (8′) ihre rechten Seiten einen solchen der Gestalt qQ, wo q und q' nichtverschwindende konstante Normierungsfaktoren sind. Somit ist

$$qQ = q'Q'. \tag{11}$$

Mittels (11), (6) und (6′) folgt aus der zweiten Gleichung (10)

$$qx^s + \cdots = q\sqrt{S} = q'\sqrt{S'} = q'x^{s'} + \cdots,$$

und daraus weiter

$$s = s', \quad q = q', \quad \sqrt{S} = \sqrt{S'},$$

also schließlich aus (11) und (10) auch noch

$$Q = Q', \quad P = P'.$$

Damit ist die Eindeutigkeit der normierten Darstellung bewiesen.

III. Aus (8) folgt a fortiori

(12) *x ist nicht gemeinsamer Teiler von $P(x)$, $Q(x)$ und $R(x)$.*

Wir zeigen nun: Äquivalent mit (12) ist die Aussage

(13) *x ist nicht gemeinsamer Teiler von $P(x)$, $Q(x)$ und $S(x)$.*

Daß (12) aus (13) folgt, ist trivial; denn mit P, Q, R wäre auch $S = P^2 + QR$ durch x teilbar. Die Umkehrung sieht man so ein: Nach Voraussetzung bestehen Reihenentwicklungen

$$\frac{\sqrt{S}+P}{Q} = \mathfrak{P}(x), \quad \sqrt{S}-P = \tilde{\mathfrak{P}}(x).$$

Wäre (13) falsch, so wären nicht nur P und Q durch x teilbar, sondern wegen (5) auch alle Glieder der Reihe $\tilde{\mathfrak{P}}(x)$, also auch alle Glieder der Produktreihe $\mathfrak{P}(x)\,\tilde{\mathfrak{P}}(x)$, das heißt des Polynoms $R(x)$, in Widerspruch zu (12).

An sich dürfte man ohne Schaden künftig immer die Darstellung der Ausgangsreihe $\mathfrak{P}_0(x)$ als normiert voraussetzen. Dadurch würde aber der Spielraum unnötig eingeschränkt; es wird nämlich nirgends die Voraussetzung (8) voll benötigt, sondern immer nur deren Abschwächung (12) bzw. (13). Daher entscheiden wir uns für die folgende

Definition 2. *Als zulässig werden nur solche Darstellungen (3) von V-Reihen erklärt, bei denen außer (6) und (7) auch noch eine der miteinander äquivalenten Voraussetzungen (12), (13) – und damit auch die andere – erfüllt ist.*

Man sieht leicht: Die durch vorstehende Definition zugelassenen Darstellungen sind genau diejenigen, welche aus der normierten durch Erweiterung der rechten Seite mit einem beliebigen

Polynom $T(x) = 1 + \cdots$ hervorgehen, das dadurch gleichzeitig zum größten gemeinsamen Teiler der neuen Polynome $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ wird.

Zieht man jetzt die bisher noch nicht benützte Voraussetzung (4) heran, so führt die Annahme, daß wenigstens zwei der Polynome P, Q, S durch x teilbar seien, auf einen Widerspruch zu (13). Bei zulässiger Darstellung einer V-Reihe ist also höchstens eines der Polynome P, Q, S durch x teilbar.

IV. Für das Folgende empfiehlt es sich,

$$\sqrt{S(x)} = x^s \sqrt{D(x)} \qquad (D(0) \neq 0) \tag{14}$$

zu setzen. Dann läßt sich das Bisherige so zusammenfassen:

Die Gleichung

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{x^s \sqrt{D(x)} + P(x)}{Q(x)} \qquad (D(0) \neq 0) \tag{15}$$

stellt dann und nur dann eine V-Reihe dar, wenn $D(x)$ nicht Quadrat eines Polynoms, $Q(x)$ nicht identisch Null, die Wurzel eindeutig erklärt und

$$\mathfrak{P}(0) = 1 \tag{16}$$

ist.

Jede V-Reihe erlaubt solche Darstellungen. Von diesen sind diejenigen und nur diejenigen zulässig, welche noch den drei folgenden, immer erfüllbaren Bedingungen genügen:

$$\sqrt{D(x)} = 1 + \cdots. \tag{17}$$

(18) $\dfrac{x^{2s} D(x) - P^2(x)}{Q(x)} = R(x)$ *ist ein Polynom.*

(19) *Es ist nicht gleichzeitig* $s > 0$, $P(0) = 0$, $Q(0) = 0$.

Aus (16) und (19) folgt:

$$P(0) = Q(0) \neq 0, \quad \textit{wenn} \quad s > 0, \tag{20}$$

$$1 + P(0) = Q(0), \quad \textit{wenn} \quad s = 0, \tag{21}$$

und diese beiden Aussagen ziehen ihrerseits wieder (16) und (19) nach sich.

Außerdem ist (19) gleichbedeutend mit (13) und daher auch äquivalent mit (12).

§ 4. W-Reihen

I. Sei, in zulässiger Darstellung,

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{x^{s_0}\sqrt{D(x)} + P_0(x)}{Q_0(x)} = 1 + \cdots. \tag{22}$$

Sei ferner, wenn die Differenz $Q_0(x) - P_0(x)$ nicht identisch verschwindet, u_0 der Grad ihres Leitgliedes, andernfalls $u_0 = s_0$. Setzt man jetzt

$$\begin{cases} \min(s_0, u_0) = t_0, \\ Q_0(x) - P_0(x) = x^{t_0} P_1(x), \\ s_0 - t_0 = s_1, \end{cases} \tag{23}$$

so sieht man aus (20) und (21): Dann und nur dann, wenn $s_0 > 0$ ist, wird auch $u_0 > 0$ und damit $t_0 > 0$, $s_1 < s_0$. Ist aber $s_0 = 0$, dann auch $u_0 = t_0 = s_1 = 0$ und $P_1(x) = 1 + \cdots$.

Mittels (23) läßt sich (22) überführen in

$$\mathfrak{P}_0(x) - 1 = x^{t_0} \frac{x^{s_1}\sqrt{D(x)} - P_1(x)}{Q_0(x)}. \tag{24}$$

Andererseits erhält man aus (1)

$$\mathfrak{P}_0(x) - 1 = \frac{a_1 x^{r_1}}{\mathfrak{P}_1(x)} = a_1 x^{r_1} + \cdots \qquad (a_1 \neq 0,\ r_1 > 0). \tag{25}$$

Vergleich von (24) und (25) ergibt

$$r_1 \geqq t_0. \tag{26}$$

Nach (25) ist nämlich $a_1 x^{r_1}$ das Leitglied der Reihe $\mathfrak{P}_0(x) - 1$, und nach (24) hat dieses Leitglied mindestens den Grad t_0. Das ist trivial, wenn $t_0 = 0$, und folgt im Falle $t_0 > 0$ daraus, daß dann auch $s_0 > 0$, also, wegen (20), $Q_0(x)$ nicht durch x teilbar ist. Zufolge (24), (25), (26) besteht eine Entwicklung

$$(27) \qquad \frac{x^{s_1}\sqrt{D(x)} - P_1(x)}{Q_0(x)} = a_1 x^{r_1 - t_0} + \cdots \quad (a_1 \neq 0,\ r_1 - t_0 \geqq 0).$$

Nach Voraussetzung ist

$$(28) \qquad \frac{x^{2s_0} D(x) - P_0^2(x)}{Q_0(x)} = R_0(x)$$

ein Polynom. Mittels (23) und (28) berechnet man

$$(29) \qquad x^{2t_0}\, \frac{x^{2s_1} D(x) - P_1^2(x)}{Q_0(x)} = R_0(x) + 2P_0(x) - Q_0(x)$$

und schließt daraus, daß nicht nur die linke Seite dieser Gleichung, sondern sogar deren zweiter Faktor ein Polynom sein muß. Auch das ist ja trivial, wenn $t_0 = 0$, und folgt im Falle $t_0 > 0$ wieder daraus, daß dann $Q_0(x)$ nicht durch x teilbar ist.

Mit Rücksicht auf (27) darf man daher schreiben:

$$(30) \qquad \frac{x^{2s_1} D(x) - P_1^2(x)}{Q_0(x)} = a_1 x^{r_1 - t_0} Q_1(x)$$

und sieht gleichzeitig, daß das hierdurch definierte Polynom $Q_1(x)$ das nämliche Leitglied hat wie die Reihenentwicklung der Funktion $x^{s_1}\sqrt{D(x)} + P_1(x)$.

