BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planeten vom Hecuba-Typus

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 11. November 1960

Die folgenden Untersuchungen über den Hecuba-Typus bilden eine Erweiterung meiner Untersuchungen zur Bewegungstheorie nahezu kommensurabler Bewegungen im Falle des Hestia-Typus, wie sie in diesen Sitzungsberichten 1959, S. 61 bis 101 unter dem Titel: „Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems" publiziert worden sind. Der damals behandelte Fall ist der leichtere, weil die mittlere Bewegung des Planetoiden zu der des großen Planeten Jupiter als störendem Körper näherungsweise im Verhältnis 3 : 1 steht, im Falle des Hecuba-Typus aber im Verhältnis 2:1, so daß die infolge der genäherten Kommensurabilität kritisch werdenden Glieder beim Hecuba-Typus größere Störungen der Elemente als beim Hestia-Typus hervorbringen, da die kritischen Terme der Störungsfunktion im ersteren Falle schon bei den Termen 1. Grades, beim Hestia-Typus erst bei den Termen 2. Grades der Exzentrizität beginnen, so daß die theoretischen Schwierigkeiten beim Hecuba-Typus größer sind, das Problem dadurch aber reizvoller wird.

Überraschend ist zunächst die statistische Tatsache, daß die Anzahl N der Planetoiden des Hecuba-Typus, d. h. derjenigen, deren mittlere Bewegung n bis zu $50''$ beiderseits der Lückenmitte $n = 600''$ gelegen ist, nach einer Abzählung in den Veröffentlichungen Nr. I des Astronomischen Rechen-Instituts zu Heidelberg (1949) nach der Bearbeitung von W. Strobel, ergibt: $N = 313$ Planetoiden, also rund 20% der Gesamtzahl von 1564 Planetoiden des Kataloges, während dem Hestia-Typus, wo $n = 900''$, nur 12% der Gesamtzahl der Planetoiden entspricht. Zuerst wollen wir nun die lückennächsten, d. h. die zwischen den mittleren Bewegungen $n = 590''$ und $n = 610''$ befindlichen Planetoiden in bezug auf ihre Elemente fixieren, und zwar in der folgenden Tabelle, wobei noch die mittlere Bewegung des störenden Körpers, des großen Planeten Jupiter, mit $n = 299''.13$ fixiert ist, und wo die 1. Kolonne die Katalog-Nr. der Planetoiden, die 2. die mittlere Bewegung n, die 3. den Exzentrizitäts-Winkel φ, die 4. die halbe große Achse, die 5. die Bahnneigung i zur Ekliptik und die 6. die Länge des aufsteigenden Knotens Ω fixiert:

Nr.	n	φ	a	i	Ω
175	609″.244	10°.800	3.2370	3°.208	24°.301
530	610.371	10.898	3.2330	8.449	129.570
756	609.345	6.564	3.2367	19.955	209.108
781	607.212	4.516	3.2442	18.915	140.085
892	609.064	3.854	3.2376	21.416	176.430
903	606.814	2.617	3.2456	11.958	160.474
1101	602.232	9.078	3.2621	17.564	202.883
1125	609.427	12.422	3.2364	2.773	87.140
1362	596.117	19.838	3.2844	24.160	121.558

Bei dem jüngsten lückennächsten Planetoiden Nr. 1362 der Hecuba-Gruppe liegt, wie aus der Tabelle hervorgeht, die mittlere Bewegung $n = 596''.117$ noch $2''.14$ außerhalb der Kommensurabilitätsgrenze, d. h. $2n' = 598''.26$. Weiter ist an diesem Planetoiden auffällig, daß der Exzentrizitätswinkel wie auch die Bahnneigung beträchtliche Maxima gegenüber den entsprechenden Beträgen bei den anderen Planetoiden der Tabelle aufweisen, als wenn ein Zusammenhang zwischen der Kommensurabilitätsnähe und der Exzentrizität und Bahnneigung bestehen könnte. Hierauf ist noch keine Antwort möglich, zumal, wie die Beträge von φ und i bei den anderen Planetoiden der Tabelle zeigen, starke Schwankungen von φ und i bei den übrigen Planetoiden der Tabelle auftreten, wenn auch die Höchstbeträge von φ und i beim lückennächsten Planetoiden Nr. 1362 auftreten. Machen wir, die oben behandelten Grenzen der mittleren Bewegungen zwischen $n = 590''$ und $n = 610''$ nach außen überschreitend, indem wir die Planetoiden zwischen $n = 580''$—$590''$

und andererseits zwischen $n = 610'' - 620''$ in bezug auf die Größe von φ und i untersuchen, so zeigt sich, daß der Planetoid Nr. 525 bei einer mittleren Bewegung von $n = 581''.342$ die folgenden Beträge von φ und i aufweist: $\varphi = 21^\circ.778$ und $i = 3^\circ.248$, also eine große Exzentrizität neben einer kleinen Neigung, die nur der entsprechenden Epoche entspricht, sonst groß werden könnte, was zu untersuchen wäre. Indem daraufhin alle Planetoiden mit $i > 20^\circ$ aufgesucht wurden, um zu prüfen, inwieweit die letztgenannte große Neigung einen Sonderwert der Hecuba-Gruppe bedeutet, wurden alle Planeten im Kataloge aufgesucht, bei denen $i \geqq 20^\circ$, was danach bei 103 Planetoiden, d. h. 7% aller Planetoiden, zutrifft. Deshalb muß aber die große Bahnneigung des zur Hecuba-Gruppe gehörigen Planetoiden Nr. 1362 Griqua noch nicht durch große Störungen allein hervorgebracht sein, nur die exakte Untersuchung der Bewegung dieses auffälligen Planetoiden kann die gestellte Frage entscheiden, wenn auch die stärkst genäherte Kommensurabilität der mittleren Bewegung große Störungen erwarten läßt. Demgegenüber ist auffallend, daß ein anderer Planet der Hecuba-Gruppe, Nr. 892 (Seeligeria) der obigen Tabelle bei einer mittleren Bewegung $n = 609.06$, so daß $n - 2n' = +10''.2$, also in weiterer Entfernung von der der Kommensurabilitätsstelle, doch eine große Bahnneigung $i = 21^\circ.416$ aufweist, während bei dem großen Abstande von der Kommensurabilitätsstelle weit weniger Einfluß auf die Neigung zu erwarten wäre.

Nach dieser statistischen Prüfung des Beobachtungsmaterials wollen wir nun zur theoretischen Untersuchung der Bewegung der Planetoiden der Hecuba-Gruppe übergehen. Die Theorie soll als Ziel einen einfachen Einblick in die notwendige Behandlung des Problems vermitteln, auf deren Basis eine Endlösung aufgebaut werden kann.

