BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Riemannsche Fläche des Zweikörperproblems

Von Karl Zuser in Ingolstadt

Vorgelegt von Herrn Josef Lense am 3. Juni 1960

Mit 18 Figuren
im Text und auf drei Tafeln

Übersicht

Einleitung 61
Das Zweikörperproblem 63
Ellipse als Bahnkurve 64
Bilder der reellen Achse der w-Ebene 66
Bilder der imaginären Achse der w-Ebene 66
Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene 68
Konstruktion der Riemannschen Fläche 70
Hyperbel als Bahnkurve 72
Bilder der reellen Achse der w-Ebene 74
Bilder der imaginären Achse der w-Ebene 76
Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene 76
Konstruktion der Riemannschen Fläche 80
Parabel als Bahnkurve 81
Gerade als Bahnkurve 84
Bilder der reellen Achse der w-Ebene 86
Bilder der imaginären Achse der w-Ebene 87
Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene 87
Konstruktion der Riemannschen Fläche 88
Untersuchung der Randstelle über $w = \infty$ 90

Einleitung

Wenn sich drei materielle Punkte mit den Massen m_1, m_2, m_3 nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz anziehen (Gravitationskonstante k), erfüllen ihre Ortsvektoren die Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{d^2\mathfrak{r}_1}{dt^2} &= \frac{km_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_1|^3} + \frac{km_3(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_1|^3}\,,\\
\frac{d^2\mathfrak{r}_2}{dt^2} &= \frac{km_3(\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_2)}{|\mathfrak{r}_3-\mathfrak{r}_2|^3} + \frac{km_1(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2)}{|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_2|^3}\,,\\
\frac{d^2\mathfrak{r}_3}{dt^2} &= \frac{km_1(\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_3)}{|\mathfrak{r}_1-\mathfrak{r}_3|^3} + \frac{km_2(\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_3)}{|\mathfrak{r}_2-\mathfrak{r}_3|^3}\,.
\end{aligned} \tag{1}$$

Die drei Ortsvektoren kann man sich in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem in ihre jeweiligen Komponenten zerlegt denken. So betrachtet ist (1) ein System von neun Differentialgleichungen für die drei mal drei Koordinaten der drei materiellen Punkte. Physikalisch gesehen kommen für die Zeit t nur reelle Werte in Betracht. Vom mathematischen Standpunkt aus ist es jedoch interessant, für t auch komplexe Werte zuzulassen und die durch (1) definierten Funktionen der komplexen Veränderlichen t zu untersuchen. In einer Arbeit über das Dreikörperproblem behauptet R. Vernić[1], daß diese Funktionen im Endlichen nur algebraische Singularitäten in endlicher Anzahl haben. Der Punkt $t = \infty$ kann Häufungspunkt solcher singulären Punkte sein. Solche mehrdeutige Funktionen nennt R. Vernić algebromorph.[2] Ein besonderer Fall der algebromorphen Funktionen, nämlich die endlich vieldeutigen, sind die algebroiden Funktionen. Diejenigen algebroiden Funktionen, die auch im Punkt $t = \infty$ höchstens eine algebraische Singularität besitzen, sind die algebraischen Funktionen.

Die Behauptung von R. Vernić, nach der die allgemeine Lösung des Dreikörperproblems durch algebromorphe Funktionen der Zeit gegeben ist, widerspricht dem Ergebnis von C. L. Siegel[3], daß in einer Umgebung eines Zeitpunktes, in dem alle drei Körper zusammenstoßen, Reihenentwicklungen nach Potenzen der Zeit auftreten, unter denen solche mit irrationalen

---

[1] R. Vernić, Diskussion der Sundmannschen Lösung des Dreikörperproblems, Zagreb 1954.

[2] Die Bezeichnung „algebromorph" hat Gunnar af Hallström im anderen Sinne schon früher verwendet; vgl. Über die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen, Acta Academiae Aboensis, Mathematica et Physica XVI. 4. 1949.

[3] C. L. Siegel, Der Dreierstoß, Ann. of Math., II. 42, 127–168 (1941).

Exponenten vorkommen, die Stelle somit im allgemeinen wesentlich singulär ist.

Für das Zweikörperproblem trifft die Behauptung von R. Vernić zu. Die allgemeine Lösung dieses Problems besteht aus algebromorphen Funktionen der Zeit. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, dieses nachzuweisen und insbesondere die zugehörigen Riemannschen Flächen dieser mehrdeutigen Funktionen zu konstruieren. Dabei wird von der bekannten allgemeinen Lösung des Zweikörperproblems ausgegangen.

Das Zweikörperproblem

Die Bewegungsgleichungen für das Zweikörperproblem lauten

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \mathfrak{r}_1}{dt^2} &= \frac{k m_2 (\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1)}{|\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_1|^3}, \\ \frac{d^2 \mathfrak{r}_2}{dt^2} &= \frac{k m_1 (\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2)}{|\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2|^3}. \end{aligned} \tag{2}$$

Die Vektoren $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$ sind auf den Schwerpunkt o der beiden materiellen Punkte bezogen, der als ruhend betrachtet werden kann. Die Bewegung erfolgt dann in einer festen Ebene. Aus (2) erhält man für $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}$ die folgende Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \mathfrak{r}}{dt^2} = -\frac{k (m_1 + m_2) \mathfrak{r}}{|\mathfrak{r}|^3}. \tag{3}$$

Das ist die Differentialgleichung für die Bewegung eines materiellen Punktes mit dem Ortsvektor $\mathfrak{r}$, der von der Masse $(m_1 + m_2)$ mit dem festen Zentrum o angezogen wird.

Aus $\mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}$ und $m_1 \mathfrak{r}_1 + m_2 \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{o}$ folgt

$$\mathfrak{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathfrak{r} \quad \text{und} \quad \mathfrak{r}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathfrak{r}.$$

Es genügt demnach, $\mathfrak{r}$ als Funktion von t zu kennen. Die durch (3) festgelegte Bahnkurve ist je nach den als reell angenommenen

Anfangswerten eine Ellipse, Hyperbel, Parabel oder Gerade. Die Realität der Anfangswerte möge im folgenden immer beibehalten werden, auch wenn die Zeit t als komplexe Veränderliche aufgefaßt wird.

Ellipse als Bahnkurve

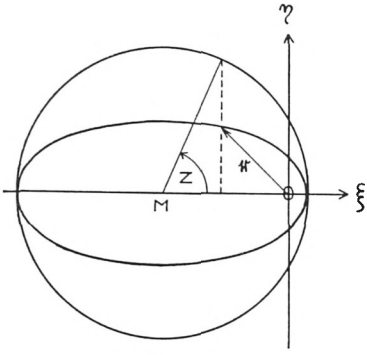


Abb. 1

a = große Halbachse der Ellipse

e = numerische Exzentrizität der Ellipse

z = exzentrische Anomalie

c = Konstante der Flächengeschwindigkeit

$$a > 0, \quad 0 < e < 1, \quad c \lessgtr 0.$$

Für die Komponenten von $\mathfrak{r}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \xi &= a \cos z - a e, \\ \eta &= a \sqrt{1 - e^2} \sin z, \quad \text{also} \\ |\mathfrak{r}| &= r = a(1 - e \cos z). \end{aligned} \tag{4}$$

Der zeitliche Ablauf wird durch die Keplersche Gleichung

$$\frac{2ct}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} = z - e \sin z$$

festgelegt, wobei die Zeitzählung im Perihel beginnt.

Mit der Abkürzung $w = \frac{2ct}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}$ lautet diese Gleichung

$$w = z - e \sin z. \tag{5}$$

Zu einem reellen w gehört nach (5) genau ein reelles z, das physikalisch die exzentrische Anomalie bedeutet. Im Komplexen

ist die durch (5) definierte Funktion $z(w)$ mehrdeutig. In diesem Fall ist z Uniformisierende für die ebenfalls mehrdeutigen Funktionen $\xi(w)$ und $\eta(w)$.

Wir erweitern nun die gewöhnliche w-Ebene durch Überlagerungsflächen, so daß einem Punkt dieser Riemannschen Fläche genau ein Punkt der z-Ebene entspricht. Um die Riemannsche Fläche der vorliegenden Funktion $z(w)$ zu konstruieren, untersuchen wir zunächst die durch diese Funktion vermittelte Abbildung der w-Ebene auf die z-Ebene. Aus $w(z) = z - e \sin z$ folgt

$$w(-z) = -w(z) \text{ und } w(\bar{z}) = \overline{w(z)}, \tag{6}$$

wenn der Querstrich den Übergang zum konjugiert komplexen Wert bedeutet. Nach (6) bleibt also eine Symmetrie bezüglich der reellen oder imaginären Achse erhalten.

Im folgenden setzen wir $w = u + iv$ und $z = x + iy$.

Für die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der Funktion $z = z(w)$ muß die Beziehung

$$\frac{dw}{dz} = 1 - e \cos z = 0 \tag{7}$$

bestehen. Aus ihr entnimmt man die Kreuzungspunkte

$$z_k = 2k\pi \pm i \,\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e},^{1} \tag{8}$$

für die nach (4) $r = 0$ ist.

Wegen $\left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right)_{z=z_k} = e \sin z_k = \pm i \sqrt{1-e^2} \neq 0$ sind diese Kreuzungspunkte einfach; ihnen entsprechen die einfachen Verzweigungspunkte

$$w_k = 2k\pi \pm i \left(\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1-e^2}\right). \tag{9}$$

Aus $u + iv = x + iy - e \sin(x + iy)$ erhält man

$$\begin{aligned} u &= x - e \sin x \,\mathfrak{Cof}\, y \quad \text{und} \\ v &= y - e \cos x \,\mathfrak{Sin}\, y. \end{aligned} \tag{10}$$

---

[1] $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e}$ bedeute den positiven Wert von $\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof} \frac{1}{e}$.