Schließlich berechnet man aus (25), (24) und (30)

$$(31) \qquad \mathfrak{P}_1(x) = \frac{x^{s_1}\sqrt{D(x)} + P_1(x)}{Q_1(x)} = 1 + \cdots.$$

II. Die Darstellung (31) der V-Reihe $\mathfrak{P}_1(x)$ ist zulässig. Denn (16) wurde bewiesen, (17) vorausgesetzt, (18) folgt aus (30):

$$(32) \qquad \frac{x^{2s_1} D(x) - P_1^2(x)}{Q_1(x)} = a_1 x^{r_1 - t_0} Q_0(x) = R_1(x);$$

aber auch (19) ist erfüllt. Aus den Definitionen (23) ergibt sich nämlich: Ist $u_0 < s_0$, so ist $P_1(0) \neq 0$. Ist aber $u_0 \geqq s_0$, dann $t_0 = s_0$ und daher $s_1 = 0$.

Der Übergang von (22) zu (31) wird vermittelt durch die Gleichungen

(33)
$$x^{t_0} P_1 = Q_0 - P_0, \quad a_1 x^{r_1 + t_0} Q_1 = R_0 + 2 P_0 - Q_0, \quad R_1 = a_1 x^{r_1 - t_0} Q_0.$$

Aus diesen liest man, da ja für beide Darstellungen die Erfüllung der mit (19) äquivalenten Bedingung (12) gesichert ist, mühelos ab:

Die zwei Polynom-Tripel P_0, Q_0, R_0 und P_1, Q_1, R_1 haben den nämlichen größten gemeinsamen Teiler.

Endlich ist für das Folgende von Interesse die mittels (23) leicht zu verifizierende Feststellung:

Dann und nur dann, wenn die Gleichung

$$Q_0(x) - P_0(x) = x^{s_0} + \cdots \tag{34}$$

besteht, was z. B. nach (21) immer im Falle $s_0 = 0$ zutrifft, ergeben sich gleichzeitig die Beziehungen

$$s_1 = 0, \quad P_1(x) = 1 + \cdots.$$

Wegen (16) und (17) muß dann $Q_1(0) = 2$ sein.

Außerdem ist die nämliche Bedingung (34) notwendig und hinreichend dafür, daß in (26) das Zeichen $>$ gilt.

III. Da der Übergang von $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ zu $\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)$ für $\lambda > 0$ genau so erfolgt wie für $\lambda = 0$, liefern die bisherigen Ergebnisse dieses Paragraphen den

Satz 2. *Ausgehend von einer V-Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ in zulässiger Darstellung (15), erhält man mittels der Gleichungskette (1) für alle Reihen der Folge $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$ eindeutig bestimmte zulässige Darstellungen*

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \frac{x^{s_\lambda} \sqrt{D(x)} + P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)} \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots) \tag{35}$$

mit dem nämlichen Polynom $D(x)$, und darf daher auch allgemein

$$\frac{x^{2s_\lambda} D(x) - P_\lambda^2(x)}{Q_\lambda(x)} = R_\lambda(x) \qquad (\lambda = 0, 1, \ldots) \tag{36}$$

setzen.

Alle Tripel $P_\lambda(x)$, $Q_\lambda(x)$, $R_\lambda(x)$ haben den nämlichen größten gemeinsamen Teiler $T(x) = 1 + \cdots$.

Ist $s_\lambda > 0$, so ist $s_{\lambda+1} < s_\lambda$.

Ist $s_\lambda = 0$, so ist auch $s_{\lambda+1} = 0$ und noch dazu $P_{\lambda+1}(0) = 1$, $Q_{\lambda+1}(0) = 2$.

IV. Die drei letzten Gleichungen kennzeichnen nun, wie sich sofort zeigen wird, gerade diejenigen V-Reihen, welche im Sinne des § 2 das dort angekündigte Analogon zu den reduzierten quadratischen Irrationalzahlen bilden. Sie sollen wegen ihrer Wichtigkeit einen eigenen Namen bekommen.

Definition 3. *Eine V-Reihe $\mathfrak{P}(x)$, welche eine Darstellung*

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + P(x)}{Q(x)} \tag{37}$$

mit

$$\sqrt{D(x)} = 1 + \cdots, \quad P(x) = 1 + \cdots, \quad Q(x) = 2 + \cdots \tag{38}$$

erlaubt, heiße eine W-Reihe.

Anmerkung 1. Die Bedingungen (38) sind nicht unabhängig voneinander; aus je zweien folgt vermittels (16) die dritte.

Anmerkung 2. Aus dem Inhalt des § 3 ersieht man: Gibt es überhaupt eine Darstellung (37) der V-Reihe $\mathfrak{P}(x)$ mit den Eigenschaften (38), dann kommen diese letzteren insbesondere auch der normierten und jeder anderen zulässigen Darstellung zu.

Anmerkung 3. Für die Zulässigkeit der Darstellung (37) mit den Eigenschaften (38) ist notwendig und hinreichend, daß $D(x) - P^2(x)$ durch $Q(x)$ teilbar ist.

Die in § 2, III gestellte Frage bejaht jetzt der

Satz 3. a) *Unter den bei Herleitung des korrespondierenden C-Kettenbruches auftretenden V-Reihen* $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ $(\lambda = 0, 1, \ldots)$ *befinden sich W-Reihen.*

b) *Ist* $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ *eine W-Reihe, dann auch* $\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)$.

c) *Sind die beiden Potenzreihen* $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ *und* $\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)$ *W-Reihen, so ist durch eine Darstellung* (37) *einer von ihnen jeweils auch die andere eindeutig bestimmt.*

Beweis. Zu a) und b): Nach der vorletzten Zeile von Satz 2 gibt es einen kleinsten Index $\mu \leqq s_0$, für den $s_\mu = 0$ wird. Nach der letzten Zeile ist dann $\mathfrak{P}_{\mu+1}(x)$ eine W-Reihe. Das nämliche folgt allgemein aus $s_\lambda = 0$ für $\mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)$.

Zu c): Man darf annehmen, daß die als bekannt vorausgesetzte Darstellung einer der beiden Reihen schon der durch Satz 2 garantierten Folge (35) zulässiger Darstellungen angehört. Dann gibt es für die andere eine ebensolche, und es bestehen die Gleichungen[4]

$$P_{\lambda+1}(x) = Q_\lambda(x) - P_\lambda(x). \tag{39}$$

$$\begin{cases} D(x) - P_{\lambda+1}^2(x) = a_{\lambda+1}\, x^{r_{\lambda+1}}\, Q_\lambda(x)\, Q_{\lambda+1}(x); \\ Q_\lambda(x) = 2 + \cdots, \quad Q_{\lambda+1}(x) = 2 + \cdots. \end{cases} \tag{40}$$

Diese gehen nämlich aus (23) und (30) hervor, indem man dort alle Indizes um λ erhöht und dann $s_\lambda = t_\lambda = 0$ setzt. Mit ihrer Hilfe berechnet man, und zwar jeweils eindeutig,

wenn D, P_λ, Q_λ bekannt sind, zunächst $P_{\lambda+1}$ aus (39), und hierauf $a_{\lambda+1}$, $r_{\lambda+1}$ und $Q_{\lambda+1}$ aus (40);

wenn D, $P_{\lambda+1}$, $Q_{\lambda+1}$ bekannt sind, zunächst $a_{\lambda+1}$, $r_{\lambda+1}$, Q_λ aus (40), und hierauf P_λ aus (39).

Damit ist Satz 3 vollständig bewiesen.

V. Ist speziell $\mathfrak{P}_0(x)$ selbst schon eine W-Reihe, so erlaubt der Teil c) von Satz 3 nicht nur, von einer beliebigen der Gleichungen (35) zu allen übrigen zu gelangen, sondern darüber hinaus, mittels (39) und (40) die Zahlen und Polynome

[4] Vgl. P II, S. 115, (9) und (10).

$$a_{\lambda+1}, \quad r_{\lambda+1}, \quad P_\lambda(x), \quad Q_\lambda(x)$$

auch für $\lambda = -1, -2, \ldots$ rekursiv zu definieren und so den zulässigen Darstellungen

$$(41) \qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)} \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

sowie den Beziehungen (1) für alle ganzrationalen Indizes Gültigkeit zu verschaffen.