§ 1. Die Differentialgleichungen und ihre Integration

Verhalten sich die mittlere Bewegung n des Planetoiden und n' des großen Planeten Jupiter nahezu wie zwei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, so daß allgemein $n : n' = (p + 1) : p$, wo im Falle des Hekuba-Problems $p = 1$ ist, so sind die auf dieser Kommensurabilität beruhenden periodischen Terme der Störungsfunktion im Hauptteil der Störungsfunktion vom Grade $(p + 1) - p = 1$ in der Exzentrizität e, ferner im Nebenteil derselben Funktion vom Grade $(p + 1) + p - 2 = 2p - 1$, also im Spezialfalle der Hecuba-Gruppe vom selben Grade 1 wie im Hauptteil der Störungsfunktion, aber jetzt in e', der Exzentrizität des Jupiter, multipliziert, so daß bei vorausgesetzter Kreisbahn des Planeten Jupiter der entsprechende kritische Term der Störungsfunktion wegfällt. Folglich lautet alsdann die Störungsfunktion des Problems in unserem Falle folgendermaßen, mit Einschluß der Säkularglieder:

$$R = N_0 + N_1 \cdot e^2 + N_2 \cdot e \cdot \cos\zeta + N_3 e^2 \cdot \cos 2\zeta, \tag{1}$$

wo das Argument ζ den kritischen Librationswinkel, der fixierten Kommensurabilität entsprechend, bedeutet, definiert durch die folgende Formel:

$$\zeta = 2 \cdot l' - l - \bar{\omega}, \tag{1 a}$$

wo l und l' die mittleren Längen des Planeten und Jupiters, ferner $\bar{\omega}$ die Perihellänge des Planetoiden bezeichnen. Die Koeffizienten lauten, ausgedrückt durch die Laplaceschen Koeffizienten A_p^i und B_p^i auf Grund der Entwicklung der Störungsfunktion in der Laplace-Le Verrierschen Form (s. Tisserands „Traité de Mécanique Céleste" oder Bd. 10 der Annalen der Pariser Sternwarte):

$$\left\{\begin{aligned} & N_0 = \frac{1}{2} m' A^0, \; N_1 = \frac{1}{8} m' B^1, \quad N_2 = -2m' \left(A_0^2 + \frac{1}{4} A_1^2\right) \\ & N_3 = \frac{1}{4} m' (22 A^4 + 7 A_1^4 + A_2^4), \end{aligned}\right. \tag{2}$$

wo zur Vereinfachung die Gaußsche Konstante $k^2 = 1$ gesetzt wurde, womit die Zeiteinheit $\frac{1}{k} = 58.1325$ mittl. Tagen entspricht.

Die 4 Variablen unseres zunächst ebenen Problems: a = halbe große Achse, e = Exzentrizität, ζ, wie oben schon definiert, und

$\bar{\omega}$ = Perihellänge des gestörten Körpers, unterliegen dann den folgenden Differentialgleichungen, wenn R (1) die Störungsfunktion fixiert:

$$
(3)\quad \begin{cases}
\dfrac{d(\sqrt{a})}{dt} = \dfrac{\partial R}{\partial l} \\[2ex]
\dfrac{de}{dt} = -\dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left[\dfrac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\dfrac{\partial R}{\partial l}\right] \\[2ex]
\dfrac{d\zeta}{dt} = (p+1)n' - p\cdot n + 2p\sqrt{a}\cdot\dfrac{\partial R}{\partial a} - \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(p+1-p\sqrt{1-e^2}\right)\dfrac{\partial R}{\partial e} \\[2ex]
\dfrac{d\bar{\omega}}{dt} = \dfrac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}} \cdot \dfrac{\partial R}{\partial e}.
\end{cases}
$$

Zunächst ergibt sich nach den beiden ersten Gleichungen von (3), indem im Hecuba-Falle aus der Beziehung $\zeta = 2l' - l - \bar{\omega}$ unmittelbar die weitere Beziehung folgt: (3′) $\dfrac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \dfrac{\partial R}{\partial l} = = \dfrac{d(\sqrt{a})}{dt}$, nach (3). Bei Substitution dieser Beziehung in die 2. Gleichung von (3) geht diese unmittelbar in die folgende über, zwischen a und e: (3a):

$$
(3\,\mathrm{a})\qquad \frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left\{\frac{d(\sqrt{a})}{dt} + \left(1-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{d(\sqrt{a})}{dt}\right\},
$$

folglich entsteht, da der Faktor $\dfrac{e}{\sqrt{1-e^2}}\cdot de = -d(\sqrt{1-e^2}$ bei Substitution in (3a) die neue Beziehung:

$$
\sqrt{a}\,\frac{d(\sqrt{1-e^2})}{dt} = \frac{d(\sqrt{a})}{dt}\left(2-\sqrt{1-e^2}\right),
$$

der wir die weitere Form geben wollen:

$$
2\cdot\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = \sqrt{a}\,\frac{d(\sqrt{1-e^2})}{dt} + \sqrt{1-e^2}\,\frac{d(\sqrt{a})}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sqrt{a(1-e^2)}\right),
$$

so daß sich also bei unmittelbarer Integration das Integral ergibt:

$$
(4)\qquad 2\sqrt{a} = \sqrt{a(1-e^2)} + \text{const.};
$$

da nun unmittelbar die Differenz $2\sqrt{a}-\sqrt{a(1-e^2)} > 0$ ist, so muß die const. des Integrals stets >0 sein, solange $e < 1$ ist, so daß wir const. $= \sqrt{a_*}$ setzen dürfen, wo $a_* > 0$ ist. Im allgemeinen Falle ergibt sich, da alsdann $\frac{n}{n'} = \frac{p+1}{p}$, das allgemeine Integral (4a) $\left(\frac{1}{p}+1\right)\sqrt{a} = \sqrt{a(1-e^2)} +$ const., wo wieder analog: const. $= \sqrt{a_*}$ und $\sqrt{a}$ als Potenzreihe nach e entwickelt werden kann. In unserem Spezialfalle des Hecuba-Typus $p = 1$ ergibt sich bei Potenzentwicklung nach e in (4a) die Reihe:

$$\sqrt{a} = \sqrt{a_*}\left(1-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}e^4+\cdots\right), \tag{5}$$

woraus als entsprechende Darstellung der mittleren Bewegung n folgt:

$$n = \frac{K}{a^{3/2}} = n_*\left(1+\frac{3}{2}e^2+\frac{9}{8}e^4+\cdots\right), \text{ wo } n^* = \frac{K}{a_*^{3/2}}. \tag{5a}$$

Nach der Diskussion des Integrals (4) auf Grund der beiden ersten Gleichungen von (3) sind jetzt die Differentialgleichungen (3) weiter zu diskutieren, um nach weiteren Integralen zu suchen. Deshalb wollen wir zuerst die 2. Gleichung von (3) auf die folgende Form bringen, unter der Voraussetzung, daß nach (3'): $\frac{\partial R}{\partial \bar{\omega}} = \frac{\partial R}{l}$, so daß

$$\frac{de}{dt} = -\frac{\sqrt{1-e^2}}{e\sqrt{a}}\left(2-\sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial l}, \tag{6}$$

wo nach (1):

$$\frac{\partial R}{\partial l} = \varepsilon_1 e \sin\zeta + \varepsilon_2 e^2 \sin 2\zeta, \tag{7}$$

wo die Koeffizienten:

$$\varepsilon_1 = \frac{N_2}{\sqrt{a}}, \quad \varepsilon_2 = 2\frac{N_3}{\sqrt{a}} \tag{8}$$

von a_* abhängig sind, so daß schließlich:

$$\frac{de}{dt} = \varepsilon_1 \sin\zeta + \varepsilon_2 e \sin 2\zeta. \tag{9}$$

