BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1960

MÜNCHEN 1961

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über eine die Kategorie der Gruppen umfassende Kategorie

Von **Fridolin Hofmann** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Georg Nöbeling am 8. Juli 1960

Übersicht

Einleitung

Die von S. Eilenberg und S. MacLane eingeführten Kategorien sind aus zwei Gründen wichtig geworden: erstens machten sie es möglich, gewisse Theorien, wie zum Beispiel die Theorie der Homologie- und Cohomologiemoduln, in solcher Allgemeinheit zu entwickeln, daß die für die Anwendungen interessanten Spezialtheorien als Sonderfälle darin enthalten sind und daher nicht mehr gesondert entwickelt werden müssen; zweitens trat die beherrschende Rolle gewisser Dualitäten zutage, die in konkreten Fällen, wie zum Beispiel der Gruppentheorie, zwar bekannt, aber methodisch nicht genügend ausgenützt waren.

Bisher wurden die Kategorien so aufgebaut, daß sie als Beispiel zwar die abelschen Gruppen, nicht aber alle Gruppen umfassen. In der vorliegenden Arbeit wird die Theorie der Kategorien so entwickelt, daß die Kategorie der Gruppen ein Beispiel für diese Kategorien ist. Darüber hinaus werden in unseren Kategorien abelsche Objekte definiert, die im Spezialfall der Kategorie der Gruppen gerade die abelschen Gruppen liefern.

In den ersten vier Abschnitten entwickeln wir zunächst eine selbstduale Theorie und beweisen vor allem Sätze, die die Handhabung des Kalküls erleichtern. Im fünften, entscheidenden Abschnitt werden die normalen Monomorphismen bzw. die conormalen Epimorphismen definiert und es werden für sie zwei weitere Axiome eingeführt. Hierbei geht naturgemäß die Selbstdualität der Theorie verloren. Im sechsten Abschnitt untersuchen wir die normalen Monomorphismen genauer, im siebenten Abschnitt führen wir den Begriff der exakten Sequenz ein. Im letzten Abschnitt schließlich sondern wir die bereits erwähnte abelsche Teilkategorie aus, der im Falle der Kategorie der Gruppen die Teilkategorie der abelschen Gruppen entspricht.

§ 1. Grundbegriffe

1.1: Kategorien

Eine Kategorie $\mathfrak{C}$ besteht aus

a) einer Klasse, deren Elemente A, B, ... wir Objekte nennen;

b) einer Funktion Hom, die jedem geordneten Paar A, B von Objekten eine Menge Hom(A, B) zuordnet; die Elemente u, v, ... von Hom(A, B) nennen wir *Morphismen*; statt $u \in \mathrm{Hom}(A, B)$ schreiben wir auch $u: A \to B$;

c) einer Funktion, die je zwei Morphismen $u : A \to B$, $v : B \to C$ einen Morphismus $vu : A \to C$ zuordnet; diese *Komposition* der Morphismen genüge folgenden **Axiomen:**

(I) *für jedes Objekt A existiert ein $i_A : A \to A$ derart, daß für alle $u : A \to B$ gilt $u i_A = u$ und für alle $v : B \to A$ gilt $i_A v = v$*; wir bezeichnen diesen eindeutig bestimmten Morphismus i_A aus Hom (A, A) als *Identität;*

(II) *die Komposition der Morphismen ist assoziativ;*

(III) *sind A, B und A', B' verschiedene Paare von Objekten, so ist $Hom(A, B) \cap Hom(A', B') = \theta$* (m. a. W.: bei einem Morphismus $u : A \to B$ sind A und B durch u eindeutig bestimmt).

Es liege für das Folgende eine feste Kategorie $\mathfrak{C}$ vor.

1.2: Dualität

Eine Definition, ein Satz usw. wird *dualisiert* durch Anwendung der beiden folgenden Regeln:

a) man ersetze $u : A \to B$ durch $u : B \to A$;

b) man ersetze vu durch uv.