Ebenso allgemein gilt dann auch die Relation[5]

$$(42) \quad a_{\lambda+1}\, x^{r_{\lambda+1}}\, Q_{\lambda+1}(x) = 2\, P_\lambda(x) - Q_\lambda(x) + a_\lambda\, x^{r_\lambda}\, Q_{\lambda-1}(x),$$

die entsteht, indem man $P_{\lambda+1}$ und D aus (39), (40) und (40) mit $\lambda - 1$ statt λ eliminiert und dann durch Q_λ dividiert.

Als besonders nützlich aber wird sich erweisen, daß man mittels der in (41) auftretenden Polynome eine zweite Folge von W-Reihen bilden kann, indem man definiert:

$$(43) \qquad \mathfrak{Q}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + P_\lambda(x)}{Q_{\lambda-1}(x)} \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Betrachtet man die Beziehungen, die sich ergeben, wenn man in (40) λ durch $\lambda - 1$ bzw. $\lambda - 2$ ersetzt, so zeigt die erstere, daß auch die Darstellungen (43) zulässig sind; die zweite aber läßt sich so umformen:

$$(44) \qquad \frac{\sqrt{D} - P_{\lambda-1}}{Q_{\lambda-1}} = \frac{a_{\lambda-1}\, x^{r_{\lambda-1}}\, Q_{\lambda-2}}{\sqrt{D} + P_{\lambda-1}}.$$

Aus (39) mit $\lambda - 1$ statt λ berechnet man

$$P_{\lambda-1} = Q_{\lambda-1} - P_\lambda.$$

Setzt man das in die linke Seite von (44) ein, so erhält man[6]

---

[5] Vgl. P II, S. 115, Gl. (11).

[6] $\mathfrak{Q}_\lambda(x)$ geht aus $\dfrac{-a_\lambda\, x^{r_\lambda}}{\mathfrak{P}_\lambda(x)}$ hervor, indem man $\sqrt{D(x)}$ durch $-\sqrt{D(x)}$ ersetzt, entspricht also der Zahl $\dfrac{-1}{\eta_\lambda}$ bei P I, S. 74 ff. Man könnte daher auch, durch eine ähnliche Schlußweise wie dort, ohne den Umweg über (39) und (40) von (1) zu (45) gelangen.

$$(45) \qquad \mathfrak{Q}_\lambda(x) = 1 + \frac{a_{\lambda-1}\, x^{r_{\lambda-1}}}{\mathfrak{Q}_{\lambda-1}(x)} \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

und schließlich, alles zusammenfassend, den

Satz 4. *Liegt eine W-Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ in zulässiger Darstellung vor, so dürfen die Rekursionsformeln* (39) *und* (40) *für alle ganzrationalen Indizes λ angewandt werden und liefern zulässige Darstellungen* (41) *und* (43) *von W-Reihen, welche durch die Beziehungen* (1) *bzw.* (45) *verknüpft sind.*

Die Kenntnis einer einzigen Gleichung (41) *oder* (43) *genügt, um beide Folgen vollständig und eindeutig zu bestimmen.*

Jedes Tripel von Polynomen $P_\lambda(x)$, $Q_\lambda(x)$, $Q_{\lambda-1}(x)$ hat den nämlichen größten gemeinsamen Teiler $T(x) = 1 + \cdots$.[7]

Die Richtigkeit der letzten Behauptung liest man wegen (38) ohne weiteres aus (39) und (42) ab; alles übrige ist schon bewiesen.

Wegen der Analogie zwischen den Systempaaren (41) und (1) einerseits, (43) und (45) andererseits kann man den Prozeß, der von ersterem zu letzterem führte, von diesem ausgehend, iterieren, gelangt aber dadurch zu nichts Neuem, sondern zu (41) und (1) zurück. Diese Symmetrie berechtigt zu der folgenden

Definition 4. *Die Gesamtheit der W-Reihen* (41) *und* (43) *heiße eine Schar von W-Reihen oder kurz eine W-Schar. Die Folgen $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$ und $\{\mathfrak{Q}_\lambda(x)\}$ sollen zusammengehörige W-Folgen genannt werden.*

Zur Abrundung werde noch vereinbart, die einschlägigen C-Kettenbrüche derart mit $\mathfrak{U}_\lambda(x)$, $\mathfrak{V}_\lambda(x)$ zu bezeichnen, daß die Korrespondenzen

$$(46) \qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) \sim \mathfrak{U}_\lambda(x), \quad \mathfrak{Q}_\lambda(x) \sim \mathfrak{V}_\lambda(x)$$

bestehen. Aus den Gleichungsketten (1) und (45) folgt dann:

$$(47) \qquad \mathfrak{P}_\lambda(x) \sim \mathfrak{U}_\lambda(x) = \langle a_{\lambda+1}\, x^{r_{\lambda+1}},\ a_{\lambda+2}\, x^{r_{\lambda+2}},\ \ldots\rangle,$$

$$(48) \qquad \mathfrak{Q}_\lambda(x) \sim \mathfrak{V}_\lambda(x) = \langle a_{\lambda-1}\, x^{r_{\lambda-1}},\ a_{\lambda-2}\, x^{r_{\lambda-2}},\ \ldots\rangle.$$

---

[7] Dieser ist dann und nur dann 1, wenn alle Darstellungen normiert sind.

§ 5. Periodische C-Kettenbrüche; W^*-Reihen

I. In diesem Paragraphen kommen nur noch W-Reihen vor. Dabei sind unter $\mathfrak{P}_\lambda(x)$, $\mathfrak{Q}_\lambda(x)$ – mit Index! – durchweg Reihen aus der nämlichen W-Schar zu verstehen; von diesen wird dann auch immer stillschweigend vorausgesetzt, daß sie in zulässigen Darstellungen mit dem gleichen Polynom $D(x)$ vorliegen.

Bei den korrespondierenden C-Kettenbrüchen ist das Wort „Periode" nebst seinen Attributen „primitiv, invers, symmetrisch" ganz analog zu deuten wie bei den regelmäßigen Kettenbrüchen.[8] Nur treten eben hier an Stelle der Teilnenner b_λ die Teilzähler $a_\lambda x^{r_\lambda}$ als Elemente der betreffenden Komplexe auf.

Darüber hinaus werde vereinbart:

Definition 5. *Die mit dem ersten Teilzähler beginnende primitive Periode eines reinperiodischen C-Kettenbruches heiße dessen Urperiode.*

Für W-Reihen aus derselben Schar gilt immer der Teil c) von Satz 3 und der zweite Absatz von Satz 4. Nimmt man dazu noch die Eineindeutigkeit der Korrespondenz zwischen Potenzreihe und C-Kettenbruch, so führt vollständige Induktion nach λ bzw. ϱ zu den folgenden, für alles Weitere grundlegenden Ergebnissen.

Hilfssatz 1. *Entweder gilt keine der Gleichungen*

(49)
$$\mathfrak{P}_\lambda = \mathfrak{P}_{\lambda+k},\ \mathfrak{Q}_\lambda = \mathfrak{Q}_{\lambda+k},\ \mathfrak{U}_\lambda = \mathfrak{U}_{\lambda+k},\ \mathfrak{V}_\lambda = \mathfrak{V}_{\lambda+k}\ (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

oder sie gelten alle und lassen sich dann aufspalten in

$$\left.\begin{aligned} &(50) \qquad P_\lambda = P_{\lambda+k}, \quad Q_\lambda = Q_{\lambda+k} \\ &(51) \qquad a_\lambda = a_{\lambda+k}, \quad r_\lambda = r_{\lambda+k} \end{aligned}\right\} \qquad (\lambda = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Aus jedem der Systeme (49), (50), (51) *folgen die beiden anderen.*

---

[8] Vgl. P I, S. 61, 63, 65, 76 ff.