Weiter ist nun nach Definition von $\zeta = 2l' - l - \bar{\omega}$:

$$\frac{d\zeta}{dt} = 2n' - \frac{dl}{dt} - \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \text{ oder, da } l = \varepsilon + \int n \cdot dt:$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = 2n' - n - \frac{d\varepsilon}{dt} - \frac{d\bar{\omega}}{dt}, \tag{10}$$

wo n in (5a) als Funktion von a resp. a_* und e definiert ist. Der Darstellung von $\frac{d\varepsilon}{dt}$ und $\frac{d\bar{\omega}}{dt}$ liegen die beiden folgenden Gleichungen nach Tisserands Mécanique Céleste I, pag. 169 zugrunde:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{d\varepsilon}{dt} &= -\frac{2}{na}\frac{\partial R}{\partial a} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e}\left(1 - \sqrt{1-e^2}\right)\frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{d\bar{\omega}}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}, \end{aligned}\right. \tag{11}$$

so daß folglich die Differentialgleichung für $\frac{d\zeta}{dt}$ die folgende Form erhält:

$$\frac{d\zeta}{dt} = z_0 + z_1 \cdot e^2 + \left(z_2 e + \frac{z_3}{e}\right)\cos\zeta + (z_4 + z_5 \cdot e^2)\cos 2\zeta, \tag{12}$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\left\{\begin{aligned} z_0 &= 2n' - n - \frac{2}{\sqrt{a}}N_1 + \frac{2}{na}\frac{\partial N_0}{\partial a} & z_3 &= -\frac{1}{\sqrt{a}}N_2 \\ z_1 &= -\frac{3}{2}n + \frac{2}{n \cdot a}\frac{\partial N_1}{\partial a} & z_4 &= -\frac{2}{\sqrt{a}}N_3 \\ z_2 &= \frac{2}{na}\frac{\partial N_2}{\partial a} & z_5 &= \frac{2}{na}\frac{\partial N_3}{\partial a} \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

wo nun noch die von a resp. a_* abhängigen Funktionen N_i nebst ihren Ableitungen nach a noch nach Potenzen von e zu entwickeln sind, wobei $\sqrt{a}$ nach (5) nach Potenzen von e entwickelt ist. Man erhält die folgenden Darstellungen:

$$-\frac{2}{\sqrt{a}}N_1 = -\frac{2}{\sqrt{a_*}}\left[N_1(a_*) + e^2\left(\frac{1}{2}N_1(a_*) - a_* N_1'(a_*)\right)\right], \tag{13a}$$

wo

$$N_1'(a^*) = \left(\frac{\partial N_1(a)}{\partial a}\right)_{a_*}. \tag{13b}$$

Analog wird in (13) im letzten Term von z_0:

$$(14)\quad \frac{2}{na}\cdot\frac{\partial N_0}{\partial a} = 2\sqrt{a_*}\left\{\frac{\partial N_0(a_*)}{\partial a_*} - e^2\left(a_*\frac{\partial^2 N_0(a_*)}{\partial a_*^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial N_0(a_*)}{\partial a_*}\right)\right\},$$

wobei n in z_0 in (13) als Funktion von n_* und e fixiert ist. Der 2. Term in (12): $z_1 e^2$ benötigt, weil schon vom 2. Grade in e, keine weitere Entwicklung, so daß nur formell zu setzen ist

$$(15)\qquad z_1 = -\frac{3}{2}n_* + \frac{2}{n_*\cdot a_*}\cdot\frac{\partial N_1(a_*)}{\partial a_*}.$$

Weiter ist im nächsten Term von (12) mit $\cos\zeta$ als gemeinsamem Faktor der erste Term $z_2 e$ nicht zu ergänzen, weil der Zusatzterm mit e^3 als Faktor wegfällt, so daß:

$$(15\,b)\qquad z_2 = 2\sqrt{a_*}\,\frac{\partial N_2{}^*}{\partial a_*}.$$

Dagegen ist in der Formel (12) der Faktor $\frac{z_3}{e} = -\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}N_2$ zu transformieren und zu entwickeln in bezug auf die Faktoren $\frac{1}{\sqrt{a}}$ und N_2 nach Potenzen von e, mindestens bis e^2. Aus der obigen Entwicklung (5) von $\sqrt{a}$ nach e folgt zuerst: $\frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{1}{\sqrt{a_*}}\cdot$ $\cdot\left(1+\frac{1}{2}e^2+\cdots\right)$ und ferner: $N_2(a) = N_2(a_*) - a_*\cdot e^2\left(\frac{\partial N_2}{\partial a}\right)_*$, so daß in bezug auf die weiteren Koeffizienten z_3, z_4, z_5 von (12) folgt:

$$\begin{aligned}
\frac{z_3}{e} &= -\frac{1}{e\sqrt{a_*}}\left\{N_2(a_*) + e^2\left[\frac{1}{2}N_2(a_*) - a_*\left(\frac{\partial N_2}{\partial a}\right)_*\right]\right\}\\
(16)\qquad z_4 &= -\frac{2}{\sqrt{a_*}}\left\{N_3(a_*) + e^2\left[\frac{1}{2}N_3(a_*) - a_*\left(\frac{\partial N_3}{\partial a}\right)_*\right]\right\}\\
z_5 &= 2\sqrt{a_*}\left(\frac{\partial N_3}{\partial a}\right)_*.
\end{aligned}$$

Damit ist die Darstellung von (12) für $\frac{d\zeta}{dt}$ als Funktion von a, e und ζ beendet, Es verbleiben deshalb zur Integration die beiden Differentialgleichungen (9) und (12) in bezug auf e und ζ, nachdem, wie oben gezeigt, bereits a eine Funktion von e ist.

Würden wir zur Erlangung eines ersten Überblicks über die Form der Lösung in bezug auf e und ζ auf den rechten Seiten der Differentialgleichungen (9) und (12) in $\frac{de}{dt}$ und $\frac{d\zeta}{dt}$ auf alle Potenzen von e verzichten, so ergeben sich die beiden folgenden Differentialgleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{de}{dt} &= \varepsilon_1 \sin\zeta \\ \frac{e\,d\zeta}{dt} &= z_3 \cos\zeta \end{aligned} \right\}, \tag{17}$$

so daß also bei Elimination der Zeit t die Differentialgleichung entsteht:

$$\frac{d\ln e}{d\zeta} = f \cdot \operatorname{tg}\zeta, \tag{17a}$$

wo $f = \frac{\varepsilon_1}{z_3} = -1$, also bei Integration

$$\ln e = -f \ln(\cos\zeta) + C, \tag{17b}$$

wo $C =$ Integrationskonstante.

Man kann dieser Gleichung auch unmittelbar die folgende Form geben:

$$e(\cos\zeta)f = E^C = C', \tag{17c}$$

so daß also noch bei Substitution von $f = -1$ gesetzt werden kann: $e = C' \cdot \cos\zeta$, so daß, wenn bei $t = 0$: ζ im 1. oder 4. Quadranten liegt: $C' > 0$, während, wenn ζ im 2. oder 3. Quadranten liegt: $C' < 0$ sein muß, und die Schwingungen von ζ also entweder um $\zeta = 0°$ oder $\zeta = 18°$ herum erfolgen müssen.