Soweit Axiome über $\mathfrak{C}$ selbstdual sind (d. h. mit ihrer dualen Formulierung identisch sind, wie z. B. (I)–(III)), gilt zu einem Satz H über $\mathfrak{C}$ auch der duale Satz H_δ; sein Beweis ergibt sich aus dem Beweis des Satzes H durch Dualisierung. Dualisierte Beweise geben wir im folgenden nicht an.

1.3: Monomorphismen, Epimorphismen, Isomorphismen

$u : A \to B$ heiße ein *Monomorphismus*, wenn aus $uw = uw'$ folgt $w = w'$. $u : B \to A$ heiße ein *Epimorphismus*, wenn aus $wu = w'u$ folgt $w = w'$.

$v : B \to A$ heiße ein *Rechts-* bzw. *Linksinverses* von $u : A \to B$, wenn $vu = i_A$ bzw. $uv = i_B$ ist. v heiße *Inverses* von u, wenn v

sowohl Rechts- als auch Linksinverses von u ist. Falls u ein Inverses besitzt, nennen wir u einen *Isomorphismus.* – Beispielsweise sind die Identitäten Isomorphismen.

Satz 1.1: *Jeder Morphismus mit Rechtsinversem ist ein Epimorphismus.*

Satz 1.1_δ: *Jeder Morphismus mit Linksinversem ist ein Monomorphismus.*

1. Korollar: *Jeder Isomorphismus ist ein Monomorphismus und ein Epimorphismus.*

2. Korollar: *Jeder Morphismus hat höchstens ein Inverses.*

Satz 1.2: *Die Komposition zweier Monomorphismen ist ein Monomorphismus.*

Satz 1.2_δ: *Die Komposition zweier Epimorphismen ist ein Epimorphismus.*

Satz 1.3: *Die Komposition zweier Isomorphismen ist ein Isomorphismus.*

Satz 1.4: *Ist uv ein Monomorphismus, so ist v ein Monomorphismus.*

Satz 1.4_δ: *Ist vu ein Epimorphismus, so ist v ein Epimorphismus.*

Monomorphismen, Epimorphismen und Isomorphismen bezeichnen wir im folgenden meistens mit m, e und i.

1.4: Kanonische Monomorphismen und Epimorphismen

Es sei A ein festes Objekt. Existiert zu zwei Monomorphismen $m'\colon X' \to A$ und $m''\colon X'' \to A$ ein Morphismus m mit $m''m = m'$ (nach Satz 1.4 ist dann m ein Monomorphismus), so schreiben wir $m' \leq m''$. Diese Relation $\leq$ ist reflexiv und transitiv (also eine Präordnung in der Klasse der Monomorphismen $m\colon X \to A$). Wir nennen m' und m'' *äquivalent*, in Zeichen $m' \cong m''$, wenn $m' \leq m''$ und $m'' \leq m'$ ist. Wir fordern als **Axiom:**

(IV) *In jeder Äquivalenzklasse von Monomorphismen* $m: X \to A$ *eines jeden Objektes* A *ist einer ausgezeichnet;* diese ausgezeichneten Monomorphismen nennen wir *kanonisch.*

Es sei A ein festes Objekt. Existiert zu zwei Epimorphismen $e': A \to X'$ und $e'': A \to X''$ ein Morphismus e mit $ee'' = e'$ (nach Satz 1.4_δ ist dann e ein Epimorphismus), so schreiben wir $e' \leq e''$. Diese Relation $\leq$ ist reflexiv und transitiv (also eine Präordnung in der Klasse der Epimorphismen $e: A \to X$). Wir nennen e' und e'' *äquivalent*, in Zeichen $e' \cong e''$, wenn $e' \leq e''$ und $e'' \leq e'$ ist. Wir fordern als **Axiom:**

(IV_δ) *In jeder Äquivalenzklasse von Epimorphismen* $e: A \to X$ *eines jeden Objektes* A *ist einer ausgezeichnet;* diese ausgezeichneten Epimorphismen nennen wir *kanonisch.*

Für jedes Objekt A bilden die Monomorphismen $m: X \to A$ bzw. Epimorphismen $e: A \to X$, welche Isomorphismen sind, eine Äquivalenzklasse. Wir können annehmen:

(IV_i) *Die Identität* i_A *ist kanonischer Monomorphismus und kanonischer Epimorphismus* (m. a. W.: Die kanonischen Isomorphismen sind die Identitäten).