Hilfssatz 2. *Entweder gilt keine der Gleichungen*

$$\mathfrak{P}_{\mu+\varrho} = \mathfrak{Q}_{\nu-\varrho}, \quad \mathfrak{U}_{\mu+\varrho} = \mathfrak{V}_{\nu-\varrho} \qquad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{52}$$

oder sie gelten alle und lassen sich dann aufspalten in

$$\left.\begin{array}{ll} P_{\mu+\varrho} = P_{\nu-\varrho}, & Q_{\mu+\varrho} = Q_{\nu-\varrho-1} \quad (53) \\ a_{\mu+\varrho} = a_{\nu-\varrho}, & r_{\mu+\varrho} = r_{\nu-\varrho} \quad (54) \end{array}\right\} \quad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Aus jedem der Systeme (52), (53), (54) *folgen die beiden anderen.*

II. **Satz 5.** *Ein periodischer C-Kettenbruch ist dann und nur dann reinperiodisch, wenn seine korrespondierende Potenzreihe eine W-Reihe ist.*

Das „nur dann" in diesem Satz ist nicht neu. Denn bekanntlich[9] gestattet die korrespondierende Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ eines k-gliedrig reinperiodischen C-Kettenbruches eine Darstellung der Form (41) mit

(55)

$$P_0 = A_{k-1} - (B_k - B_{k-1}), \; Q_0 = 2\,B_{k-1}, \; D = P_0^2 + 2(A_k - A_{k-1})\,Q_0.$$

Da alle Polynome $A_\lambda(x)$, $B_\lambda(x)$ das Leitglied 1 haben, sind die Bedingungen (38) erfüllt; aus der letzten Gleichung (55) ersieht man sogar die Zulässigkeit der Darstellung.

Ist umgekehrt der korrespondierende C-Kettenbruch einer W-Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ k-gliedrig periodisch, so gibt es Indizes λ, für welche die erste Gleichung (49) gilt. Nach Hilfssatz 1 ist dann auch $\mathfrak{P}_0 = \mathfrak{P}_k$.

Satz 6. *Ist von den korrespondierenden C-Kettenbrüchen der Reihen einer W-Schar überhaupt einer periodisch, so sind sie alle reinperiodisch mit gleichlangen, etwa k-gliedrigen Urperioden. Diese sind bei jedem Paar* $\mathfrak{U}_\lambda(x)$, $\mathfrak{V}_{\lambda+1}(x)$ *zueinander invers.*

Umgekehrt lassen sich die korrespondierenden W-Reihen $\mathfrak{P}(x)$, $\mathfrak{Q}(x)$ *zweier reinperiodischer C-Kettenbrüche* $\mathfrak{U}(x)$, $\mathfrak{V}(x)$ *mit*

[9] P II, S. 113; Schreibweise leicht geändert.

inversen Urperioden immer derart in eine W-Schar einbetten, daß $\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_\lambda(x)$, $\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda+1}(x)$ *wird.*

Beweis des ersten Absatzes. Der Anfang steckt schon in Satz 5 und Hilfssatz 1. Nach letzterem darf man überhaupt jeden Index λ durch einen beliebigen anderen aus der nämlichen Restklasse (modulo k) ersetzen, daher zufolge (47) und (48) auch schreiben

$$\mathfrak{U}_\lambda(x) = \overline{\langle a_{\lambda+1}\, x^{r_{\lambda+1}},\ a_{\lambda+2}\, x^{r_{\lambda+2}},\ \ldots,\ a_{\lambda+k}\, x^{r_{\lambda+k}}\rangle}, \tag{56}$$

$$\mathfrak{V}_{\lambda+1}(x) = \overline{\langle a_{\lambda+k}\, x^{r_{\lambda+k}},\ a_{\lambda+k-1}\, x^{r_{\lambda+k-1}},\ \ldots,\ a_{\lambda+1}\, x^{r_{\lambda+1}}\rangle}. \tag{57}$$

Beweis des zweiten Absatzes. Wählt man λ beliebig fest, stellt $\mathfrak{P}(x)$ zulässig dar und setzt dann $\mathfrak{P}(x) = \mathfrak{P}_\lambda(x)$, so definiert man dadurch nach dem zweiten Absatz von Satz 4 eindeutig eine Schar von W-Reihen nebst deren korrespondierenden C-Kettenbrüchen. Von den letzteren ist nach Voraussetzung $\mathfrak{U}(x) = \mathfrak{U}_\lambda(x)$ periodisch. Nach dem eben Bewiesenen haben daher $\mathfrak{U}_\lambda(x)$ und $\mathfrak{V}_{\lambda+1}(x)$ inverse Urperioden. Da das nämliche von $\mathfrak{U}(x)$ und $\mathfrak{V}(x)$ vorausgesetzt wurde, muß $\mathfrak{V}(x) = \mathfrak{V}_{\lambda+1}(x)$, also auch $\mathfrak{Q}(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda+1}(x)$ sein.

Anmerkung. Man sieht leicht. Von den beiden Gleichungen

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)}, \quad \mathfrak{Q}_{\lambda+1}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + Q_\lambda(x) - P_\lambda(x)}{Q_\lambda(x)}$$

zieht immer die erste die zweite nach sich, auch dann, wenn $D - P_\lambda^2$ nicht durch Q_λ teilbar ist, also (39) nicht gilt. Demzufolge läßt sich der wesentliche Teil von Satz 6 auch prägnanter so aussprechen:

Satz 6a. *Zwei C-Kettenbrüche haben dann und nur dann inverse Urperioden, wenn überhaupt einer von ihnen periodisch ist und außerdem ihre korrespondierenden W-Reihen sich simultan durch Gleichungen der Gestalt*

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + Y(x)}{Y(x) + Z(x)}, \quad \mathfrak{Q}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + Z(x)}{Y(x) + Z(x)}$$

$$(\sqrt{D(x)} = 1 + \cdots, \quad Y(0) = Z(0) = 1)$$

darstellen lassen.

III. Nach Hilfssatz 2 haben zwei zusammengehörige W-Folgen entweder kein Element oder alle Elemente gemeinsam. Im letzteren Fall gibt es immer auch einen Index λ, für den (mindestens) eine der Gleichungen $\mathfrak{P}_\lambda(x) = \mathfrak{Q}_\lambda(x)$ oder $\mathfrak{P}_\lambda(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda+1}(x)$ besteht.

Setzt man nämlich etwa $\mathfrak{P}_\mu(x) = \mathfrak{Q}_\nu(x)$ voraus, und definiert δ durch

$$\mu - \nu \equiv \delta \pmod 2, \quad 0 \leqq \delta \leqq 1,$$

so ergibt (52) mit $\varrho = \frac{\nu - \mu - \delta}{2}$:

$$\mathfrak{P}_\lambda(x) = \mathfrak{Q}_{\lambda+\delta}(x) \quad \textit{mit} \quad \lambda = \frac{\mu + \nu - \delta}{2}, \tag{58}$$

und diese Gleichung zerfällt in

$$P_\lambda = P_{\lambda+\delta}, \quad Q_\lambda = Q_{\lambda+\delta-1}. \tag{59}$$

Damit folgt aus (39) und (40)

$$D(x) = P_\lambda^2(x) + a_\lambda x^{r_\lambda} Q_\lambda^2(x), \quad \textit{wenn} \quad \delta = 0, \tag{60}$$

$$Q_\lambda(x) = 2 P_\lambda(x), \quad \textit{wenn} \quad \delta = 1; \tag{61}$$

und umgekehrt gelangt man von (61) mittels (39), und von (60) mittels (40) wieder zu (59) und (58) zurück.

Ferner sieht man noch: Gilt (60), so ist jede Darstellung (37) von $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ mit den Eigenschaften (38) von selbst zulässig; die Bedingung (61) aber ist unabhängig davon, ob eine solche Darstellung zulässig ist oder nicht.

Die Wichtigkeit dieser beiden Spezialfälle rechtfertigt eine eigene Nomenklatur.

Definition 6. *Eine W-Reihe*

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + P(x)}{Q(x)} \tag{62}$$

heiße eine W^*-Reihe, wenn (mindestens) eine der Bedingungen

$$D(x) = P^2(x) + a x^r Q^2(x) \qquad (a \neq 0,\ r > 0), \tag{63}$$

$$Q(x) = 2P(x) \tag{64}$$

erfüllt ist, und zwar nullter Art (kurz W_0^*-Reihe), wenn (63), erster Art (W_1^*-Reihe), wenn (64) gilt.