Bilder der reellen Achse der w-Ebene

$v = 0$ ergibt

$$y - e \cos x \, \mathfrak{Sin}\, y = 0. \tag{11}$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $y \equiv 0$ bei beliebigem x. Damit wird

$u = x - e \sin x$; d. h. u wächst monoton von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft.

Die zweite Lösung von (11) hat man in

$$\cos x = \frac{y}{e\, \mathfrak{Sin}\, y}, \quad y \neq 0. \tag{12}$$

Nach (6) gibt es zu einer durch (12) gegebenen Kurve auch die zu ihr symmetrische bezüglich der reellen bzw. imaginären Achse. Die Gleichung (12) geht in sich über, wenn x durch $x + 2\pi$ ersetzt wird. Falls $\cos x < 0$ ist, erhält man keine y-Werte. Es genügt demnach, die positiven y-Werte zu ermitteln, die den x-Werten des Intervalles $0 \leqq x < \frac{\pi}{2}$ entsprechen.

Schreibt man (12) in der Form

$\frac{y}{e \cos x} = \mathfrak{Sin}\, y$, so erkennt man leicht, daß y monoton mit x wächst. Ferner ist $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} y = +\infty$, d. h. die Gerade $x = \frac{\pi}{2}$ ist Asymptote.

Bilder der imaginären Achse der w-Ebene

$u = 0$ ergibt

$$x - e \sin x \, \mathfrak{Cos}\, y = 0. \tag{13}$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $x \equiv 0$ bei beliebigem y. Damit wird

$$v = y - e\, \mathfrak{Sin}\, y \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dy} = 1 - e\, \mathfrak{Cos}\, y.$$

Hier kann man sich auf $y \geqq 0$ beschränken. $\frac{dv}{dy}$ verschwindet für $y = y_0 = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e}$. Für $0 \leqq y < y_0$ folgt $\frac{dv}{dy} > 0$ und für $y > y_0$ ist $\frac{dv}{dy} < 0$. v verschwindet für $y = 0$ und für $y = y_1 > y_0$. Außerdem ist $v(y_0) > 0$, d. h.

$$\mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1 - e^2} > 0; \quad \text{vgl. (9).}$$

Die zweite Lösung von (13) hat man in

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{x}{e \sin x}, \quad x \neq 0. \tag{14}$$

Wir können uns wieder auf $x \geqq 0$, $y > 0$ beschränken. Es ist

$$\lim_{x \to 0} \mathfrak{Cof}\, y = \frac{1}{e} \quad \text{oder} \quad \lim_{x \to 0} y = \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e}.$$

Unter der obigen Einschränkung erhalten wir in (14) nur y-Werte, wenn

$$0 \leqq x < \pi \quad \text{oder} \quad 2k\pi < x < (2k+1)\pi, \quad \text{wobei } k = 1, 2, \ldots$$

Die Geraden $x = k\pi$ sind Asymptoten ($y \to \infty$).

Ersetzt man in (14) x durch $x + 2\pi$, so erhält man

$$\mathfrak{Cof}\, y(x + 2\pi) = \frac{x + 2\pi}{e \sin x} = \mathfrak{Cof}\, y(x) + \frac{2\pi}{e \sin x} > \mathfrak{Cof}\, y(x),$$

d. h. $y(x + 2\pi) > y(x)$.

Durch Differenzieren folgt aus (14)

$$\frac{dy}{dx}\, \mathfrak{Sin}\, y = \frac{\sin x - x \cos x}{e \sin^2 x} = \frac{(\operatorname{tg} x - x) \cos x}{e \sin^2 x}. \tag{15}$$

Für $x = (4k - 3)\frac{\pi}{2}$ ergibt sich nach (14)

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{(4k-3)\pi}{2e}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{Sin}\, y = \sqrt{\left[\frac{(4k-3)\pi}{2e}\right]^2 - 1}$$

und damit nach (15)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2}{\sqrt{[(4k-3)\pi]^2 - 4e^2}}.$$

Die hier in Frage kommenden Nullstellen von $\operatorname{tg} x - x$ lauten $x_k = (4k+1)\frac{\pi}{2} - \varepsilon_k$, wobei $0.13 > \varepsilon_1 > \varepsilon_2 \ldots$ mit $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Aus (15) entnehmen wir

$$\frac{dy}{dx} < 0 \quad \text{für} \quad 2k\pi < x < x_k,$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{für} \quad x = x_k \text{ und}$$

$$\frac{dy}{dx} > 0 \quad \text{für} \quad x_k < x < (2k+1)\pi.$$

Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene

Als Verzweigungsschnitte in der w-Ebene wählen wir die Halbgeraden

$$u = 2k\pi, \; v \geqq \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1-e^2} \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \quad \text{bzw.}$$

$$u = 2k\pi, \; v \leqq -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} + \sqrt{1-e^2}.$$

Die Verzweigungspunkte und die zugehörigen Verzweigungsschnitte numerieren wir wie in Abb. 2 angegeben. Ein Kreuzungspunkt in der z-Ebene erhalte dieselbe Nummer wie sein entsprechender Verzweigungspunkt. Von den Bildern des n-ten Verzweigungsschnittes greifen wir nur dasjenige heraus, das den n-ten Kreuzungspunkt enthält. Nach (6) genügt es, die den Verzweigungsschnitten

$$u = 2k\pi, \; v \geqq \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1-e^2} \; (k = 1, 2, \ldots)$$

entsprechenden Kurven in der z-Ebene zu finden. Man erhält zunächst

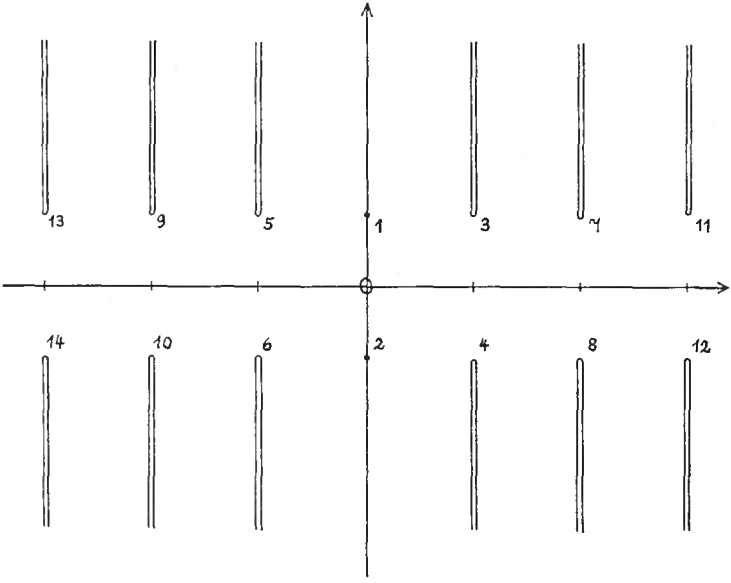


Abb. 2

$x - e \sin x \, \mathfrak{Cof}\, y = 2k\pi$; die Lösung $x \equiv 2k\pi$ kommt hier jedoch nicht in Betracht, weil die Kurve sonst ein Bild der reellen Achse der w-Ebene schneiden würde. Dem Verzweigungsschnitt $u = 2k\pi$, $v \geqq \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1-e^2}$ entspricht also in der z-Ebene die Kurve

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{x - 2k\pi}{e \sin x}, \quad \text{wobei} \quad (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi \quad \text{und} \quad y \geqq \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e}. \tag{16}$$

Mit $x - 2k\pi = \tilde{x}$ geht (16) über in

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{\tilde{x}}{e \sin \tilde{x}}, \quad \text{wobei} \quad -\pi < \tilde{x} < \pi \quad \text{und} \quad y \geqq \mathfrak{Ar}\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e}.$$

Der Verlauf dieser Kurve wurde bereits in (14) untersucht.

Konstruktion der Riemannschen Fläche

Wir fertigen die w-Ebene in unendlich vielen Exemplaren (Blättern) an, denen wir die Zahlen 0, 1, 2, ... zuordnen; dabei soll jedes folgende Blatt unter dem vorhergehenden liegen. Das Blatt n ($n = 1, 2, \ldots$) wird längs des n-ten Verzweigungsschnittes an das Blatt 0 geheftet. Die anderen Verzweigungsschnitte sind für das Blatt n ohne Bedeutung. Die folgende Abb. 3 zeigt im Schema, wie das Aneinanderheften erfolgt.

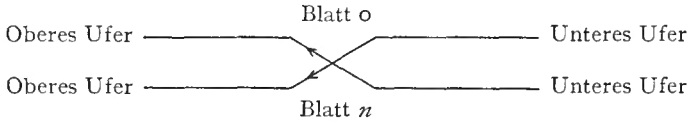


Abb. 3

Die Abb. 4 (siehe Tafel) stellt die z-Ebene mit den Bildern der reellen (schwarz) und der imaginären (rot) Achse der w-Ebene dar. Außerdem sind die den Verzweigungsschnitten der w-Ebene entsprechenden Kurven (blau, grün) eingezeichnet. Dem n-ten ($n = 1, 2, \ldots$) Blatt der w-Ebene entspricht der Teil der z-Ebene, der durch die dem n-ten Verzweigungsschnitt entsprechende Kurve begrenzt wird und die reelle Achse der z-Ebene nicht enthält. Dem Blatt 0 der w-Ebene ist der die reelle Achse enthaltende Teil der z-Ebene zugeordnet.