Kehren wir jetzt zur Vervollständigung der Integration der Differentialgleichungen (9) und (12) zurück, so ergibt sich zuerst bei Elimination von t mittels Division der beiden Differentialgleichungen (12) und (9) unter Elimination der Zeit t:

$$e\frac{d\zeta}{de} = \frac{z_0 e + z_3 \cos\zeta + z_4 e \cos 2\zeta}{\varepsilon_1 \sin\zeta + \varepsilon_2 \cdot e \sin 2\zeta}, \tag{18}$$

wobei im Zähler die Terme 2. und 3. Grades in e, also $z_1 \cdot e^3$, $z_2 \cdot e^2$ und $z_5 \cdot e^3$ weggelassen wurden. Beim Transport des gemeinsamen Faktors $\sin\zeta$ im Nenner der rechten Seite auf die linke Seite ergibt sich dann die folgende neue Gleichung:

$$(19)\qquad e\sin\zeta\frac{d\zeta}{de}=\frac{z_0\cdot e+z_3\cos\zeta+z_4\,e\cos 2\zeta}{\varepsilon_1+2\,e\,\varepsilon_2\cos\zeta}\,.$$

Bringen wir diese Gleichung durch die Substitution von $\cos\zeta=y$, also $\cos 2\zeta=2y^2-1$ auf eine rein algebraische Form, so erhalten wir die neue Gleichung:

$$(19\text{a})\qquad -e\frac{dy}{de}=-2e^2\frac{dy}{d(e^2)}=\frac{z_0 e+z_3 y+z_4(2y^2-1)}{\varepsilon_1+2\,e\,\varepsilon_2 y}\,.$$

Entwickeln wir nun die rechte Seite von (19a) in bezug auf den Nenner nach Potenzen von e, wobei zu beachten ist, daß nach (8) das Verhältnis $\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}=2\frac{N_3}{N_2}$ also von der Größenordnung 1 zu betrachten ist, so folgt, wenn schließlich noch $e^2=x$ und $\cos\zeta=y$ gesetzt wird, die neue Differentialgleichung:

$$(19\text{b})\qquad \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2x\varepsilon_1}\left\{\beta_0(x)+\beta_1(x)y+\beta_2(x)y^2\right\},$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung haben:

$$\beta_0(x)=(z_0-z_4)\cdot\sqrt{x},\quad \beta_1(x)=z_3,\quad \beta_2(x)=2\sqrt{x}\left(z_4-z_3\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)$$

oder endlich in allgemeiner Form:

$$(20)\qquad \frac{dy}{dx}=a_0(x)+a_1(x)y+a_2(x)y^2,$$

wo die Koeffizienten explizit die folgende Bedeutung haben:

$$(21\text{a})\qquad \begin{cases} a_0(x)=-\dfrac{1}{2\varepsilon_1}(z_0-z_4)\dfrac{1}{\sqrt{x}},\quad a_1(x)=-\dfrac{1}{2}\dfrac{z_3}{\varepsilon_1}\cdot\dfrac{1}{x}\\[2ex] a_2(x)=-\dfrac{z_4-z_3\dfrac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,.\end{cases}$$

Unsere Grundgleichung (20) hat also überraschenderweise die typische Form der klassischen allgemeinen Riccatischen Differentialgleichung, wie sie sich bereits in meiner vorhergehenden

Abhandlung „Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems" in den „Sitzungsberichten der Bayerischen Akademie der Wissenschaften", 1959, S. 61–101, im Falle des dort behandelten Hestia-Problems, wo $n : n'$ nahezu $= 3 : 1$ ist, als Grundgleichung des Problems präsentierte. Hervorzuheben ist, daß der variable Parameter $x = e^2$ vom 2. Grade der an sich als klein angenommenen Exzentrizität ist, die selbst nur wenige Zehntel beträgt, während $y = \cos\zeta$ absolut jeden Wert $\leqq 1$ annehmen kann.

Vor der Lösung der Differentialgleichung (20) wollen wir noch die Koeffizienten in dieser Gleichung nochmals umformen, indem wir $e = \sqrt{x} = \xi$ einführen, so daß die Koeffizienten damit die folgende Form erhalten: $a_0(x) = -\frac{1}{2\varepsilon_1}(z_0 - z_4)\frac{1}{\xi}$,

$a_1(x) = -\frac{1}{2}\frac{z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\xi^2}$

(21 b) $$a_2(x) = -\frac{z_4 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\cdot z_3}{\varepsilon_1}\cdot\frac{1}{\xi}.$$

Weiter ersetzen wir y durch:

(22) $y = \cos\zeta = \delta_0 + \eta$, wo $\delta_0 = \text{const.} = \cos\zeta_0$ für $t = 0$,

in welchem Moment $\eta = \eta_0 = 0$.

Die Einführung der neuen Variablen ξ, η bedingt den Übergang der Differentialgleichung (20) auf die folgende neue Form, indem noch $\frac{dy}{dx} = \frac{d\eta}{d\xi}\cdot\frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{2\xi}\cdot\frac{d\eta}{d\xi}$, so daß:

(23) $$\frac{d\eta}{d\xi} = 2\xi[a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2],$$

wo die Koeffizienten a_i bereits durch (21 b) als Funktionen von ξ dargestellt sind. Da die Faktoren $\xi a_0(x)$ und $\xi a_2(x)$ | nach (21 b) frei vom Faktor ξ sind, während $\xi\cdot a_1$ noch den Nenner ξ enthält, so geht die Gleichung (23) nach Multiplikation mit dem Faktor ξ in die folgende rechts vom Nenner ξ freie Gleichung über:

(24) $$\xi\frac{d\eta}{d\xi} = k_0 + k_1\xi + k_2\eta + k_3\xi\eta + k\,\xi\eta^2,$$

wo die Koeffizienten die folgende Bedeutung erhalten:

$$(25)\qquad k_0 = \frac{z_3}{\varepsilon_1}\,\delta_0\,,\quad k_1 = -\frac{1}{\varepsilon_1}(z_0 - z_1) - 2\,\frac{z_4 - z_3\,\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}\,\delta_0^2\,,$$

$$k_2 = -\frac{z_3}{\varepsilon_1}\,,\quad k_3 = -4\,\frac{z_4 - z_3\,\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\varepsilon_1}\cdot\delta_0\,,\quad k_4 = -2\,\frac{z_4 - z_3\,\frac{\varepsilon_2}{z_1}}{\varepsilon_1}\,,$$

wo also alle Koeffizienten von der Ordnung σ der störenden Masse sind.