Zufolge (63) und (64) ist eine W^*-Reihe (62) dann und nur dann gleichzeitig von der nullten und ersten Art, wenn

$$D(x) = P^2(x)\,(1 + 4ax^r), \quad Q(x) = 2P(x)$$

ist. Dann kann man die rechte Seite von (62) mit $P(x)$ kürzen und gelangt unter Einbeziehung bekannter Resultate[10] zu folgendem Ergebnis:

Satz 7. *Die Potenzreihen*

$$\mathfrak{P}(x) = \frac{\sqrt{1 + 4ax^r} + 1}{2} \qquad (a \neq 0,\ r > 0) \tag{65}$$

mit den korrespondierenden C-Kettenbrüchen

$$\mathfrak{U}(x) = \langle \overline{a x^r} \rangle \tag{66}$$

sind die einzigen W^*-Reihen, welche gleichzeitig von der nullten und ersten Art sind. Die von einer solchen Reihe erzeugten W-Scharen sind genau diejenigen, welche aus lauter gleichen Elementen bestehen.

Das berechtigt zu der

Definition 7. *Die durch (65) dargestellten W^*-Reihen sollen trivial heißen, ebenso die von ihnen erzeugten W-Scharen und W-Folgen.*

Jeder nichttrivialen W^*-Reihe $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ werde, je nachdem sie nullter oder erster Art ist, die Zahl $\delta_\lambda = 0$ oder $\delta_\lambda = 1$ zugeordnet.

---

[10] Vgl. P II, S. 116, erstes Beispiel, und S. 112, Satz 3.9.

Jetzt lassen sich unter Heranziehung von Hilfssatz 2 die bisherigen Ergebnisse dieses Abschnittes folgendermaßen zusammenfassen:

Satz 8. *Zwei zusammengehörige W-Folgen haben dann und nur dann ein Element gemeinsam, wenn sie (mindestens) eine W^*-Reihe, etwa $\mathfrak{P}_\mu(x)$, enthalten.*

Ist diese nichttrivial, so ist immer $\mathfrak{P}_\lambda(x) \neq \mathfrak{P}_{\lambda+1}(x)$, und die beiden Folgen bestehen aus den nämlichen Elementen in entgegengesetzter Reihenfolge, gemäß den Gleichungen

$$\mathfrak{P}_{\mu+\varrho} = \mathfrak{Q}_{\mu-\varrho+\delta_\mu} \qquad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots), \tag{67}$$

welche dasselbe besagen wie die Gleichungspaare

$$P_{\mu+\varrho} = P_{\mu-\varrho+\delta_\mu}, \quad Q_{\mu+\varrho} = Q_{\mu-\varrho-1+\delta_\mu} \quad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{68}$$

Für die korrespondierenden C-Kettenbrüche gelten die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{ll} (69) & \mathfrak{U}_{\mu+\varrho} = \mathfrak{V}_{\mu-\varrho+\delta_\mu} \\ (70) & a_{\mu+\varrho} = a_{\mu-\varrho+\delta_\mu}, \quad r_{\mu+\varrho} = r_{\mu-\varrho+\delta_\mu} \end{array}\right\} \quad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Jedes der Systeme (67) *bis* (70) *zieht die drei anderen nach sich.*

Gilt, mit $\delta_\mu = 0$ oder $\delta_\mu = 1$, eine einzige der Gleichungen (67) *oder* (69), *oder auch ein einziges der Gleichungspaare* (68), *so ist $\mathfrak{P}_\mu(x)$ eine W^*-Reihe δ_μ-ter Art.*

IV. In diesem Abschnitt geht es um Zusammenhänge zwischen dem Vorkommen von W^*-Reihen und der Periodizität von C-Kettenbrüchen. Darum wird immer vorausgesetzt, daß sich unter den W-Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ eine W^*-Reihe $\mathfrak{P}_\varkappa(x)$ befindet. Es ist aber sowohl bequem als auch erlaubt, $\varkappa = 0$ anzunehmen, weil man andernfalls ohne Schaden $\lambda = \lambda' + \varkappa$ setzen und so die Reihen in reversibler Weise umnumerieren könnte.

Satz 9. *Die Urperiode eines reinperiodischen C-Kettenbruches ist dann und nur dann symmetrisch, wenn seine korrespondierende Potenzreihe eine W_1^*-Reihe (einschließlich der trivialen) ist.*

Anmerkung. Korrespondiert ein reinperiodischer C-Kettenbruch mit einer nichttrivialen W_1^*-Reihe, so hat seine Urperiode mindestens 3 Glieder. Wäre nämlich eine zweigliedrige Periode vorhanden, so müßte diese symmetrisch, und damit die Urperiode eingliedrig und die W^*-Reihe trivial sein.

Satz 10. *Die Urperiode eines reinperiodischen C-Kettenbruches besteht dann und nur dann aus einem symmetrischen Teil und einem darauffolgenden Schlußglied, wenn seine korrespondierende Potenzreihe eine nichttriviale W_0^*-Reihe ist.*[11]

Satz 11. *Die Urperiode eines reinperiodischen C-Kettenbruches besteht dann und nur dann aus zwei Teilen, von denen jeder für sich symmetrisch ist und einer fehlen kann, wenn die durch ihn bestimmte W-Schar eine W^*-Reihe enthält.*

Die Sätze 9, 10, 11 lassen sich zusammen beweisen. Ist $\mathfrak{P}_0(x)$ eine W^*-Reihe, und ihr korrespondierender C-Kettenbruch $\mathfrak{U}_0(x)$ reinperiodisch mit k-gliedriger Urperiode, so geht (67) mit $\mu = \varrho = 0$ über in

$$\mathfrak{P}_0(x) = \mathfrak{Q}_{\delta_0}(x). \tag{71}$$

Somit sind die Urperioden von $\mathfrak{U}_0(x)$ und $\mathfrak{V}_{\delta_0}(x)$ gleich, andererseits nach Satz 6 diejenigen von $\mathfrak{V}_{\delta_0}(x)$ und $\mathfrak{U}_{\delta_0-1}(x)$ zueinander invers. Daher haben auch $\mathfrak{U}_0(x)$ und $\mathfrak{U}_{\delta_0-1}(x)$ inverse Urperioden, d. h. es bestehen die Gleichungen

$$a_\varrho = a_{k+\delta_0-\varrho}, \quad r_\varrho = r_{k+\delta_0-\varrho} \qquad (\varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{72}$$

[11] Zum Vergleich diene das Verhalten der regelmäßigen Kettenbruchentwicklung einer reduzierten quadratischen Irrationalzahl $\xi_0 = \dfrac{\sqrt{D} + P_0}{Q_0}$ wo jetzt D, P_0, Q_0 ausnahmsweise ad hoc natürliche Zahlen sein sollen. Hier wird die Urperiode dann und nur dann symmetrisch, wenn $Q_0 = Q_{-1}$, also $D = P_0^2 + Q_0^2$ ist. Dagegen ist die Bedingung $b_0\, Q_0 = 2\, P_0$ notwendig und hinreichend dafür, daß in der Urperiode auf ein Anfangsglied ein symmetrischer Restteil folgt. Vgl. P I, S. 105, Satz 3.31. — Zusatz bei der Korrektur: Den trivialen W^*-Reihen entsprechen die Zahlen $\dfrac{\sqrt{n^2+4}+n}{2} = [\bar{n}]$ $(n = 1, 2, \ldots)$

Diese drücken aber mit $1 \leqq \varrho \leqq k$ gerade die in Satz 9 ($\delta_0 = 1$) und Satz 10 ($\delta_0 = 0$) behaupteten Symmetrieeigenschaften aus.

Die Umkehrung folgt daraus, daß sich der Weg, der von (71) zu (72) führte, auch rückwärts durchlaufen läßt, und daß, wenn (71) gilt, $\mathfrak{P}_0(x)$ nach dem letzten Absatz von Satz 8 eine $W^*_{\delta_0}$-Reihe ist.

Schließlich hat eine Urperiode dann und nur dann den in Satz 11 verlangten Bau, wenn sie durch zyklische Vertauschung aus einer mit den in Satz 9 oder Satz 10 beschriebenen Eigenschaften hervorgeht. Damit ist alles bewiesen.

Satz 12. *Ist $\mathfrak{P}_0(x)$ die korrespondierende Potenzreihe eines k-gliedrig reinperiodischen C-Kettenbruches, so gelten die Beziehungen*

$$(73) \qquad P_\varrho = P_{k+\delta_0-\varrho}, \quad Q_{\varrho-1} = Q_{k+\delta_0-\varrho}$$
$$(\delta_0 = 0 \text{ oder } 1, \ \varrho = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

dann und nur dann, wenn $\mathfrak{P}_0(x)$ eine $W^*_{\delta_0}$-Reihe ist.