Für die Zeichnung wählen wir $e = \frac{1}{2}$. Es wird dann

$$\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} \approx 1{,}32 \text{ und } \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{1}{e} - \sqrt{1-e^2} \approx 0{,}45.$$

Aus (12) ergeben sich die Wertepaare:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	2,18	2,21	2,32	2,50	2,77	3,15
x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
y	3,40	3,71	4,12	4,71	5,79	

Aus (14) erhält man

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x)$	2,02	2,09	2,42	3,14	4,48	10,45	22,22
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+2\pi)$	50,50	27,22	16,95	15,71	19,37	35,58	70,70
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+4\pi)$	98,98	52,36	31,48	28,27	33,90	60,72	119,18
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+6\pi)$	147,46	77,49	46,01	40,84	48,43	85,85	167,66
$y\,(x)$	1,33	1,37	1,53	1,81	2,26	3,04	3,79
$y\,(x+2\pi)$	4,61	4,00	3,52	3,45	3,66	4,26	4,95
$y\,(x+4\pi)$	5,29	4,65	4,14	4,03	4,22	4,80	5,47
$y\,(x+6\pi)$	5,69	5,04	4,52	4,40	4,57	5,15	5,82

$z = z\,(w)$ ist eine algebromorphe Funktion. Einem (endlichen) w-Wert entspricht in jedem der unendlich vielen Blätter ein w-Punkt; diesen unendlich vielen w-Punkten sind im allgemeinen unendlich viele voneinander verschiedene z-Werte zugeordnet. Nur wenn w einen Verzweigungspunkt kennzeichnet, fallen zwei dieser unendlich vielen z-Werte zusammen. Die Größen ξ und η sind nach (4) eindeutige Funktionen von z. Im folgenden wird gezeigt, daß einem w-Wert zugehörige verschiedene z-Werte z_1 und z_2 im allgemeinen auch verschiedene Werte von ξ bzw. η zur Folge haben.

Nach Voraussetzung ist

$$z_1 \neq z_2 \quad \text{und} \quad w = z_1 - e \sin z_1 = z_2 - e \sin z_2 .$$

Aus $\xi_1 = \xi_2$ würde folgen $\cos z_1 = \cos z_2$, d. h. $z_1 = \pm z_2 + 2k\pi$.

$z_1 = z_2 + 2k\pi$ führt sofort auf $k = 0$ (Widerspruch),

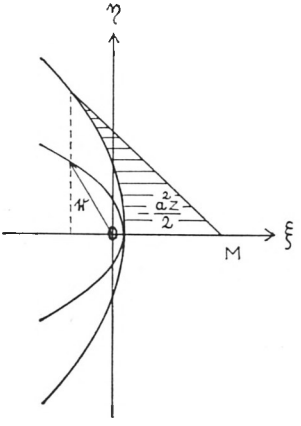
$z_1 = -z_2 + 2k\pi$ führt auf $w = 2k\pi - w$ oder $w = k\pi$ (spezieller w-Wert).

Aus $\eta_1 = \eta_2$ würde folgen $\sin z_1 = \sin z_2$, d. h. hier auch $z_1 = z_2$ (Widerspruch).

Demnach sind auch $\xi = \xi(w)$ und $\eta = \eta(w)$ algebromorphe Funktionen. Sie besitzen dieselbe Riemannsche Fläche wie die Funktion $z = z(w)$.

Im Spezialfall $e = 0$ (Kreis als Bahnkurve) ist $w = z$, $\xi(w) = a \cos w$ und $\eta(w) = a \sin w$. Die Funktionen $\xi(w)$ und $\eta(w)$ sind hier also eindeutig.

Hyperbel als Bahnkurve



a = reelle Halbachse der Hyperbel

e = numerische Exzentrizität der Hyperbel

$-\frac{a^2 z}{2}$ = schraffierte Fläche

c = Konstante der Flächengeschwindigkeit

$a > 0, \quad e > 1, \quad c \lessgtr 0.$

Abb. 5

Anstelle von (4) gilt jetzt

$$\begin{aligned} \xi &= -a \,\mathfrak{Cos}\, z + a e, \\ \eta &= a \sqrt{e^2 - 1}\, \mathfrak{Sin}\, z, \quad \text{also} \\ |\mathfrak{r}| &= r = a(e\, \mathfrak{Cos}\, z - 1). \end{aligned} \tag{17}$$

Die Keplersche Gleichung lautet jetzt

$$\frac{2ct}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} = e\, \mathfrak{Sin}\, z - z,$$

wenn die Zeitzählung wieder im Perihel beginnt.

Es sei noch bemerkt, daß man die letzte Gleichung aus der entsprechenden für die Ellipse dadurch erhält, daß man in dieser $\sqrt{1-e^2}$ durch $i\sqrt{e^2-1}$ und z durch iz ersetzt. Dabei werden, abgesehen vom Vorzeichen, aus den Gleichungen (4) die Gleichungen (17).

Durch die Abkürzung $w = \frac{2ct}{a^2\sqrt{e^2-1}}$ erhält die Keplersche Gleichung die Gestalt

$$w = e\,\mathfrak{Sin}\,z - z. \tag{18}$$

Es ist jetzt die Riemannsche Fläche der durch (18) definierten mehrdeutigen Funktion $z = z(w)$ zu konstruieren. Wir beschreiten dabei denselben Weg wie im vorigen Fall der Ellipse und lassen unerwähnt, was unverändert weitergilt.

Für die im Endlichen gelegenen Verzweigungspunkte der Funktion $z = z(w)$ muß die Beziehung

$$\frac{dw}{dz} = e\,\mathfrak{Cos}\,z - 1 = 0 \tag{19}$$

bestehen. Daraus entnimmt man die Kreuzungspunkte

$$z_k = i\left(\pm \arccos^* \frac{1}{e}{}^{1} + 2k\pi\right), \tag{20}$$

für die nach (17) $r = 0$ ist.

Wegen $\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_{z=z_k} = e\,\mathfrak{Sin}\,z_k = \pm i\sqrt{e^2-1} \neq 0$ sind diese Kreuzungspunkte einfach; ihnen entsprechen die einfachen Verzweigungspunkte

$$w_k = i\left(\pm\sqrt{e^2-1} \mp \arccos^* \frac{1}{e} - 2k\pi\right). \tag{21}$$

Spaltet man in (18) in Real- und Imaginärteil auf, so wird

$$\begin{aligned} u &= e\,\mathfrak{Sin}\,x\,\cos y - x \quad \text{und} \\ v &= e\,\mathfrak{Cos}\,x\,\sin y - y. \end{aligned} \tag{22}$$

---

[1] $\arccos^* \frac{1}{e}$ bedeute den zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegenden Wert von $\arccos \frac{1}{e}$.

Bilder der reellen Achse der w-Ebene

$v = 0$ ergibt

$$e \, \mathfrak{Cof}\, x \sin y - y = 0. \tag{23}$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $y \equiv 0$ bei beliebigem x. Damit wird

$u = e \, \mathfrak{Sin}\, x - x$; d. h. u wächst monoton von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft.

Die zweite Lösung von (23) hat man in

$$\mathfrak{Cof}\, x = \frac{y}{e \sin y}, \quad y \neq 0. \tag{24}$$

Wir können uns bei der Diskussion dieser Kurve auf $x \geqq 0$, $y > 0$ beschränken. Unter dieser Einschränkung erhält man aus (24) sicher keine x-Werte, wenn

$$(2k-1)\pi < y < 2k\pi, \quad \text{wobei} \quad k = 1, 2, \ldots$$

Für die Intervalle $(2k-2)\pi < y < (2k-1)\pi$ erhält man nur x-Werte, wenn zugleich

$$\frac{y}{e} \geqq \sin y \quad \text{(vgl. Abb. 6).} \tag{25}$$

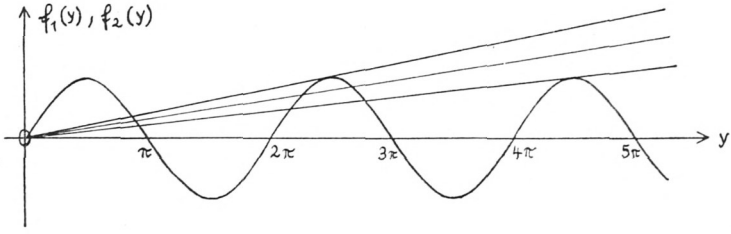


Abb. 6

Das kleinste k, für das bei vorgegebenem e die Ungleichung (25) für alle y des Intervalles

$(2k-2)\pi < y < (2k-1)\pi$ erfüllt ist, heiße k_0.

Es ist $k_0 \geqq 2$. Jedem e ist also genau ein $k_0(e)$ zugeordnet. Für spezielle e können sich die beiden Kurven

$f_1(y) = \frac{y}{e}$ und $f_2(y) = \sin y$ berühren. Es muß dann gelten

$$\frac{y}{e} = \sin y \quad \text{und} \quad \frac{1}{e} = \cos y; \text{ daraus folgt}$$

$y = \operatorname{tg} y$, wobei aber nur diejenige Lösung zu berücksichtigen ist, die im Intervall $(2k_0 - 2)\pi < y < \left(2k_0 - \frac{3}{2}\right)\pi$ liegt.

Das zugehörige spezielle e erhält man aus $\frac{1}{e} = \cos y$.