Man kann nun die obige Differentialgleichung (24) in die typische Form der Briot-Bouquetschen Differentialgleichung überführen, wenn man den konstanten Term k_0 in (24) durch die Substitution: $k_0 + k_2\eta = y$ eliminiert und von nun ab $\xi = e = x$ genannt werden soll,so daß alsdann die neue Differentialgleichung folgendermaßen lautet:

$$(27)\qquad x\frac{dy}{dx} = l_1\cdot x + l_2\cdot y + l_3 x\cdot y + l_4\, x\cdot y^2,$$

wobei die neuen Koeffizienten l_i als Funktionen der k_i die folgende Bedeutung haben:

$$(27\text{a})\qquad \begin{aligned} l_1 &= k_1\cdot k_2 - k_0\cdot k_3 + \frac{k_4}{k_2}\cdot k_0^2\,,\quad l_2 = k_2 = -\frac{z_3}{z_1}\\ l_3 &= k_3 - 2\,\frac{k_4}{k_3}\cdot k_0\,,\quad l_4 = \frac{k_4^2}{k_2}\,. \end{aligned}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (27) ist dann nach Briot-Bouquet im allgemeinen Falle eine gewöhnliche homogene Potenzreihe von y nach x:

$$(28)\qquad y = \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots,$$

wobei die Koeffizienten δ_i nach Substitution von (28) in (27) unter Vergleich der Koeffizienten gleich hoher Potenz erhalten werden. Die Lösung (28) unterliegt aber noch der von Briot-Bouquet formulierten Bedingung, daß der Koeffizient l_2 keine positive ganze Zahl sein darf, da sonst die Lösung einen Pol erhielte. In unserem Problem hier ist nun, wie aus der Bedeutung der Koeffizienten folgt:

$$(29)\qquad l_2 = k_2 = -\frac{z_3}{\varepsilon_1}\,,$$

oder da nach (8) $\varepsilon_1 = \frac{N_2}{\sqrt{a}}$ und nach (13): $z_3 = -\frac{1}{\sqrt{a}} N_2$, folgt: $l_2 = k_2 = +1$, so daß also in unserem Spezialfalle die Differentialgleichung (27) keine Potenzentwicklung nach x zuläßt und deshalb ein anderer Weg zur Darstellung von $y = \cos\zeta$ als Funktion von $x = e$ gesucht werden muß.

Der natürliche Weg zur Darstellung von y als Funktion von x ist der, y um den Punkt $x = x_0$, $y = y_0$ zur Zeit $t = 0$ nach dem Taylorschen Satz in eine Potenzreihe nach $x - x_0$ zu entwickeln, so daß

$$(30) \qquad y - y_0 = (x - x_0)\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{(x-x_0)^2}{2\,!}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 + \cdots,$$

wobei wir, wie oben mit der 2. Potenz von $x - x_0$, abbrechen, und die Koeffizienten nach (27) die folgende Bedeutung haben:

$$(31) \begin{cases} \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = l_1 + l_2 \frac{y_0}{x_0} + l_3 y_0 + l_4\, y_0^2; \\ \text{analog lautet die 2. Ableitung:} \\ \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = l_2 \cdot \left(\frac{x\frac{dy}{dx} - y}{x^2}\right)_0 + l_3\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + 2\,l_4 \cdot y_0 \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \end{cases}$$

wo alle Funktionen auf der rechten Seite für $t = 0$ als Funktionen von x_0 und y_0 bekannt sind, so daß zur Berechnung von $y = \cos\zeta$ als Funktion von t noch die Kenntnis von $x = e$ als Funktion der Zeit darzustellen bleibt.

Auf Grund der Darstellung von $\frac{de}{dt}$ durch die Gleichung (9) ergibt sich die neue Darstellung:

$$(32) \qquad \frac{de}{dt} = (\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2 \cdot e\cos\zeta)\sin\zeta.$$

Nachdem nun bereits nach (30) $y = \cos\zeta$ als Funktion von $x = e$ dargestellt worden ist, so daß

$$(33) \qquad \cos\zeta = f_0 + f_1 e + f_2 e^2,$$

wo:

$$(34) \begin{cases} f_0 = y_0 - x_0\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 + \frac{1}{2}x_0^2, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \\ \text{ferner:} \quad f_1 = \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 - x_0\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \quad f_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \end{cases}$$

wobei die Ableitungen $\left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ und $\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0$ bereits in (31) als Funktionen von $l_1, l_2, l_3, x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0$ definiert worden sind, bilden wir weiter die Funktion $\sin\zeta$ in Anschluß an die Darstellung von $\cos\zeta$, so daß

$$\sin\zeta = f_0' + f_1' e + f_2' e^2 + \cdots, \tag{35}$$

wo die Koeffizienten f_i' die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} f_0' &= 1 - \tfrac{1}{2} f_0^2 - \tfrac{1}{8} f_0^4 + \cdots, \quad f_1' = -f_0 f_1 \left(1 + \tfrac{1}{2} f_0^2\right) \\ f_2' &= -\tfrac{1}{2}(f_1^2 + 2 f_0 f_2) - \tfrac{3}{2} f_0^2 \cdot f_1^2. \end{aligned} \tag{35a}$$

Durch die Substitution von $\cos\zeta$ und $\sin\zeta$ nach den Darstellungen in (33) und (35) als Funktion von e in die Differentialgleichung (32) für $\frac{de}{dt}$ geht diese Gleichung in eine Potenzreihe nach e über, so daß nach Integration dieser Gleichung die Exzentrizität e als Funktion der Zeit t darstellbar wird, womit unser Ziel erreicht wäre. Die Differentialgleichung (32) nimmt dann unter Beschränkung auf die 2. Potenz von e die folgende Form an:

$$\frac{de}{dt} = g_0 + g_1 e + g_2 e^2 e, \tag{36}$$

wobei die Koeffizienten g_i die folgende Bedeutung haben:

$$\begin{aligned} g_0 &= \varepsilon_1 \cdot f_0', \quad g_1 = 2\varepsilon_2 \cdot f_0 \cdot f_0' + f_1' \varepsilon_1 \\ g_2 &= 2\varepsilon_2 f_1 \cdot f_0' + 2\varepsilon_2 f_0 \cdot f_1' + \varepsilon_1 \cdot f_2'. \end{aligned} \tag{36a}$$

Die Integration von (36) ergibt dann, wenn C eine Integrationskonstante und t_0 die Anfangszeit fixiert:

$$g_2(t - t_0) + C = \int \frac{de}{e^2 + be + c}, \quad \text{wo } b = \frac{1}{2}\frac{g_1}{g_2} \text{ und } c = \frac{g_0}{g_2}. \tag{37}$$

Form und Eigenschaft des Integrals hängen also von der Ungleichheit ab: $b^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{g_1}{g_2}\right)^2 \gtreqless c$, wobei im 1. Falle, wenn $b^2 > c$, eine logarithmische Lösung, im 2. Falle: $b^2 < c$ eine arc tg-Lösung und im 3. Falle, wo $b^2 = c$ eine algebraische Form der Lösung eintritt. Folglich ergibt sich bei Umkehrung der Lösungen für die Exzentrizität, im 1. Falle, wo $b^2 > c$ eine exponentielle Lösung, im 2. Falle, wo $b^2 < c$ eine trigonometrische Lösung nach t, und im 3. Falle eine algebraische Lösung nach t. Explizit lauten diese Lösungen:

$$(38)_1 \quad b^2 > c\colon\ g_2(t - t_0) + C = \frac{1}{2\sqrt{b^2 - c}}\, ln\, \frac{e + b - \sqrt{b^2 - c}}{e + b + \sqrt{b^2 - c}},$$

also bei Umkehrung; d. h. bei Auflösung nach e:

$$e = \frac{(b + \sqrt{b^2 - c}) \cdot E^{2\sqrt{b^2 - c}\,[g_2(t - t_0) + C]} - b + \sqrt{b^2 - c}}{1 - E^{2\sqrt{b^2 - c}\,[g_2(t - t_0) + C]}},$$

wonach für $t = t_0$, wo $e = e_0$, die Integrationskonstante C aus der folgenden Gleichung hervorgeht:

$$E^{2\sqrt{b^2 - c} \cdot C} = \frac{b - \sqrt{b^2 - c} + e_0}{b + \sqrt{b^2 - c} + e_0}.$$