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz 8, wenn man noch beachtet, daß man in den Gleichungen (68) mit $\mu = 0$ wegen der vorausgesetzten Periodizität die Indizes der rechten Seiten um k erhöhen darf.

Satz 13. *Enthält eine W-Folge zwei (nicht notwendig verschiedene) W^*-Reihen $\mathfrak{P}_0(x)$ und $\mathfrak{P}_m(x)$ ($m \neq 0$), so haben die mit den W-Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ korrespondierenden C-Kettenbrüche $|2m + \delta_m - \delta_0|$-gliedrige Perioden.*

B e w e i s. Setzt man $2m + \delta_m - \delta_0 = k$, so ergibt sich

$$|k| \geqq |2m| - |\delta_m - \delta_0| \geqq 2 - 1 > 0.$$

Wendet man jetzt (67) sowohl mit $\mu = \varrho = 0$ als auch mit $\mu = m$, $\varrho = m + \delta_m - \delta_0$ an, so erhält man

$$\mathfrak{P}_0(x) = \mathfrak{Q}_{\delta_0}(x) = \mathfrak{P}_k(x).$$

Nach Hilfssatz 1 ist dann auch $\mathfrak{P}_{-k} = \mathfrak{P}_0$, und daher allgemein $\mathfrak{P}_\lambda = \mathfrak{P}_{\lambda \pm k}$; und eine der Zahlen $\pm k$ ist gleich $|k|$.

Der eben bewiesene Satz läßt folgende Umkehrung zu:

Satz 14. *Ist $\mathfrak{P}_0(x)$ eine W^*-Reihe und gelten die Beziehungen*

$$\mathfrak{P}_0(x) = \mathfrak{P}_k(x) \ (k \neq 0), \quad k + \delta_0 \equiv \delta \ (\mathrm{mod}\ 2), \quad 0 \leqq \delta \leqq 1,$$
$$m = \frac{k + \delta_0 - \delta}{2},$$

so ist $\mathfrak{P}_m(x)$ eine W^*-Reihe mit $\delta_m = \delta$.

Anmerkung. Es besteht die Gleichung $\delta_m - \frac{1}{2} = (-1)^k (\delta_0 - \frac{1}{2})$.

Beweis. Aus (67) mit $\mu = 0$, $\varrho = m$ erhält man

$$\mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{Q}_{-m+\delta_0}(x).$$

Weil $\mathfrak{P}_0(x) = \mathfrak{P}_k(x)$ ist, darf man statt dessen nach Hilfssatz 1 auch schreiben

$$\mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{Q}_{k-m+\delta_0}(x) = \mathfrak{Q}_{m+\delta}(x).$$

Damit folgt aus dem letzten Absatz von Satz 8 die Behauptung.

V. Jetzt sei $\mathfrak{P}_0(x)$ eine nichttriviale W^*-Reihe, ihr korrespondierender C-Kettenbruch reinperiodisch mit k-gliedriger Urperiode, und $\mathfrak{P}_m(x)$ die weitere, durch Satz 14 bestimmte W^*-Reihe. Dann folgt aus $k \geqq 2$ und $2m = k + \delta_0 - \delta_m$:

$$0 < 2 + \delta_0 - \delta_m \leqq k + \delta_0 - \delta_m = 2m \leqq k + 1 < 2k,$$

also $0 < m < k$.

Nun sei $0 < \lambda < k$, und $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ eine W^*-Reihe. Wir setzen $2\lambda + \delta_\lambda - \delta_0 = k_\lambda$ und finden

$$(74) \qquad 0 < 2\lambda - 1 \leqq k_\lambda \leqq 2(k-1) + 1 < 2k.$$

Da die Urperiode als primitiv definiert wurde, schließt man aus (74) und Satz 13: Die positive Zahl $k_\lambda < 2k$ ist Gliederzahl einer Periode, als solche ein Vielfaches von k, und daher gleich k. Somit ist

$$k = 2\lambda + \delta_\lambda - \delta_0 = 2m + \delta_m - \delta_0,$$

also auch $\lambda = m$. Das heißt: Unter den positiven Indizes $\lambda < k$ gibt es einen und nur einen, nämlich $\lambda = m$, für den $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ eine

W^*-Reihe ist. Ferner ist nicht identisch $\mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{P}_0(x)$, weil $m < k$ nicht Gliederzahl einer Periode sein kann. Demnach gilt der

Satz 15. *Der korrespondierende C-Kettenbruch einer nichttrivialen W^*-Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ ist dann und nur dann periodisch, wenn die Folge $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$ zwei verschiedene W^*-Reihen enthält. Dann ist die W^*-Reihe $\mathfrak{P}_m(x)$ mit kleinstem positivem Index nicht gleich $\mathfrak{P}_0(x)$, die Urperiode hat $k = 2m + \delta_m - \delta_0$ Glieder, und außer $\mathfrak{P}_{tk}(x)$* und *$\mathfrak{P}_{m+tk}(x)$ $(t = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ kommen unter den Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ keine weiteren W^*-Reihen vor.*

Aus Satz 15 ergibt sich folgende praktische Regel: Ist $\mathfrak{P}_0(x)$ eine nichttriviale W^*-Reihe, deren korrespondierender C-Kettenbruch mittels der Formeln (39) und (40) oder (42) hergeleitet werden soll, so darf man das Verfahren abbrechen, sobald man zu einem kleinsten Index $m > \delta_0$ gelangt ist, für den entweder $P_m(x) = P_{m+1}(x)$ oder $Q_m(x) = Q_{m-1}(x)$ ist. Denn dann ist der C-Kettenbruch sicher periodisch, der $(2m + \delta_m - 1)$-gliedrige, symmetrische Anfangsteil der Urperiode lautet,

$$\text{wenn } P_m = P_{m+1}\colon a_1 x^{r_1}, \ldots, a_{m-1} x^{r_{m-1}}, a_m x^{r_m}, a_m x^{r_m}, a_{m-1} x^{r_{m-1}}, \ldots, a_1 x^{r_1};$$

$$\text{wenn } Q_m = Q_{m-1}\colon a_1 x^{r_1}, \ldots, a_{m-1} x^{r_{m-1}}, a_m x^{r_m}, a_{m-1} x^{r_{m-1}}, \ldots, a_1 x^{r_1};$$

und das im Falle $\delta_0 = 0$ noch fehlende Schlußglied findet man aus der Gleichung

$$D(x) - P_0^2(x) = 4 a_k x^{r_k} + \cdots.$$

VI. Als Resümee ergibt sich folgende Einteilung der W-Scharen:

1. W-Scharen ohne W^*-Reihe

Die Folgen $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$, $\{\mathfrak{Q}_\lambda(x)\}$ haben kein Element gemeinsam. Die mit ihren Reihen korrespondierenden C-Kettenbrüche sind entweder nichtperiodisch oder haben Perioden, welche weder symmetrisch noch in zwei symmetrische Teile zerlegbar sind.

2. W-Scharen mit W^*-Reihe

Die zusammengehörigen W-Folgen bestehen aus den nämlichen Elementen.

a) Die Folge $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$ enthält keine zwei verschiedenen W^*-Reihen. Dann ist sie entweder trivial oder führt auf nichtperiodische C-Kettenbrüche.

b) Unter den W-Reihen $\mathfrak{P}_\lambda(x)$ befinden sich zwei verschiedene W^*-Reihen. Dann sind die korrespondierenden C-Kettenbrüche immer periodisch, und ihre Perioden bestehen aus zwei symmetrischen Teilen, von denen einer fehlen kann.