Es ist

$$y = \arccos^* \frac{1}{e} + (2k_0 - 2)\pi \text{ und daher } e \sin y = \sqrt{e^2 - 1}.$$

Setzt man diese Werte in $e \sin y - y = 0$ ein, so ergibt sich die folgende Gleichung für e:

$$\sqrt{e^2 - 1} - \arccos^* \frac{1}{e} - (2k_0 - 2)\pi = 0. \tag{26}$$

Ist (26) erfüllt, so entnimmt man aus (21) $w^+_{k_0 - 1} = 0$ und $w^-_{1 - k_0} = 0$.

Wir untersuchen noch die Funktion $f(e) = \sqrt{e^2 - 1} - \arccos^* \frac{1}{e}$. Es ist $\lim\limits_{e \to 1} f(e) = 0$. Für genügend große e verhält sich $f(e)$ wie $e - \frac{\pi}{2}$. Ferner ist $f'(e) = \sqrt{1 - \frac{1}{e^2}}$ und daher $\lim\limits_{e \to 1} f'(e) = 0$.

$f(e)$ ist somit eine monoton wachsende Funktion.

Die Kurve (24) hat die Asymptoten $y = k\pi (x \to \infty)$. Ferner gilt $x(y + 2\pi) > x(y)$, wenn $x(y)$ überhaupt vorhanden ist.

Durch Differenzieren folgt aus (24)

$$\frac{dx}{dy} \mathfrak{Sin}\, x = \frac{(\operatorname{tg} y - y) \cos y}{e \sin^2 y}. \tag{27}$$

Ist $\frac{y}{e} > \sin y$ und $\operatorname{tg} y - y = 0$, so verschwindet $\frac{dx}{dy}$ wegen $x \neq 0$.

Für $y = (4k - 3)\frac{\pi}{2}$ erhält man $\mathfrak{Cos}\, x = \frac{(4k - 3)\pi}{2e}$, falls $\frac{(4k - 3)\pi}{2e} > 1$.

Aus (27) folgt damit

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2}{\sqrt{[(4k-3)\pi]^2 - 4e^2}}.$$

Bilder der imaginären Achse der w-Ebene

$u = 0$ ergibt

$$e \,\mathfrak{Sin}\, x \cos y - x = 0. \tag{28}$$

Eine erste Lösung dieser Gleichung ist $x \equiv 0$ bei beliebigem y. Damit wird

$$v = e \sin y - y \quad \text{und} \quad \frac{dv}{dy} = e \cos y - 1.$$

Die zweite Lösung von (28) hat man in

$$\cos y = \frac{x}{e\,\mathfrak{Sin}\, x}, \quad x \not\equiv 0. \tag{29}$$

Zur Diskussion dieser Kurve genügt es, die Intervalle $x \geqq 0$ und $\arccos^* \frac{1}{e} \leqq y < \frac{\pi}{2}$ zu betrachten. Nimmt x zu, so nimmt auch y zu. Die Gerade $y = \frac{\pi}{2}$ ist Asymptote.

Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene

Als Verzweigungsschnitte in der w-Ebene wählen wir die Halbgeraden

$$v = \pm\sqrt{e^2 - 1} \mp \arccos^* \frac{1}{e} - 2k\pi, \; u \geqq 0 \; (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Den auf der imaginären Achse der z-Ebene liegenden Kreuzungspunkten $i \arccos^* \frac{1}{e}$, $i\left(-\arccos^* \frac{1}{e} + 2\pi\right)$, $i\left(\arccos^* \frac{1}{e} + 2\pi\right)$, ... ordnen wir der Reihe nach die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, ... zu. Die aus den Kreuzungspunkten 1, 2, 3, ... durch Spiegelung am Nullpunkt erhaltenen Kreuzungspunkte versehen wir mit den Zahlen 0, -1, -2, ... Den einem Kreuzungspunkt entsprechenden Verzweigungspunkt und den

zugehörigen Verzweigungsschnitt bezeichnen wir mit der Zahl des betreffenden Kreuzungspunktes.

Die folgende Abb. 7 zeigt die Verzweigungsschnitte in der w-Ebene (für $e = 10$).

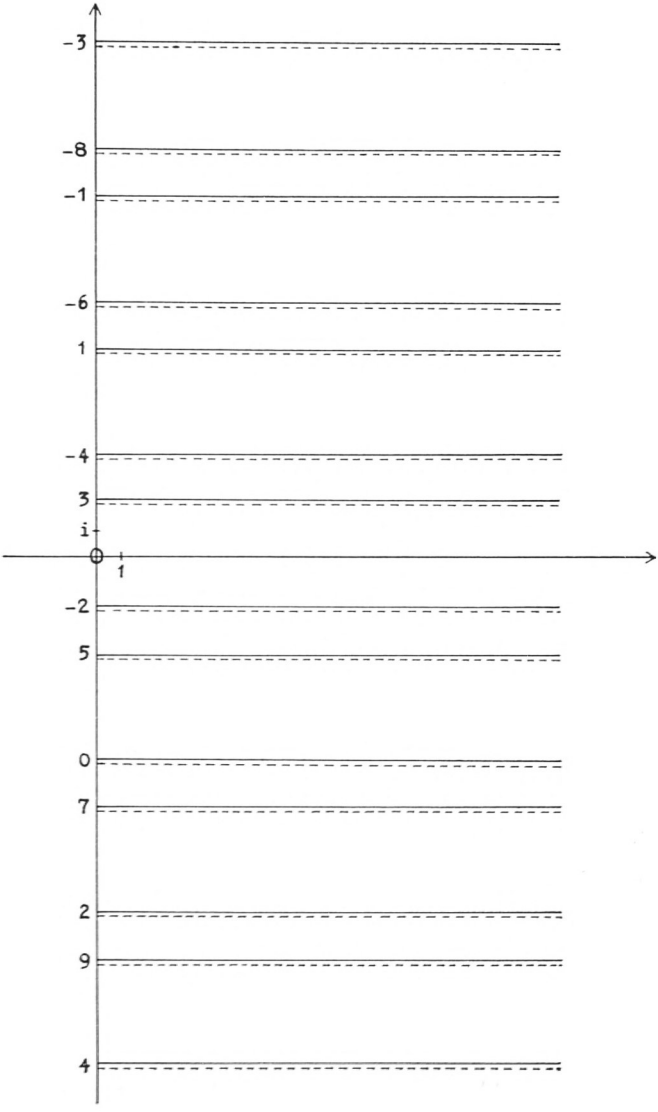


Abb. 7

Von den Bildern des Verzweigungsschnittes n ist nur dasjenige von Interesse, das den Kreuzungspunkt n enthält. Wir untersuchen zunächst die Kurve, die dem Verzweigungsschnitt 1

$$v = \sqrt{e^2 - 1} - \arccos^* \frac{1}{e} = A; \quad u \geqq 0 \quad \text{entspricht.}$$

$$v = A \quad \text{besagt} \quad e\,\mathfrak{Cof}\,x \sin y - y = A.$$

Da die gesuchte Kurve durch den Kreuzungspunkt $x = 0$, $y = \arccos^* \frac{1}{e}$ verlaufen muß, hat sie die Gleichung

$$\mathfrak{Cof}\,x = \frac{y + A}{e \sin y}, \quad 0 < y < \pi. \tag{30}$$

Die Gerade $g(y) = \frac{y + A}{e}$ berührt die Sinuslinie $h(y) = \sin y$ für $y = \arccos^* \frac{1}{e}$ (vgl. Abb. 8). Dieser y-Wert liefert nämlich

$$g(y) = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \quad \text{und} \quad h(y) = \frac{\sqrt{e^2 - 1}}{e} \quad \text{sowie}$$

$$g'(y) = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad h'(y) = \frac{1}{e}.$$

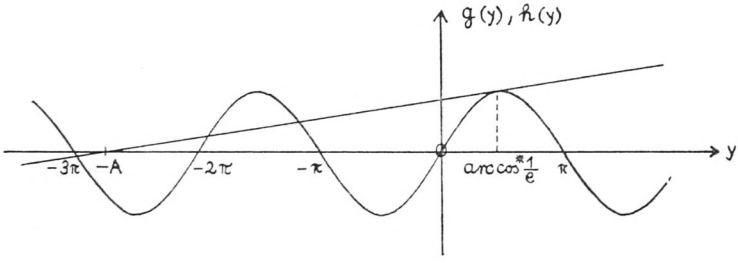


Abb. 8

Im Kreuzungspunkt 1 schneidet die Kurve (30) die imaginäre Achse unter dem Winkel $\frac{\pi}{4}$; dort wechselt also x das Vorzeichen.

Die Geraden $y = 0$ und $y = \pi$ sind Asymptoten der Kurve. Damit $u = e\,\mathfrak{Sin}\,x \cos y - x$ sowohl für $x \to +\infty$ als auch für $x \to -\infty$ gegen $+\infty$ strebt, muß

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x \to -\infty} y(x) = \pi \quad \text{sein.}$$

Nunmehr kann man statt (30) besser schreiben

$$x = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}^* \frac{y + A}{e \sin y} \quad \text{für} \quad 0 < y \leqq \arccos^* \frac{1}{e}$$

und (31)

$$x = -\mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cos}^* \frac{y + A}{e \sin y} \quad \text{für} \quad \arccos^* \frac{1}{e} \leqq y < \pi.$$

Dem Verzweigungsschnitt $v = A + 2k\pi$, $u \geqq 0$ entspricht die Kurve

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{y + A + 2k\pi}{e \sin y}, \quad -2k\pi < y < -(2k-1)\pi. \tag{32}$$

Mit $y + 2k\pi = \tilde{y}$ geht (32) über in

$$\mathfrak{Cos}\, x = \frac{\tilde{y} + A}{e \sin \tilde{y}}, \quad 0 < \tilde{y} < \pi.$$

Die Kurve (32) erhält man also, wenn die Kurve (31) um die Strecke $-2k\pi$ in Richtung der positiven imaginären Achse verschoben wird.