Weiter folgt im 2. Falle, wo $b^2 < c$:

$$(38_2) \qquad g_2(t - t_0) + C = \frac{1}{\sqrt{c - b^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{e + b}{\sqrt{c - b^2}},$$

also bei Umkehrung und Auflösung nach e:

$$e = -b + \sqrt{c - b^2}\, \operatorname{tg}\left\{\sqrt{c - b^2}\,[g_2(t - t_0) + C]\right\},$$

also bei $t = t_0$ und Auflösung nach C als Funktion von e_0:

$$\operatorname{tg}\left(C\sqrt{c - b^2}\right) = \frac{e_0 + b}{\sqrt{c - b^2}}.$$

Endlich folgt im Falle, wo

$$(38_3) \qquad b^2 = c\colon\ g_2(t - t_0) + C = -\frac{1}{e + b},$$

also:

$$e = -b - \frac{1}{g_2(t-t_0)+C}, \quad \text{wo} \quad C = -\frac{1}{e_0+b}.$$

Bezüglich des Verhaltens von e als Funktion der Zeit ergibt sich zuerst im Falle (38_1), also wenn $b^2 > c$, und wenn 1) der Koeffizient $g_2 > 0$, daß die beiden E-Funktionen mit wachsender Zeit gegen $+\infty$ wandern, und die Exzentrizität e gegen den Grenzwert $e'_g = -(b+\sqrt{b^2-c})$ wandert, so daß dann $e'_g > 0$, wenn $c > 0$ und immer $b = \frac{1}{2}\frac{g_1}{g_2} < 0$, d. h. wenn, da nach Voraussetzung schon $g_2 > 0$, der Koeffizient $g_1 < 0$ ist, wobei g_1 nach (36a) definiert ist; dann aber kann nur die numerische Sonderprüfung das Vorzeichen von g_1 feststellen. Ist ferner im 2. Falle in bezug auf (38_1): 2) $g_2 < 0$, so geht e mit wachsender Zeit an der Grenze $t = \infty$ über in den Grenzwert: $e = -b + \sqrt{b^2-c}$, so daß also $e > 0$, wenn $c = \frac{g_0}{g_2} < 0$ ist, bei $g_0 > 0$ und unabhängig vom Vorzeichen von b. Somit haben wir also in (38_1) eine doppelt-asymptotische Lösung erlangt, bei der die asymptotischen Endwerte e voneinander verschieden sind. Ferner ist $e > 0$, wenn $c = \frac{g_0}{g_2} < 0$ ist, wenn $g_0 > 0$, und unabhängig vom Vorzeichen von b_0. Ferner ist $e > 0$ immer dann, wenn bei $c > 0$: $b^2 - c > 0$, die Größe $b < 0$ ist. Da nun schon nach (2) $g_2 < 0$, so verbleibt infolge der Bedingung: $c = \frac{g_0}{g_2} < 0$ die Bedingung: $g_0 > 0$; nun ist nach (36a): $g_0 = \varepsilon_1 \cdot f'_0$, wo gemäß (35a): $f'_0 = 1 - \frac{1}{2}f_0^2 - \frac{1}{8}f_0^4$ und nach (34): $f_0 = y_0 + \cdots$, so daß $|f_0| < 1$, folglich nach (35a) auch: $f'_0 < 1$; ferner ist nach (8): $\varepsilon_1 = \frac{N_2}{\sqrt{a}} < 0$, weil nach (2): $N_2 < 0$, so daß $g_0 < 0$ gegen die Annahme, daß $g_0 > 0$, so daß also bei a) $c < 0$ der Fall (2) $g_2 < 0$ nicht in Frage kommt. – Bei (38_2) variiert $e + b$ proportional zu $\operatorname{tg}(\alpha t + \beta)$.

Im 3. Falle, d. h. (38_3), wird bei $t = \pm\infty$: $e = -b$, so daß also in diesen Fällen, falls $b < 0$, e einen positiven Grenzwert erhält, folglich also eine doppelt-asymptotische Lösung vorliegt, und zwar mit dem jedesmaligen Grenzwert $e = -b > 0$.

§ 2. Die Perihelbewegung

Nach der Darstellung der Elemente a und ζ als Funktionen von e in Form von Potenzreihen nach e bleibt noch die Darstellung der Perihelbewegung ebenfalls als Funktion von e, um alsdann die genannten Elemente wie schon e ebenfalls als Funktion von t darzustellen.

Die Differentialgleichung für die Perihelbewegung lautet nun, wenn $\bar{\omega}$ die Perihellänge fixiert:

$$(39) \qquad \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 \cdot e} \cdot \frac{\partial R}{\partial e}.$$

Auf Grund unserer Darstellung von R in (1) ergibt sich für den benötigten Koeffizienten:

$$(39\text{a}) \qquad \frac{1}{e}\,\frac{\partial R}{\partial e} = 2N_1 + \frac{1}{e} N_2 \cos\zeta + 2N_3 \cos 2\zeta.$$

Wenn wir dann gemäß (5) mit Rücksicht auf die Abhängigkeit der Koeffizienten N_i von a die entsprechende Entwicklung der Koeffizienten nach e vornehmen würden, so erhielten der Koeffizient N_1 einen Zusatzterm in e^2, ferner $\frac{1}{e} N_2$ einen Term $e \cdot N_2$ und N_3 einen Zusatzterm $N_3 \cdot e^2$, welche Terme alle gegenüber den schon berücksichtigten wegfallen müssen. Unter dieser Voraussetzung sind deshalb die Terme $N_1 = N_1^*$, $N_2 = N_2^*$ und $N_3 = N_3^*$ als Konstanten zu betrachten. Neben dem integrierten Säkularterm: $2N_1(t - t_0)$ in $\bar{\omega}$ verbleiben dann die beiden folgenden Integrale:

$$(40\text{a}) \qquad J_1 = \int \frac{\cos\zeta}{e} \cdot dt \quad \text{und}$$

$$(40\text{b}) \qquad J_2 = \int \cos 2\zeta \cdot dt,$$

wobei nach (33) $\cos\zeta = f_0 + f_1 \cdot e + f_2 e^2 + \ldots$, und die Koeffizienten f_0, f_1 und f_2 durch die Ausdrücke (34) definiert worden sind, so daß nun zuerst nach (40a) die folgenden Integrale als Funktionen von t darzustellen sind:

$$(41)\quad \begin{cases} J_1' = \int \frac{f_0}{e}\,dt, \quad J_2' = \int f_1\cdot dt, \quad J_3' = \int f_2\cdot dt, \\ \text{und in bezug auf (40b):} \\ J_2 = \int \cos 2\zeta\cdot dt, \end{cases}$$

wobei die Koeffizienten f_i ($i = 0, 1, 2$) in (34) definiert worden sind. Dabei bleibt in bezug auf (40b) zu substituieren: $\cos 2\zeta = 2\cos^2\zeta - 1$, und deshalb weiter $\cos^2\zeta$ noch nach (33) als Potenzreihe nach e zu entwickeln bleibt, so daß man erhält: $\cos^2\zeta = f_0^2 + 2f_0 f_1 e + (f_1^2 + 2f_0 f_2)e^2 + \cdots$