3. Eine W-Schar mit drei paarweise verschiedenen W^*-Reihen gibt es nicht.

§ 6. Beispiele

I. Die Korrespondenzen

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{\sqrt{D(x)}+1}{2} \sim \mathfrak{U}_0(x) = \langle a_1 x^{r_1},\ a_2 x^{r_2}, \ldots\rangle \tag{75}$$

und

$$\sqrt{D(x)} \sim \langle 2\, a_1 x^{r_1},\ a_2 x^{r_2}, \ldots\rangle \tag{76}$$

sind äquivalent. Als korrespondierender Kettenbruch der W_1^*-Reihe $\mathfrak{P}_0(x)$ ist $\mathfrak{U}_0(x)$ entweder nichtperiodisch oder reinperiodisch mit symmetrischer Urperiode. Im letzteren Falle besitzt dann der C-Kettenbruch in (76) eine mit $a_2 x^{r_2}$ beginnende Periode. Gerade dieser Umstand tritt aber im Perronschen Lehrbuch bei der Durchrechnung des einschlägigen Beispiels[12] nicht in Erscheinung. Deshalb werden hier zunächst über die durch

$$\mathfrak{P}_0(x) = \frac{\sqrt{D(x)}+1}{2} \quad \mathit{mit} \tag{77}$$

$$D(x) = 1 + 4\cos\alpha \cdot x - 4\sin^2\alpha \cdot x^2 \ (\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0)$$

---

[12] P II, S. 116 ff.: Zweites Beispiel, speziell Formel (B), S. 118.

erzeugte W-Folge noch einige ergänzende Bemerkungen gemacht und dabei folgende Fälle unterschieden:

$$\text{A)}\ \frac{\alpha}{\pi}\ \textit{irrational}; \qquad \text{B)}\ \frac{\alpha}{\pi}\ \textit{rational}.$$

Im Falle B) sei l die kleinste natürliche Zahl, für welche

$$\sin l\alpha = 0$$

ist. Dadurch ergeben sich die beiden Unterfälle

$$\text{B}_1)\ l\ \textit{ungerade},\ l = 2n + 1; \quad \text{B}_2)\ l\ \textit{gerade},\ l = 2n.$$

Im Falle A) findet man durch vollständige Induktion,[13] mit Gültigkeit für alle ganzrationalen ν:

(78)
$$P_{2\nu} = 1 \mp 2 \sin\alpha \tan\nu\alpha \cdot x, \quad Q_{2\nu} = 2;$$

(79)
$$P_{2\nu+1} = 1 + 2\sin\alpha \tan\nu\alpha \cdot x, \quad Q_{2\nu+1} = 2 - \frac{2\sin^2\alpha}{\cos\nu\alpha\cos(\nu+1)\alpha} \cdot x;$$

(80)
$$a_{2\nu} = \frac{\cos(\nu-1)\alpha}{\cos\nu\alpha}, \quad a_{2\nu+1} = \frac{\cos(\nu+1)\alpha}{\cos\nu\alpha}, \quad r_{2\nu} = r_{2\nu+1} = 1.$$

Hierin ist nach Voraussetzung mit $\nu \neq 0$ immer auch $\sin\nu\alpha \neq 0$, also für kein $\lambda \neq 0$ gleichzeitig $P_\lambda = P_0 = 1$ und $Q_\lambda = Q_0 = 2$; das heißt: Im Falle A) ist der mit $\mathfrak{P}_0(x)$ korrespondierende C-Kettenbruch

(A) $\mathfrak{U}_0(x) =$
$$= \left\langle \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x,\ \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x,\ \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}\cdot x,\ \frac{\cos\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot x,\ \frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha}\cdot x,\ \frac{\cos 2\alpha}{\cos 3\alpha}\cdot x, \dots \right\rangle$$

nicht periodisch.

Die Formeln (78) bis (80) bleiben auch im Falle B_1) noch voll gültig, weil dann niemals $\cos\lambda\alpha = 0$ wird. Aber jetzt liefert (78) mit $\nu = 2n + 1$:

---

[13] Vgl. P II, S. 116, Formeln (13) bis (15).

$$(81)\qquad P_{4n+2} = 1 = P_0, \quad Q_{4n+2} = 2 = Q_0,$$

und offenbar ist $k = 4n + 2$ sogar der kleinste positive Index, für den diese Gleichungen bestehen, also die Gliederzahl der Urperiode von $\mathfrak{U}_0(x)$. Dementsprechend hat man $m = 2n + 1$ zu setzen und findet damit erstens

$$(82)\qquad a_m = a_{m+1} = \frac{\cos(n+1)\alpha}{\cos n\alpha} = (-1)^{\frac{(2n+1)\alpha}{\pi}}$$

und zweitens

$$P_m = 1 + 2\sin\alpha \tan n\alpha \cdot x = 1 - 2\sin\alpha \tan(n+1)\alpha \cdot x = P_{m+1}.$$

Also wird

$$(\mathrm{B}_1)\quad \mathfrak{U}_0(x) =$$

$$= \left\langle \overline{\frac{\cos\alpha}{1}\cdot x, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\cos(n+1)\alpha}{\cos n\alpha}\cdot x, \frac{\cos(n+1)\alpha}{\cos n\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x} \right\rangle,$$

und

$$\mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{P}_{2n+1}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + 1 + 2\sin\alpha \tan n\alpha \cdot x}{2(1 + 2\sin\alpha \tan n\alpha \cdot x)} \quad (\delta_m = 1)$$

ist die zweite der Folge $\{\mathfrak{P}_\lambda(x)\}$ angehörende W^*-Reihe.

Im Falle B_2) endlich sind die Formeln (78) bis (80) nur solange brauchbar, als $\cos\nu\alpha \neq 0$ bleibt, also für $\nu \leqq n - 1$. Dann findet man weiter[14]

(83)
$$P_{2n-1} = 1 + 2\cos\alpha \cdot x, \; Q_{2n-1} = Q_{2n-2} = 2, \; a_{2n-1} = -1, \; r_{2n-1} = 2,$$

schließt aus der letzten dieser Gleichungen, daß diesmal

$$(84)\qquad \mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{P}_{2n-1}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + 1 + 2\cos\alpha \cdot x}{2} \quad (\delta_m = 0)$$

tatsächlich die W^*-Reihe mit kleinstem positivem Index ist, und erhält

---

[14] Vgl. P II, S. 117, Formeln (16) und (17).

$$(\mathrm{B}_2)\quad \mathfrak{U}_0(x) =$$

$$= \overline{\left\langle \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\cos(n-2)\alpha}{\cos(n-1)\alpha}\cdot x, -x^2, \frac{\cos(n-2)\alpha}{\cos(n-1)\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x \right\rangle}$$

mit k- $=(2m-1)$- $=(4n-3)$-gliedriger Urperiode.

Im Perronschen Lehrbuch haben die a_ν der zweiten Periodenhälfte ein anderes Aussehen, so daß die Symmetrie nicht zu Tage tritt, nicht einmal die reine Periodizität. Man kann sie aber, da α im Fall B_1) von der Form $\frac{r\pi}{2n+1}$ und im Fall B_2) von der Form $\frac{(2r+1)\pi}{2n}$ ist, unschwer in die hier gegebene Gestalt überführen.

II. Die W_0^*-Reihe (84) verdient, allgemein untersucht zu werden. Wir setzen also von jetzt ab

$$(85)\qquad \mathfrak{P}_0(x) = \frac{\sqrt{D(x)}+1+2\cos\alpha\cdot x}{2} \quad \textit{mit } D(x) \textit{ aus } (77)$$

und behalten die bisherige Fallunterscheidung bei.

Dann ergeben sich im Falle A) an Stelle von (78) bis (80), mit Gültigkeit für $\nu \geqq 0$, die Gleichungen

$$(86)\qquad P_{2\nu} = 1 + 2\sin\alpha\cot(\nu+1)\alpha\cdot x,\quad Q_{2\nu} = 2;$$

$$(87)\qquad P_{2\nu+1} = 1 - 2\sin\alpha\cot(\nu+1)\alpha\cdot x,\ Q_{2\nu+1} = 2 - \frac{2\sin^2\alpha}{\sin(\nu+1)\alpha\sin(\nu+2)\alpha}\cdot x;$$

$$(88)\qquad a_{2\nu+1} = \frac{\sin(\nu+2)\alpha}{\sin(\nu+1)\alpha},\quad a_{2\nu+2} = \frac{\sin(\nu+1)\alpha}{\sin(\nu+2)\alpha};\ r_{2\nu+1} = r_{2\nu+2} = 1.$$

Dagegen wird

$$(89)\qquad a_0 = -1,\ r_0 = 2,$$

und gelten für alle ganzrationalen λ die Relationen

$$(90)\qquad P_{-\lambda} = P_\lambda,\ Q_{-\lambda} = Q_{\lambda-1},\ a_{-\lambda} = a_\lambda,\ r_{-\lambda} = r_\lambda.$$

Daraus schließt man wieder, daß unter der Voraussetzung A) auch hier der mit $\mathfrak{P}_0(x)$ korrespondierende Kettenbruch

$$(\mathrm{A}') \quad \mathfrak{U}_0(x) = \\ = \left\langle \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot x,\ \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x,\ \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x,\ \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}\cdot x,\ \frac{\sin 4\alpha}{\sin 3\alpha}\cdot x,\ \cdots \right\rangle$$

nichtperiodisch ist.