Die dem Verzweigungsschnitt $v = -A + 2k\pi$, $u \geqq 0$ entsprechende Kurve erhält man, indem man die dem Verzweigungsschnitt $v = A - 2k\pi$, $u \geqq 0$ entsprechende an der reellen Achse spiegelt.

Die den Verzweigungsschnitten entsprechenden Kurven werden durch eine Gerade festgelegt, welche die Sinuslinie der Abb. 8 berührt, die zu diesem Intervall gehörigen Bilder der reellen Achse durch eine Gerade, welche die Sinuslinie schneidet oder nicht schneidet. Für ein bestimmtes y ist deshalb im ersten Fall $|x|$ für die dem Verzweigungsschnitt entsprechende Kurve größer als $|x|$ für das betreffende Bild der positiven reellen Achse. Im zweiten Fall ist es umgekehrt.

In dem Sonderfall, wo $A - (2k_0 - 2)\pi = 0$, ist $w^+_{k_0-1} = w^-_{1-k_0} = 0$. Die durch die Kreuzungspunkte $z^+_{k_0-1}$ und $z^-_{1-k_0}$ verlaufenden Bilder der positiven reellen Achse der w-Ebene sind dann zugleich Kurven, die Verzweigungsschnitten entsprechen.

Konstruktion der Riemannschen Fläche

Wir fertigen die w-Ebene in unendlich vielen Exemplaren (Blättern) an, denen wir die Zahlen 0, 1, —1, 2, —2, . . . zuordnen; dabei soll mit dem Blatt 0 beginnend ein Blatt mit einer größeren Nummer unter einem solchen mit kleinerer Nummer liegen. Das Blatt n wird längs des Verzweigungsschnittes $(n + 1)$ an das Blatt $(n + 1)$ geheftet. Längs des Verzweigungsschnittes n hängt es mit dem Blatt $(n - 1)$ zusammen. Die anderen Verzweigungsschnitte sind für das Blatt n ohne Bedeutung.

Die Abb. 9 (siehe Tafel) stellt die z-Ebene mit den Bildern der reellen (schwarz) und der imaginären (rot) Achse der w-Ebene dar. Außerdem sind die den Verzweigungsschnitten der w-Ebene entsprechenden Kurven (grün, blau, bzw. gestrichelt) eingezeichnet. Dem Blatt n der w-Ebene entspricht der Teil der z-Ebene, der durch die den Verzweigungsschnitten n und $(n + 1)$ entsprechenden Kurven begrenzt wird.

Für die Zeichnung wählen wir $e = 10$. Es wird dann

$$\arccos^* \frac{1}{e} \approx 1{,}47 \quad \text{und} \quad \sqrt{e^2 - 1} - \arccos^* \frac{1}{e} = A \approx 8{,}48.$$

Aus (24) erhält man

y	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\mathfrak{Cof}\, x(y)$	0,10	0,10	0,12	0,16	0,24	0,52	1,11
$\mathfrak{Cof}\, x(y + 2\pi)$	2,52	1,37	0,85	0,79	0,97	1,78	3,53
$\mathfrak{Cof}\, x(y + 4\pi)$	4,95	2,62	1,57	1,41	1,69	3,03	5,96
$\mathfrak{Cof}\, x(y + 6\pi)$	7,38	3,88	2,30	2,04	2,42	4,29	8,39
$x(y)$	*	*	*	*	*	*	0,44
$x(y + 2\pi)$	1,58	0,84	*	*	*	1,18	1,93
$x(y + 4\pi)$	2,28	1,62	1,02	0,88	1,12	1,77	2,47
$x(y + 6\pi)$	2,69	2,03	1,48	1,34	1,53	2,14	2,82

Es ist hier $k_0 = 3$. Die Gleichung $\frac{y}{10} = \sin y$ hat die positiven Lösungen

$$y_1 \approx 2{,}85, \quad y_2 \approx 7{,}06, \quad y_3 \approx 8{,}42.$$

Aus (31) erhält man

y	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\mathfrak{Cof}\, x$	3,38	1,80	1,10	1,01	1,22	2,22	4,39
x	1,89	1,19	0,44	−0,13	−0,65	−1,44	−2,16

$z = z(w)$ ist eine algebromorphe Funktion. Ganz ähnlich wie auf Seite 71 kann man nachweisen, daß auch die Funktionen $\xi = \xi(w)$ und $\eta = \eta(w)$ algebromorph sind. Sie besitzen dieselbe Riemannsche Fläche wie die Funktion $z(w)$.

Parabel als Bahnkurve

p = Parameter der Parabel

φ = wahre Anomalie

c = Konstante der Flächengeschwindigkeit

$$p > 0, \quad c \lesseqgtr 0.$$

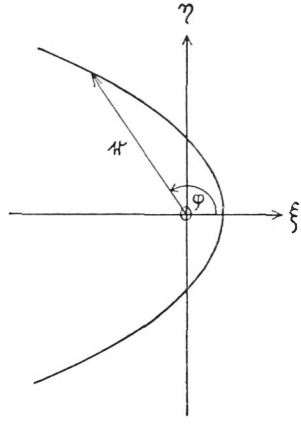


Abb. 10

Für die Komponenten von $\mathfrak{r}$ ergibt sich

$$\xi = \frac{p}{2}\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$\eta = p \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}; \text{ weiterhin ist} \tag{33}$$

$$|\mathfrak{r}| = r = \frac{p}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\varphi}{2}\right).$$

Wenn man mit der Zeitzählung wieder im Perihel beginnt, legt die Gleichung

$$\frac{12ct}{p^2} = \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2} + 3 \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \tag{34}$$

den zeitlichen Ablauf fest.

Mit den Abkürzungen $z = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ und $w = \frac{12ct}{p^2}$ lauten die letzten Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{p}{2}(1 - z^2), \\ \eta &= pz, \end{aligned} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{2}(1 + z^2) \quad \text{und} \\ w &= z^3 + 3z. \end{aligned} \tag{36}$$

$\xi = \xi(w)$ und $\eta = \eta(w)$ erweisen sich jetzt als algebraische Funktionen. Es bestehen die Gleichungen

$$\begin{aligned} 8\xi^3 - 36p\xi^2 + 48p^2\xi + p^3w^2 - 16p^3 &= 0, \\ \eta^3 + 3p^2\eta - p^3w &= 0. \end{aligned}$$

ξ und η sind nach (35) eindeutige Funktionen von z. Die Funktionen $\xi = \xi(w)$ und $\eta = \eta(w)$ haben deshalb dieselbe Riemannsche Fläche wie die durch (36) definierte Funktion $z = z(w)$. Bezüglich dieser Riemannschen Fläche sei auf W. F. Osgood[1] verwiesen.

Von Interesse ist noch die Frage, ob man die Gleichungen (33) und (34) aus den Gleichungen (4) und (5) durch geeignete Grenzübergänge gewinnen kann. Wir führen in diese Gleichungen zunächst den Parameter $p = a(1 - e^2)$ der Ellipse ein. Es wird dann

$$r = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e \cos z).$$

---

[1] Lehrbuch der Funktionentheorie, 1. Bd., 2. Aufl. (1912), S. 368–376. Unsere Gleichung (36) erhält die dort befindliche Gestalt, wenn z durch $-iw$ und w durch iz ersetzt wird.

Zwischen der exzentrischen Anomalie z und der wahren φ bei der Ellipse besteht die Beziehung

$$\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.$$

Wir erhalten somit

$$r = \frac{p}{1-e^2}\left[1 - e\,\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}}\right] = p\,\frac{1+\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}{1+e+(1-e)\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}}$$

und daraus für $e \to 1$ die Gleichung $r = \frac{p}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}\right)$. Genauso zeigt man, daß für $e \to 1$ die beiden restlichen Gleichungen von (4) in die entsprechenden von (33) übergehen.

Wegen $\operatorname{tg}\frac{z}{2} = \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ und $e \to 1$ gilt $z \to 0$, und zwar so, daß $\frac{z}{\sqrt{1-e}}$ gegen $\sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ strebt, weil

$$\frac{\frac{z}{2}}{\sqrt{1-e}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{1+e}}\cdot\frac{\frac{z}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z}{2}}.$$

Die Keplersche Gleichung für die Ellipse schreiben wir in der Form

$$\frac{3c\sqrt{2}(1+e)^{\frac{3}{2}}t}{p^2} = \frac{3(z-e\sin z)}{\sqrt{2}(1-e)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2}}\left[\frac{z}{\sqrt{1-e}}\right] + \frac{e}{2\sqrt{2}}\left[\frac{z}{\sqrt{1-e}}\right]^3 - \frac{3e}{\sqrt{2}}\left[\frac{z}{\sqrt{1-e}}\right]^3\cdot\left\{\frac{z^2}{120} - \cdots\right\}.$$

Wegen $e \to 1$, $z \to 0$ und $\frac{z}{\sqrt{1-e}} \to \sqrt{2}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ geht diese Gleichung über in (34).

Gerade als Bahnkurve

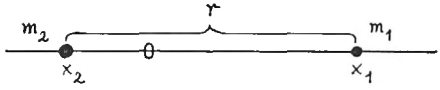


Abb. 11

Wegen $x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} r$ und $x_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} r$ ist hier die Bewegung der beiden Massenpunkte bekannt, wenn man die Funktion $r = r(t)$ kennt.