Alsdann ergibt sich auf Grund der Definition von e als Funktion der Zeit, zuerst im Falle von (38_1), der Exponential-Lösung, wo $b^2 > c$:

$$(42\,\mathrm{a})\qquad J_1' = f_0 \int \frac{1 - E^{K(t-t_0)+\Lambda}}{\alpha\cdot E^{K(t-t_0)+\Lambda} - \beta}\,dt,$$

wo

$$\alpha = b + \sqrt{b^2 - c}, \quad \beta = b - \sqrt{b^2 - c}$$
$$K = 2\sqrt{b^2 - c}\cdot g_2, \quad \Lambda = 2\sqrt{b^2 - c}\cdot C.$$

Verwendet man zur Ausführung der Integration die Substitution: $E^{K(t-t_0)+\Lambda} = z$, so folgt bei Integration:

$$(42\,\mathrm{b})\quad J_1' = \frac{f_0}{K}\left\{-\frac{K(t-t_0)+\Lambda}{\beta} + \left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha}\right)\ln\left[\alpha E^{K(t-t_0)+\Lambda} - \beta\right]\right\},$$

wo der Faktor $\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 2\frac{\sqrt{b^2 - c}}{c}$, so daß J_1' nach (42b) sich aus einem gewöhnlichen Säkular-Term und einem logarithmischen Term in t zusammensetzt. Weiter wird nach (41): $J_2' = f_1(t - t_0)$. Es verbleibt noch die Integration von: $J_3' = f_2\cdot\int e\,dt$, also:

$$(43\,\mathrm{a})\qquad J_3' = f_2\cdot\int \frac{\alpha E^{K(t-t_0)+\Lambda} - \beta}{1 - E^{K(t-t_0)+\Lambda}}\,dt,$$

wobei dieselbe Substitution wie bei J_1' (42a), also $E^{K(t-t_0)+\Lambda} = z$, ergibt:

(43b) $$J_3' = f_2 \int e \cdot dt = \frac{f_2}{K} \ln \frac{[1-E^{K(t-t_0)+\Lambda}]^{\beta-\alpha}}{E^{[K(t-t_0)+\Lambda]\beta}},$$

wo

(44) $$\beta - \alpha = -2\sqrt{b^2 - c}.$$

Zur Ermittlung des letzten Terms, d. h. nach (40b): $J_2 = \int \cos 2\zeta \cdot dt = 2\int \cos^2\zeta - \int dt$ folgt zuerst unter Substitution von $\cos\zeta$ nach (33):

(45) $$\int \cos^2\zeta \cdot dt = \int [f_0^2 + 2f_0 \cdot f_1 \cdot e + (2f_0 f_2 + f_1^2) e^2 + \cdots]\, dt,$$

wo das Integral $\int e \cdot dt$ schon oben unter (43b) als Funktion von t dargestellt wurde. Es verbleibt noch das Integral:

$$\int e^2 \cdot dt = \int \left[\frac{\alpha E^{K(t-t_0)+\Lambda} - \beta}{1 - E^{K(t-t_0)+\Lambda}}\right]^2 dt;$$

wieder unter Substitution von $E^{K(t-t_0)} = z$ ergibt sich die folgende algebraische Form des Integrals:

(46) $$\int e^2 \cdot dt = \frac{1}{K} \cdot \int \left[\frac{\alpha^2}{z^2} + \frac{(\alpha-\beta)^2}{z(1-z)^2} + 2\frac{\alpha(\alpha-\beta)}{z(z-1)}\right] dz,$$

also bei Ausführung der Integrationen:

(47) $$\int e^2 \cdot dt =$$

$$\frac{1}{K}\left\{\beta^2[K(t-t_0)+\Lambda] + (\alpha^2-\beta^2)\ln[1-E^{K(t-t_0)+\Lambda}] - \frac{(\alpha-\beta)^2}{E^{K(t-t_0)+\Lambda}}\right\}.$$

Da noch in (39a) der Term: $2N_3 \cos 2\zeta = 2N_3(2\cos^2\zeta - 1)$ ist, bleibt zu beachten, daß der Säkularteil in (39a): $2N_1 - 2N_3$ wird, womit die Gesamtintegration der Terme von (41) unter Darstellung aller Integrale als Funktion der Zeit vollzogen ist, zur Verwendung für die Darstellung der Perihellänge als Funktion der Zeit, und zwar im Falle der Exponentiallösung für die Exzentrizität unter Darstellung in (38_1).

Es verbleibt jetzt die Darstellung der Perihellänge im Falle der 2., d. h. trigonometrischen Darstellung der Exzentrizität e in (38_2), also auf Grund der Darstellung:

$$e = -b + \sqrt{c-b^2} \cdot \operatorname{tg}\left[g_2 \sqrt{c-b^2}\,(t-t_0) + C'\right],$$

wo $C' = C\sqrt{c-b^2}$. Unter dieser Voraussetzung sind dann die Integrale (40a) und (40b) erneut zu ermitteln, wobei, wie bisher, die Darstellung von ζ mittels $\cos\zeta = f_0 + f_1 e + f_2 e^2$ der Ausgangspunkt ist. Folglich sind als Funktion der Zeit darzustellen die beiden Integrale:

$$(48\,\text{a}): \quad \int \frac{\cos\zeta}{e}\,dt \quad \text{und} \quad (48\,\text{b}): \quad \int \cos 2\zeta \cdot dt.$$

Mithin wird zuerst in bezug auf (48a):

$$a_1 = \int \frac{f_0}{e}\,dt = f_0 \int \frac{dt}{-b + \sqrt{c-b^2}\cdot \operatorname{tg} A},$$

wo $A = g_2\sqrt{c-b^2}\,(t-t_0) + C'$, so daß also bei Substitution von $dt = \dfrac{dA}{g_2\sqrt{c-b^2}}$ das neue Integral entsteht:

$$J_{a_1} = \frac{f_0}{g_2\sqrt{c-b^2}} \int \frac{dA}{-b + \sqrt{c-b^2}\cdot \operatorname{tg} A};$$

setzt man $\operatorname{tg} A = z$, so daß $dA = \dfrac{dz}{1+z^2}$, so geht das letzte Integral in die neue Form über:

$$J_{a_1} = \frac{f_0}{g_2\sqrt{c-b^2}} \int \frac{dz}{(\alpha + \beta z)(1+z^2)},$$

wo $\alpha = -b$ und $\beta = \sqrt{c-b^2}$. Unter Zerlegung des Integranden in Partialbrüche folgt dann:

$$(49) \quad J_{a_1} = \frac{f_0}{g_2\sqrt{c-b^2}} \left\{ \frac{\sqrt{c-b^2}}{c} \ln\left[-b + \sqrt{c-b^2}\cdot z\right] - \frac{b}{c} \operatorname{arc\,tg} z \right\},$$

wo die von t abhängige Größe: $z = \operatorname{tg}\left[g_2\sqrt{c-b^2}\,(t-t_0) + C'\right]$, so daß also der letzte Summand in (49):

$$\operatorname{arc\,tg} z = g_2\sqrt{c-b^2}\,(t-t_0) + C'$$

gesetzt werden kann.