Im Falle B_1) dagegen versagen die Formeln (87) und (88) außer der ersten für $\nu = 2n-1$, und man findet statt dessen

$$(91)\quad \begin{cases} P_{4n-1} = 1 - 2\sin\alpha\cot 2n\alpha\cdot x = 1 + 2\cos\alpha\cdot x = P_0, \\ Q_{4n-1} = 2 = Q_0, \\ a_{4n-1} = a_0 = -1,\quad r_{4n-1} = r_0 = 2. \end{cases}$$

Für alle positiven $\lambda < 4n-1$ aber wird $r_\lambda = 1$. Daraus schließt man wieder, daß $k = 4n-1$ wirklich die Gliederzahl der Urperiode ist. Demnach hat man $m = 2n-1$ zu setzen und verifiziert

$$(92)\quad \mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{P}_{2n-1}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + 1 - 2\sin\alpha\cot n\alpha\cdot x}{2(1 - 2\sin\alpha\cot n\alpha\cdot x)}\ (\delta_m = 1),$$

$$(93)\quad a_m = a_{2n-1} = \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha} = (-1)^{1+\frac{(2n+1)\alpha}{\pi}},$$

$$(\mathrm{B}_1')\quad \mathfrak{U}_0(x) = \\ = \left\langle \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot x, \overline{\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\cdot x, \frac{\sin(n+1)\alpha}{\sin n\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x, \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot x, -x^2} \right\rangle.$$

Im Falle B_2) endlich folgt aus dem Ergebnis unter I, daß man $m = 2n-2$, $k = 4n-3$ zu setzen hat und erhält

$$\mathfrak{P}_m(x) = \mathfrak{P}_{2n-2}(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + 1}{2}\ (\delta_m = 1),$$

$$(\mathrm{B}_2')\quad \mathfrak{U}_0(x) = \\ = \left\langle \overline{\frac{\cos(n-2)\alpha}{\cos(n-1)\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x, \frac{\cos\alpha}{1}\cdot x, \frac{1}{\cos\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\cos(n-2)\alpha}{\cos(n-1)\alpha}\cdot x, -x^2} \right\rangle,$$

wofür man wegen $\cos n\alpha = 0$ auch schreiben kann

$$(\mathrm{B}_2'')\qquad \mathfrak{U}_0(x) =$$

$$= \left\langle \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot x, \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin n\alpha}\cdot x, \frac{\sin(n-1)\alpha}{\sin n\alpha}\cdot x, \ldots, \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha}\cdot x, \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}\cdot x, -x^2 \right\rangle$$

III. Herr Perron hat auch unter der Voraussetzung

$$D(x) = 1 + d_1 x + d_2 x^2 + d_3 x^3 \qquad (d_1 \neq 0,\ d_3 \neq 0)$$

die mit

$$\frac{\sqrt{D(x)} - 1}{\frac{1}{2} d_1 x}$$

korrespondierenden C-Kettenbrüche in geschlossener Form angegeben,[15] allerdings nur, soweit dieselben regelmäßig[16] sind (d. h. lauter Exponenten $r_\lambda = 1$ haben). Durch diese Beschränkung wird aber gerade die Periodizität ausgeschlossen. Es gilt nämlich allgemein der

Satz 16. *Ist* $D(x) = 1 + d_1 x + \cdots + d_t x^t$ $(t \geqq 1, d_1 \neq 0, d_t \neq 0)$ *und der mit*

$$(94)\qquad \mathfrak{P}_0(x) = \frac{\sqrt{D(x)} - 1}{\frac{1}{2} d_1 x}$$

korrespondierende C-Kettenbruch $\mathfrak{U}_0(x)$ *unendlich, so kann er nicht gleichzeitig regelmäßig und periodisch sein.*

Zum Beweis setzen wir $\mathfrak{U}_0(x)$ als regelmäßig voraus:

$$(95)\qquad \mathfrak{U}_0(x) = \langle a_1 x, a_2 x, \ldots\rangle \qquad (a_\lambda \neq 0 \text{ für } \lambda = 1, 2, \ldots).$$

Dann bestehen die Beziehungen (mit $d_2 = 0$, wenn $t = 1$)

---

[15] O. Perron, *Herleitung des mit $\sqrt{D(x)}$ korrespondierenden Kettenbruches, wenn $D(x)$ ein Polynom dritten Grades ist.* Sitz.-Ber. d. Heidelberger Akad. d. Wiss. 1916.

[16] P II, § 23, S. 119 ff.

$$(96)\qquad \begin{cases} \mathfrak{P}_0(x) = 1 + \dfrac{a_1 x}{\mathfrak{P}_1(x)}, \quad a_1 = \dfrac{4d_2 - d_1^2}{4d_1} \neq 0, \\[2ex] \mathfrak{P}_1(x) = \dfrac{\sqrt{D(x)} + 1 + \frac{1}{2} d_1 x}{2 + \frac{8}{4d_2 - d_1^2}(d_3 x + \cdots + d_t x^{t-2})}, \end{cases}$$

wobei im Nenner von $\mathfrak{P}_1(x)$ der zweite Summand wegfällt, wenn $t \leqq 2$ ist. Setzt man nun

$$(97)\qquad \frac{\sqrt{D(x)} + 1 - \frac{1}{2} d_1 x}{2} = \overline{\mathfrak{P}}_0(x), \qquad \frac{4d_2 - d_1^2}{16} = \bar{a}_1,$$

so ist $\bar{a}_1 = \dfrac{a_1 d_1}{4} \neq 0$ und

$$(98)\qquad \overline{\mathfrak{P}}_0(x) = 1 + \frac{\bar{a}_1 x^2}{\mathfrak{P}_1(x)}$$

mit $\mathfrak{P}_1(x)$ aus (96). Aus (95), (96) und (98) folgt jetzt

$$(99)\qquad \overline{\mathfrak{P}}_0(x) \sim \overline{\mathfrak{U}}_0(x) = \langle \bar{a}_1 x^2, a_2 x, a_3 x, \ldots \rangle.$$

Wäre nun $\mathfrak{U}_0(x)$ periodisch, so müßte $\overline{\mathfrak{U}}_0(x)$ als korrespondierender Kettenbruch der W-Reihe $\overline{\mathfrak{P}}_0(x)$ reinperiodisch, also in (99), und damit auch in (95) ein späterer Teilzähler wieder gleich $\bar{a}_1 x^2$ sein. Das ist aber mit der Voraussetzung, daß $\mathfrak{U}_0(x)$ regelmäßig sei, unvereinbar.

Setzt man in (94) $D(x)$ aus (77) ein, so erhält man

$$\mathfrak{P}_1(x) = \frac{\sqrt{D(x)} + 1 + 2\cos\alpha \cdot x}{2},$$

also die in (85) mit $\mathfrak{P}_0(x)$ bezeichnete Potenzreihe, die daher zur Illustration von Satz 16 dienen kann. In der Tat wird ihr korrespondierender C-Kettenbruch im Falle A) regelmäßig, aber nicht periodisch, in den Fällen B) periodisch, aber nicht regelmäßig.

Dagegen kann der mit $\dfrac{\sqrt{D(x)} + 1}{2}$ (bzw. $\sqrt{D(x)}$) korrespondierende C-Kettenbruch sehr wohl gleichzeitig regelmäßig und periodisch sein, wie die Korrespondenz

$$\frac{\sqrt{1+4ax}+1}{2} \sim \langle\overline{ax}\rangle \qquad (a \neq 0)$$

und, weniger trivial, der Fall B_1) des in Abschnitt I dieses Paragraphen behandelten Beispiels lehrt. Ob aber diese Möglichkeit auch besteht, wenn $D(x)$ ein Polynom dritten Grades ist, dürfte sich auf Grund der in Fußnote 15 zitierten Arbeit allein, ohne einen gewissen Aufwand an zusätzlichen Untersuchungen, kaum entscheiden lassen.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1960

Band/Volume: 1959

Autor(en)/Author(s): Steuerwald Rudolf

Artikel/Article: Unendliche C-Kettenbrüche, deren korrespondierende Potenzreihe einer quadratischen Gleichung genügt 219-250