Nach dem Energiesatz (Gesamtenergie $= E$) muß gelten

$$\frac{m_1}{2}\left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \frac{m_2}{2}\left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 = \frac{k m_1 m_2}{r} + E, \text{ d. h.}$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2k(m_1 + m_2)}{r} + \frac{2E(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}.$$

Mit der Abkürzung $A = 2k(m_1 + m_2) > 0$ lautet diese Gleichung

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = A\left[\frac{1}{r} + \frac{E}{k m_1 m_2}\right]. \tag{37}$$

Wir haben nun die drei Fälle $E \gtreqless 0$ zu unterscheiden.

Im *Fall* $E > 0$ setzen wir $\frac{E}{k m_1 m_2} = \frac{1}{2a}$ $(a > 0)$ und erhalten für (37) die Gestalt

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = A\left[\frac{1}{r} + \frac{1}{2a}\right]. \tag{38}$$

Nunmehr schreiben wir $r = a(\mathfrak{Cof}\, z - 1)$ und ermitteln die Größe z als Funktion der Zeit t.

Es ist $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} = a\left(\frac{dz}{dt}\right) \mathfrak{Sin}\, z.$$

Wenn wir die Ausdrücke für r und $\frac{dr}{dt}$ in (38) einsetzen, ergibt sich nach einigen einfachen Umformungen

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{A}{2a^3}}\, dt &= (\mathfrak{Cos}\, z - 1)\, dz, \quad \text{d. h.} \\ \sqrt{\frac{A}{2a^3}}\, t &= \mathfrak{Sin}\, z - z; \end{aligned} \tag{39}$$

dabei ist die Zeitzählung so gewählt, daß dem Wert $z = 0$ der Wert $t = 0$ entspricht.

Mit der Abkürzung $w = \sqrt{\frac{A}{2a^3}}\, t$ lautet (39)

$$w = \mathfrak{Sin}\, z - z. \tag{40}$$

Die Lösung der Differentialgleichung (38) wird also durch die beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} r &= a(\mathfrak{Cos}\, z - 1) \quad \text{und} \\ w &= \mathfrak{Sin}\, z - z \quad \text{dargestellt.} \end{aligned} \tag{41}$$

Im *Fall* $E = 0$ hat (37) die Form $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{A}{r}$. Wenn dem Wert $r = 0$ die Zeit $t = 0$ entsprechen soll, erhält man daraus

$$r^{\frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{A}}{2}\, t \quad \text{oder} \quad r^3 - \frac{9A}{4}\, t^2 = 0.$$

$r = r(t)$ ist also eine (besonders einfache) algebraische Funktion.

Im Fall $E < 0$ setzen wir $\frac{E}{k m_1 m_2} = -\frac{1}{2a}$ $(a > 0)$ und erhalten

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = A\left[\frac{1}{r} - \frac{1}{2a}\right]. \tag{42}$$

Ähnlich wie im ersten Fall kann man hier zeigen, daß die Lösung von (42) durch die Gleichungen

$$\begin{aligned} r &= a(1 - \cos z) \quad \text{und} \\ w &= z - \sin z \quad \text{dargestellt wird.} \end{aligned} \tag{43}$$

Ersetzt man in (43) z durch $-iz$ und w durch iw sowie r durch $-r$, so erhält man (41) und kann sich demnach auf (43) beschränken.

Es ist also die Riemannsche Fläche der durch $w = z - \sin z$ definierten mehrdeutigen Funktion $z = z(w)$ zu konstruieren. Wir verfahren genauso wie im Fall der Ellipse und können uns bei Ergebnissen, wo e nur durch 1 zu ersetzen ist, kurz fassen.

Wir erhalten jetzt die Kreuzungspunkte

$$z_k = 2k\pi, \tag{44}$$

für die nach (43) $r = 0$ ist.

Wegen $\left(\frac{d^2 w}{dz^2}\right)_{z=z_k} = 0$ und $\left(\frac{d^3 w}{dz^3}\right)_{z=z_k} = \cos z_k = 1$ sind diese Kreuzungspunkte zweifach; ihnen entsprechen die zweifachen Verzweigungspunkte

$$w_k = 2k\pi. \tag{45}$$

Bilder der reellen Achse der w-Ebene

$v = 0$ ergibt

$$y - \cos x \, \mathfrak{Sin}\, y = 0. \tag{46}$$

Eine erste Lösung ist $y \equiv 0$ bei beliebigem x. Damit wird $u = x - \sin x$; d. h. u wächst monoton von $-\infty$ bis $+\infty$, wenn x von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft.

Die zweite Lösung von (46) lautet

$$\cos x = \frac{y}{\mathfrak{Sin}\, y}, \quad y \not\equiv 0. \tag{47}$$

Es genügt, die positiven y-Werte zu betrachten, die dem Intervall $0 < x < \frac{\pi}{2}$ entsprechen. Man erhält $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$. Da $z = 0$ ein zweifacher Kreuzungspunkt ist, schneidet dort die Kurve die reelle Achse der z-Ebene unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$. Die Gerade $x = \frac{\pi}{2}$ ist Asymptote.

Bilder der imaginären Achse der w-Ebene

$u = 0$ ergibt

$$x - \sin x \, \mathfrak{Cos}\, y = 0. \tag{48}$$

Eine erste Lösung ist $x \equiv 0$ bei beliebigem y. Damit wird $v = y - \mathfrak{Sin}\, y$; d. h. v fällt monoton von $+\infty$ nach $-\infty$, wenn y von $-\infty$ nach $+\infty$ läuft.

Die zweite Lösung von (48) lautet

$$\mathfrak{Cos}\, y = \frac{x}{\sin x}, \quad x \not\equiv 0. \tag{49}$$

Man kann sich auf $x \geqq 0$, $y \geqq 0$ beschränken.

Es ergeben sich dann nur y-Werte, wenn $0 \leqq x < \pi$ oder $2k\pi < x < (2k+1)\pi$, wobei $k = 1, 2, \ldots$

Die Geraden $x = k\pi$ sind Asymptoten. Es ist $\lim\limits_{x \to 0} y(x) = 0$.

Die Kurve schneidet im Punkt $z = 0$ die imaginäre Achse der z-Ebene unter dem Winkel $\frac{\pi}{3}$.

Verzweigungsschnitte in der w-Ebene und entsprechende Kurven in der z-Ebene

Als Verzweigungsschnitte in der w-Ebene wählen wir die Halbgeraden

$$u = 2k\pi, \quad v \geqq 0 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

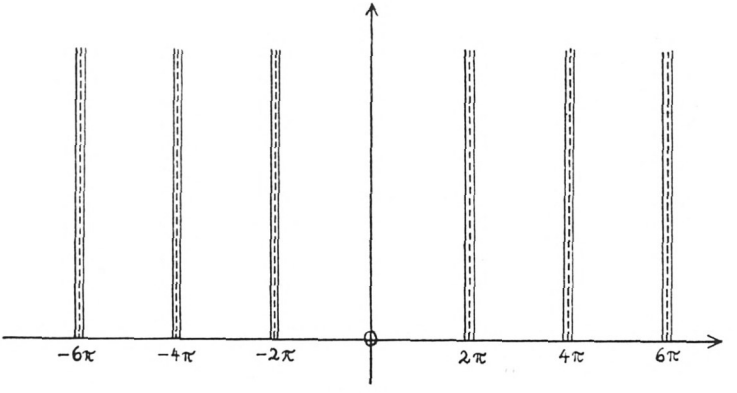


Abb. 12

Von den Bildern des Verzweigungsschnittes $u = 2k\pi$, $v \geqq 0$ greifen wir nur dasjenige heraus, das den Kreuzungspunkt $z = 2k\pi$ enthält.

$$u = 2k\pi \text{ besagt } x - \sin x \,\mathfrak{Cof}\, y = 2k\pi. \tag{50}$$

Wir erhalten zunächst $x \equiv 2k\pi$ und damit $v = y - \mathfrak{Sin}\, y$.

$x \equiv 2k\pi$, $-\infty \leqq y \leqq 0$ ist demnach eine passende Lösung von (50).

Eine weitere passende Lösung von (50) besitzen wir in

$$\mathfrak{Cof}\, y = \frac{x - 2k\pi}{\sin x}, \text{ wobei } (2k-1)\pi < x < (2k+1)\pi \text{ und } 0 \leqq y \leqq \infty.$$

Mit $x - 2k\pi = \tilde{x}$ können wir dafür auch schreiben

$$y = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof}^* \frac{\tilde{x}}{\sin \tilde{x}}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Die Geraden $\tilde{x} = -\pi$ und $\tilde{x} = \pi$ sind Asymptoten dieser Kurve.

Konstruktion der Riemannschen Fläche

Wir fertigen die w-Ebene in unendlich vielen Exemplaren (Blättern) an, denen wir die Zahlen 0, 1, −1, 2, −2, . . . zuordnen; dabei soll mit dem Blatt 0 beginnend ein Blatt mit einer größeren Nummer unter einem solchen mit kleinerer Nummer liegen. Am zweifachen Verzweigungspunkt k hängen die drei Blätter $(2k-1)$, $2k$ und $(2k+1)$ zusammen (vgl. die folgende Abb. 13).

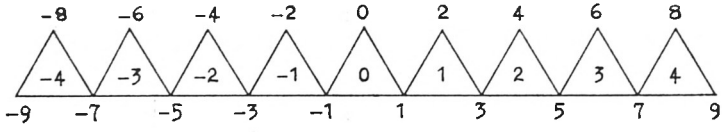


Abb. 13

Die nächste Abb. 14 zeigt im Schema, wie z. B. die Blätter 1, 2, 3 aneinandergeheftet sind.