Weiter folgt dann im Integral (48a) nach soeben erfolgter Berücksichtigung des Termes f_0 in $\cos\zeta$ die Berücksichtigung des nächsten Termes $f_1 \cdot e$, so daß das nächste Integral:

(50) $$J_{a_2} = \int \frac{f_1 \cdot e}{e}\, dt = f_1 (t - t_0),$$

und schließlich bei Berücksichtigung des 3. Termes in $\cos\zeta$ zu integrieren ist: $J_{a_3} = \int \frac{f_2 e^2}{e} dt = f_2 \int e\, dt$, wo nunmehr

$$e = -b + \sqrt{c - b^2}\ \mathrm{tg}\left[\sqrt{c-b^2}\,(g_2 (t - t) + C)\right],$$

so daß:

(51) $$J_{a_3} = f_2 \int e\, dt = f_2 \left\{ -b(t - t_0) - \frac{1}{g_2} \ln \cos\left[g_2 \sqrt{c - b^2}\,(t - t_0) + C\right]\right\},$$

womit die Integration des Termes (40) vollzogen ist. Es verbleibt jetzt noch gemäß (40b) resp. (39a) die Integration des Termes: $2 N_3 \cdot \cos 2\zeta$, so daß also das weitere Integral

(52) $$\int \cos 2\zeta \cdot dt = 2 \int \cos^2 \zeta \cdot dt - (t - t_0)$$

als Funktion der Zeit darzustellen bleibt, aber im 2. Falle unserer trigonometrischen Lösung auf der Grundlage der Darstellung von $\int \cos^2 \zeta \cdot dt$ nach (45), wobei noch die Integration von $\int e^2\, dt$ auszuführen bleibt. Demnach folgt zuerst auf Grund von (38_2) die Darstellung von e^2:

(53) $$e^2 = b^2 - 2b\sqrt{c - b^2} \cdot tg\,\varphi + (c - b^2) \cdot tg^2\,\varphi, \text{ wo}$$

$$\varphi = K(t - t_0) + C', \quad \text{und}$$

$$\begin{cases} K = g_2 \sqrt{c - b^2} \\ C' = C\sqrt{c - b^2} \end{cases}$$

Folglich wird nach (53) bei Integration des 2. Terms von (53) nach t:

$$\int 2b\sqrt{c - b^2} \cdot tg\,\varphi = -\frac{2b}{K}\sqrt{c - b^2}\ \ln\left\{\cos\left[C' + K(t - t_0)\right]\right\}.$$

Der 3. Term von (53) in e^2 führt zu dem Integral:

$$J_3 = (c - b^2) \int \operatorname{tg}^2 \varphi \cdot dt,$$

oder, da

$$dt = \frac{d\varphi}{K} = \frac{d\varphi}{g_2 \sqrt{c - b^2}} : J_3 = \sqrt{c - b^2} \int \operatorname{tg}^2 \varphi \, d\varphi,$$

oder wenn weiter: $\operatorname{tg} \varphi = z$, also $d\varphi = \cos^2 \varphi \, dz = \frac{dz}{1 + z^2}$, so wird $J_3 = \sqrt{c - b^2} \int \frac{z^2}{1 + z^2} dz = \frac{\sqrt{c - b^2}}{g^2} (z - \operatorname{arc\,tg} z)$, oder auch, weil $z = \operatorname{tg} \varphi$, wo $\varphi = K(t - t_0 + C'$, und $K = g_2 \sqrt{(c - b^2)}$, schließlich:

$$J_3 =$$

$$\frac{\sqrt{c - b^2}}{g_2} \{\operatorname{tg} [g_2 \sqrt{c - b^2} (t - t_0) + C'] - g_2 [\sqrt{c - b^2} (t - t_0) + C']\}.$$

Folglich lautet das Integral $\int e^2 \, dt$ bei Zusammenfassung der oben fixierten Teile:

(54)

$$J = \int e^2 \, dt = b^2 (t - t_0) + \frac{2b}{g_2} \ln \{\cos [g_2 \sqrt{c - b^2} (t - t_0) + C']\}$$

$$+ \frac{\sqrt{c - b^2}}{g_2} \{\operatorname{tg} [g_2 \sqrt{c - b^2} (t - t_0) + C'] - [g_2 \sqrt{c - b^2} (t - t_0) + C']\},$$

womit die Integration des Elementes $\bar{\omega}$ als Funktion der Zeit auch im Falle der trigonometrischen Lösung in bezug auf die Exzentrizität abgeschlossen ist.

Es verbleibt an den Lösungen für die Darstellung von e als Funktion der Zeit noch der letzte Fall (38_3), ein Ausnahmefall, weil alsdann $b^2 - c = 0$ ist, so daß die Lösung in Bezug auf e lautet: $e = -b - \frac{1}{g_2 (t - t_0) + C}$, so daß die Integrationskonstante C, wenn $e = e_0$ dem Zeitpunkt $t = t_0$ entspricht, definiert ist durch die Beziehung: $C = -\frac{1}{e_0 + b}$. Nun bedeutet nach (37) die Bedingung $b^2 = c$, daß die weitere Bedingung erfüllt sein muß: (55) $g_1^2 = 4 g_0 \cdot g_2$, wo g_0, g_1 und g_2 nach (36a) Funktionen von e_1, e_2, f_0, f_1, f'_0, f'_1, f'_2 sind, wobei f'_0, f'_1, f'_2 nach (35a) wieder Funktionen von f_0, f_1, f_2 sind, welch letztere weiter nach (34) Funktionen von $x_0 = e_0$, $y_0 = \cos \zeta_0$ sind, entsprechend $t = t_0$. Ferner hängen die Koeffizienten ε_1, ε_2 nach (8) von a und a' ab, die durch den gewählten Planetentypus bekannt sind, so daß die Bedingung (55) eine Beziehung zwischen e_0 und $\cos \zeta_0$ darstellt. Wird diese Bedingung erfüllt, so nähert sich e mit zunehmender resp. abnehmender Zeit an den Grenzen $t = \pm \infty$ nach (38_3) dem Grenzwert $e_g = -b$, so daß folglich zur Existenz solcher Lösungen $b < 0$ sein muß, also nach (37) $\frac{g_1}{g_2} < 0$ sein muß, also g_1 und g_2 verschiedene Vorzeichen haben müssen, was nach den Definitionen (36a) festzustellen bleibt.

Berichtigungen

zu der Arbeit „Zur Theorie nahezu kommensurabler Bewegungen im System der Planetoiden des Sonnensystems"

diese Sitzungsberichte 1959 S. 61–101

Seite 63, 12. Zeile: statt Jupiter-Exzentrizität lies: Jupiter-Bewegung.

Seite 66, 3. Zeile, c), statt $-p\sqrt{a-e^2}$ lies: $-p\sqrt{l-e^2}$.

Seite 77, Formel (31), statt $\frac{19}{720}$ lies: $\frac{14}{720}$.

Seite 77, Formel (32), statt $\frac{19}{2880}$ lies: $\frac{14}{2880}$.

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1960

Band/Volume: 1959

Autor(en)/Author(s): Wilkens Alexander

Artikel/Article: Zur Theorie der nahezu kommensurablen Bewegungen der Planeten vom Hecuba-Typus 227-249