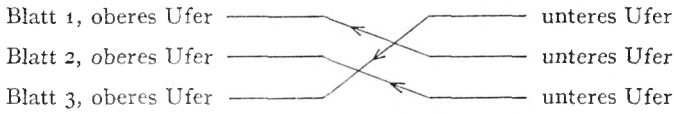


Abb. 14

Für das Blatt k sind nur diejenigen Verzweigungsschnitte von Bedeutung, die in der Abb. 13 von der Nummer k ausgehen.

Die Abb. 15 (siehe Tafel) stellt die z-Ebene mit den Bildern der reellen (schwarz) und der imaginären (rot) Achse der w-Ebene dar. Außerdem sind die den Verzweigungsschnitten der w-Ebene entsprechenden Kurven (grün, blau, blau gestrichelt) eingezeichnet. Die Kurven, die den von der Nummer k in Abb. 13 ausgehenden Verzweigungsschnitten entsprechen, grenzen den Teil der z-Ebene ab, der dem Blatt k der w-Ebene zugeordnet ist.

Aus (47) erhalten wir die Wertepaare:

x	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
y	0	0,35	0,71	1,09	1,53	2,04
x	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	
y	2,35	2,71	3,17	3,81	4,94	

Aus (49) erhält man

x	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{2\pi}{6}$	$\frac{3\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x)$	1,01	1,05	1,21	1,57	2,42	5,23	11,11
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+2\pi)$	25,25	13,61	8,48	7,86	9,69	17,79	35,35
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+4\pi)$	49,49	26,18	15,74	14,14	16,95	30,36	59,59
$\mathfrak{Cof}\, y\,(x+6\pi)$	73,72	38,75	23,01	20,42	24,22	42,93	83,83
$y\,(x)$	0,14	0,31	0,64	1,02	1,53	2,34	3,10
$y\,(x+2\pi)$	3,92	3,30	2,83	2,75	2,96	3,57	4,26
$y\,(x+4\pi)$	4,59	3,96	3,45	3,34	3,52	4,11	4,78
$y\,(x+6\pi)$	4,99	4,35	3,83	3,71	3,88	4,45	5,12

$z = z(w)$ ist eine algebromorphe Funktion. Genauso wie auf Seite 71 weist man nach, daß auch die Funktion $r = r(w)$ algebromorph ist. Sie besitzt dieselbe Riemannsche Fläche wie die eben untersuchte Funktion $z = z(w)$.

Untersuchung der Randstelle über $w = \infty$

Bei den im Fall der Ellipse, Hyperbel und Geraden auftretenden algebromorphen Funktionen häufen sich die algebraischen Verzweigungspunkte im Punkt $w = \infty$. Nach F. Iversen[1] sind die transzendenten Verzweigungspunkte der Umkehrungsfunktion einer meromorphen Funktion $f(z)$ die Zielwerte[2] von $f(z)$. In unserem Fall ist die erwähnte Funktion sogar ganz, nämlich $f(z) = w(z) = z - e \sin z$. Es ist

$$\begin{aligned} |w| = |z - e \sin z| &\geqq \left| e\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 y + \sin^2 x} - \sqrt{x^2 + y^2} \right| \\ &= \sqrt{x^2 + y^2} \left| \frac{e\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 y + \sin^2 x}}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right| . \end{aligned}$$

Daraus ersieht man, daß für beschränktes x mit $|y|$ auch $|w|$ gegen ∞ strebt. Ist dagegen x nicht beschränkt, so durchläuft $|x|$ sicher die Werte $n\pi$ $(n > n_0 > 0)$, für die $|Re(w)| = n\pi$. Wenn es also zu einem solchen Weg überhaupt einen Zielwert gibt, so kann dieser nur ∞ sein. Die Funktion $w(z) = z - e \sin z$ hat somit den einzigen Zielwert ∞. Die Umkehrungsfunktion $z = z(w)$ besitzt $w = \infty$ als einzigen transzendenten Verzweigungspunkt.

Dem Äußeren eines Kreises $|w| = R$ (mit auch noch so großem R) entspricht in der z-Ebene ein nicht-beschränktes Gebiet von unendlich hohem Zusammenhang. Nach der Einteilung von F. Iversen ist die Stelle $w = \infty$ direkt kritisch zweiter Art.

In den folgenden Abb. 16, 17 bzw. 18 sind einige Höhenlinien $|z - e \sin z| = \text{const.}$, $|e\,\mathfrak{Sin}\, z - z| = \text{const.}$ bzw. $|z - \sin z| = \text{const.}$ skizziert.

---

[1] F. Iversen, Recherches sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes. Diss., Helsingfors 1914.

[2] Siehe z. B. J. Lense, Reihenentwicklungen in der mathematischen Physik, 3. Aufl. (1952), S. 45.

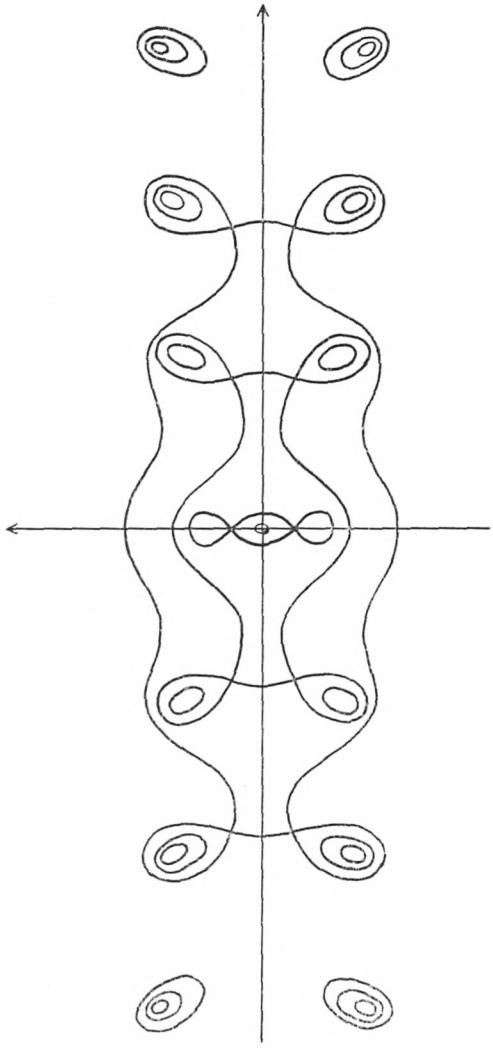


Abb. 16

$|z - e \sin z| = \text{const.} = |w_0|, \quad |w_1|, \quad |w_2|$; vgl. (9).

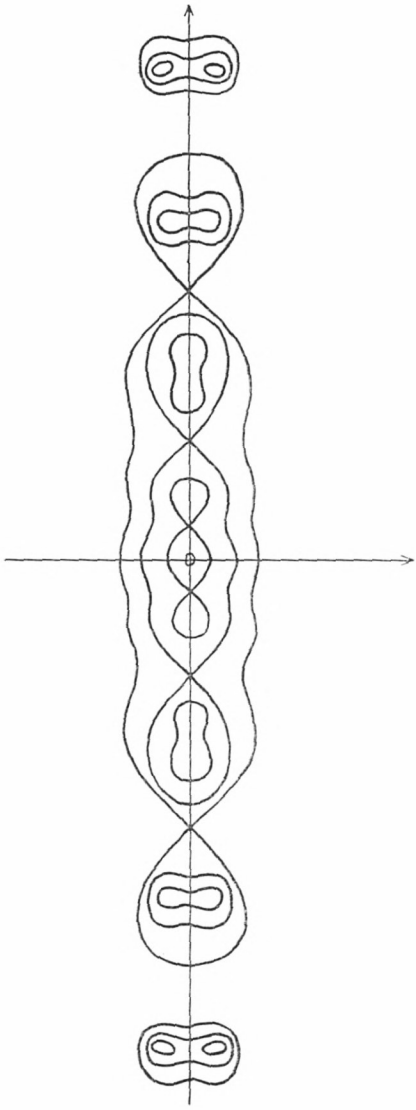


Abb. 17

$|e\,\mathfrak{Sin}\,z - z| = \text{const.} = A,\ A + 2\pi,\ A + 4\pi.$

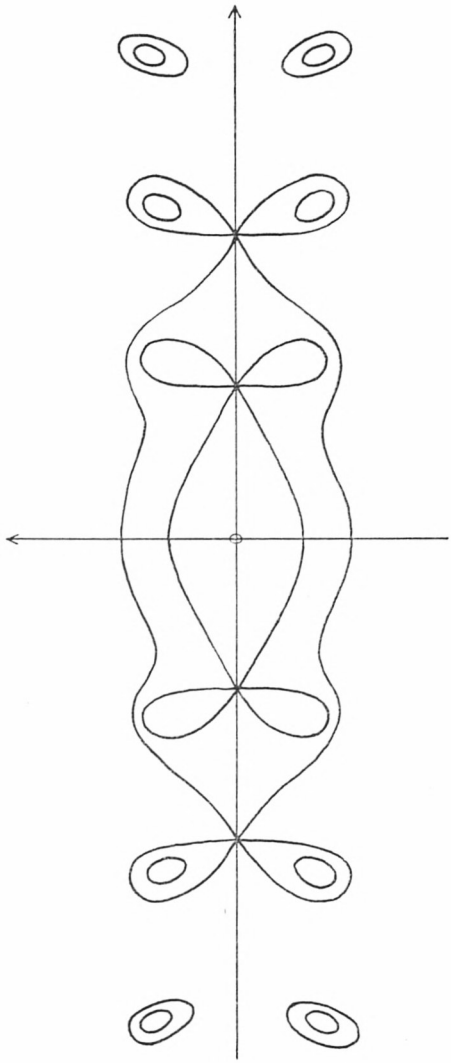


Abb. 18

$|z - \sin z| = \text{const.} = 2\pi,\ 4\pi.$

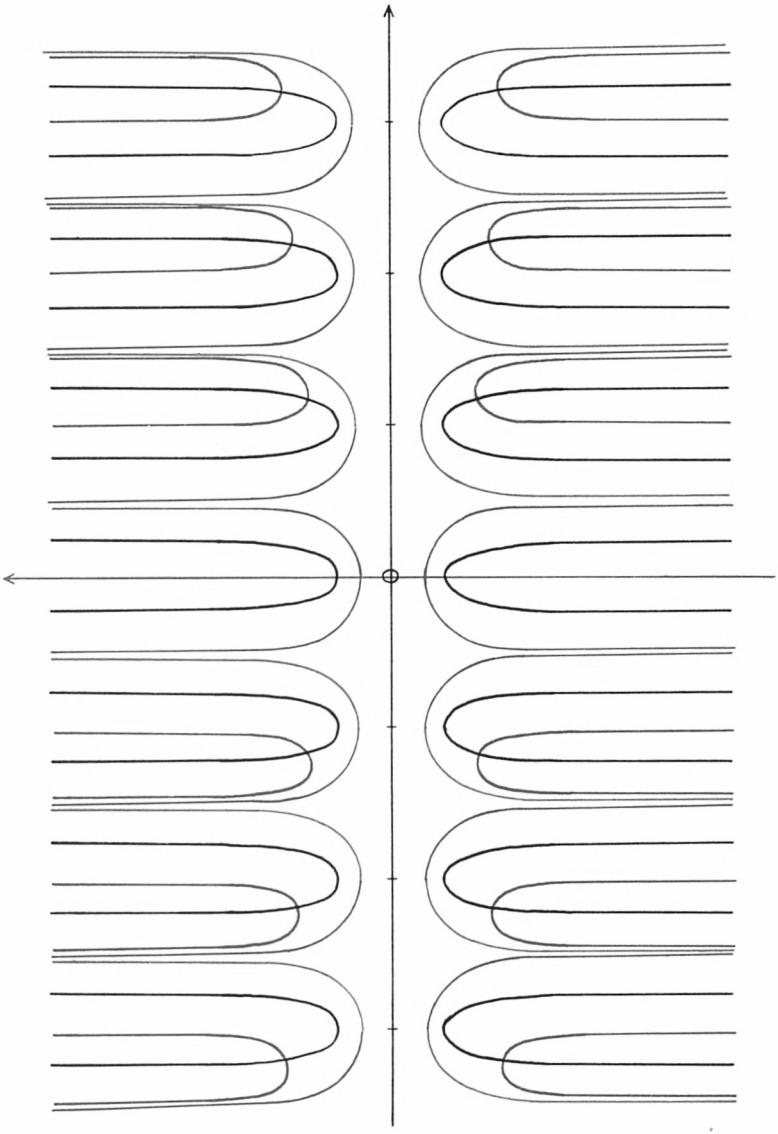


Abb. 4

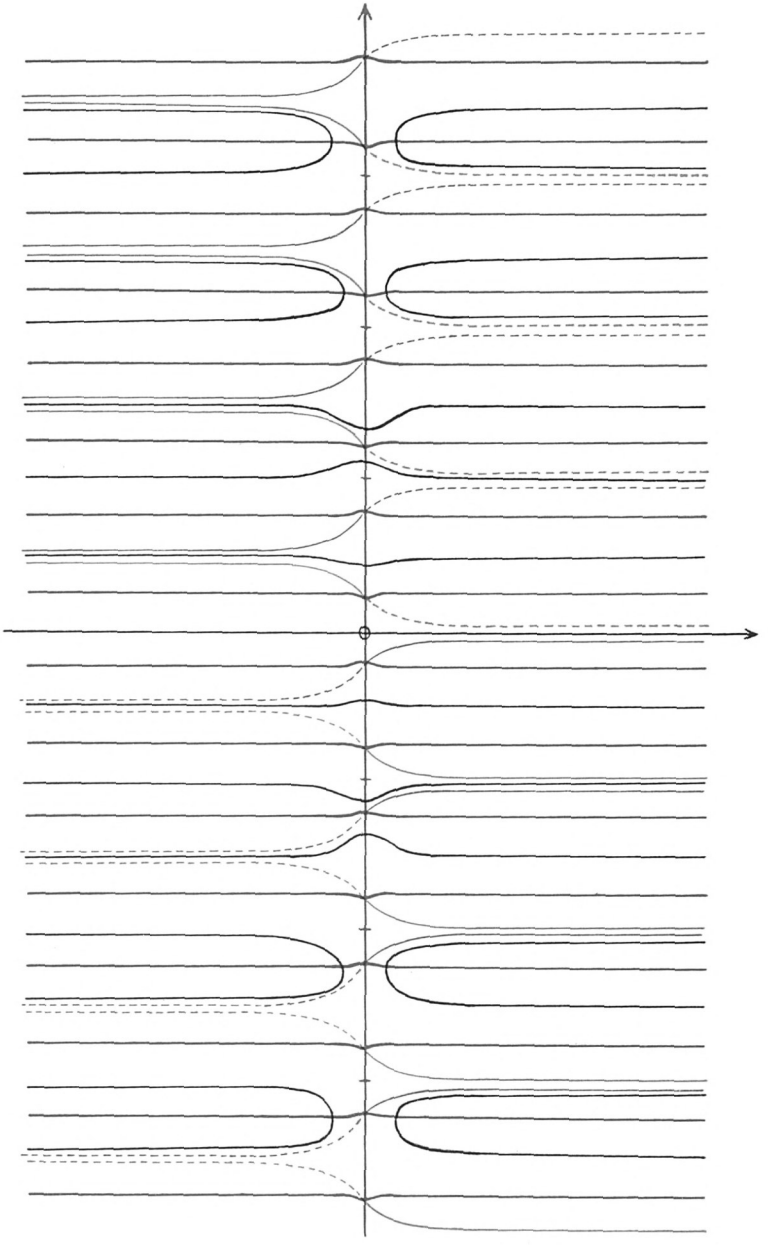


Abb. 9

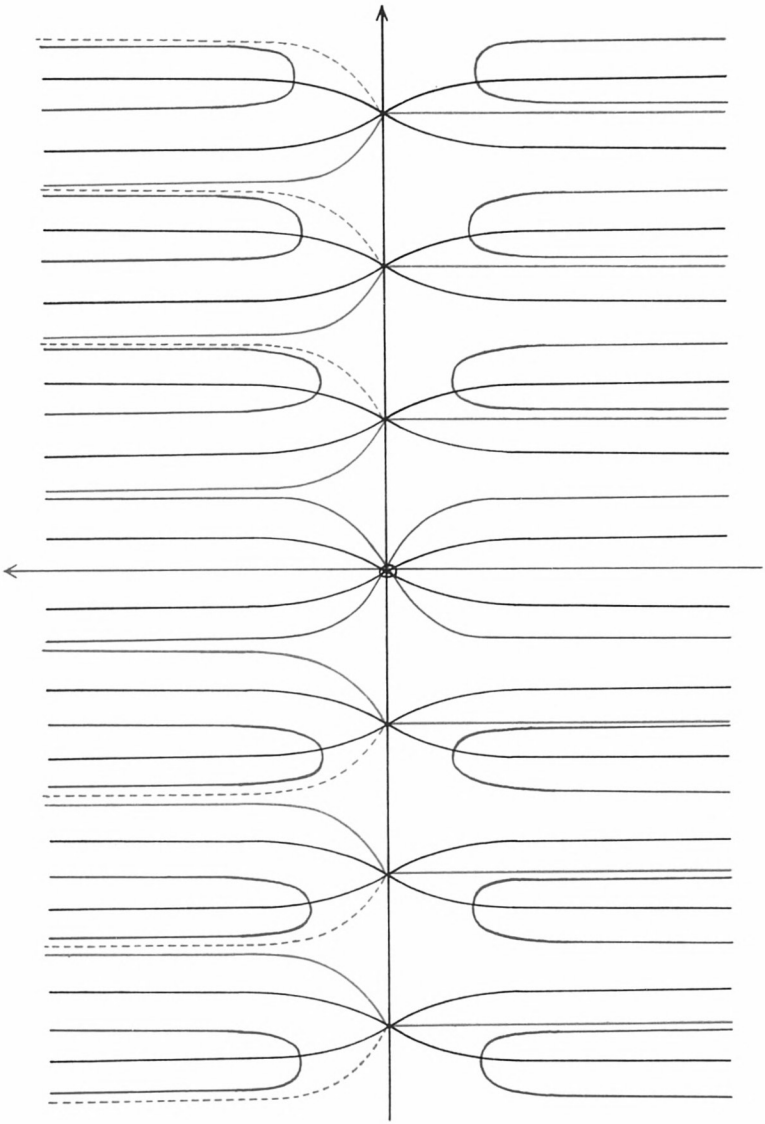


Abb. 15

ZOBODAT - www.zobodat.at

Zoologisch-Botanische Datenbank/Zoological-Botanical Database

Digitale Literatur/Digital Literature

Zeitschrift/Journal: Sitzungsberichte der mathematisch-physikalischen Klasse der Bayerischen Akademie der Wissenschaften München

Jahr/Year: 1961

Band/Volume: 1960

Autor(en)/Author(s): Zuser Karl

Artikel/Article: Die Riemannsche Fläche des Zweikörperproblems 61-93