Satz 1.5: *Zwei Monomorphismen* $m': X' \to A$ *und* $m'': X'' \to A$ *sind dann und nur dann äquivalent, wenn ein Isomorphismus* i *existiert mit* $m''i = m'$ (es gibt höchstens einen solchen Isomorphismus).

Beweis: Es sei $m' \cong m''$. Dann existiert ein Monomorphismus m_1 mit $m''m_1 = m'$ und ein Monomorphismus m_2 mit $m'm_2 = m''$. Es folgt $m''m_1m_2 = m'm_2 = m''$. Also ist m_1m_2 eine Identität. Analog ist m_2m_1 eine Identität. Also besitzt m_1 ein Inverses.

Satz 1.5_δ: *Zwei Epimorphismen* $e': A \to X'$ *und* $e'': A \to X''$ *sind dann und nur dann äquivalent, wenn ein Isomorphismus* i *existiert mit* $ie'' = e'$ (es gibt höchstens einen solchen Isomorphismus).

§ 2. Bild und Cobild

Wir führen zwei weitere (ebenfalls selbstduale) Axiome ein.

(V) *Zu jedem Morphismus u existieren ein Monomorphismus m und ein Epimorphismus e mit $u = me$.* Wir nennen me eine *Faktorisierung* von u.

(VI) *Sind m und m' Monomorphismen, e und e' Epimorphismen und ist $me = m'e'$, so sind m und m' äquivalent* (dann auch e und e', und umgekehrt).

Satz 2.1: *Zu jedem Morphismus u existiert genau eine Faktorisierung mit kanonischem Monomorphismus.*

Beweis: Es sei $u = me$ eine Faktorisierung von u. Dann existieren ein kanonischer Monomorphismus $\bar{u}$ und ein Isomorphismus i derart, daß $m = \bar{u}i$ ist. ie ist ein Epimorphismus. – Äquivalente kanonische Monomorphismen sind gleich.

Satz 2.1$_\delta$: *Zu jedem Morphismus u existiert genau eine Faktorisierung mit kanonischem Epimorphismus.*

Satz 2.2: *Zu jedem Morphismus u existieren eindeutig ein kanonischer Monomorphismus $\bar{u}$, ein kanonischer Epimorphismus $\underline{u}$ und ein Isomorphismus i_u mit $u = \bar{u}i_u\underline{u}$.*

Korollar: *Ein Morphismus $u: A \to B$ ist genau dann ein Monomorphismus (Epimorphismus), wenn $\underline{u} = i_A$ ($\bar{u} = i_B$) ist.*

Wir nennen die von Satz 2.2 gelieferte, eindeutig bestimmte Darstellung $u = \bar{u}i_u\underline{u}$ die *kanonische Faktorisierung* von u und schreiben auch $\bar{u} = $ *Bild* u und $\underline{u} = $ *Cobild* u.

Satz 2.3: *Jeder Morphismus, der zugleich ein Monomorphismus und ein Epimorphismus ist, ist ein Isomorphismus.*

Beweis: Es sei $u: A \to B$ ein Monomorphismus und ein Epimorphismus. Nach dem Korollar zu Satz 2.2 ist dann $\bar{u} = i_B$ und $\underline{u} = i_A$, also $u = i_u$.

Es sei $u: A \to B$ ein Morphismus, $m: C \to A$ ein Monomorphismus und $um = \overline{um}\,i_{um}\,\underline{um}$ die kanonische Faktorisierung von um. Dann nennen wir den kanonischen Monomorphismus $\overline{um}$ das *u-Bild von m* und bezeichnen es auch mit $u(m)$; speziell ist $u(i_A) =$ Bild u. – Es sei $u: B \to A$ ein Morphismus, $e: A \to C$ ein Epimorphismus und $eu = \overline{eu}\, i_{eu}\, \underline{eu}$ die kanonische Faktorisierung von eu. Dann nennen wir den kanonischen Epimorphismus $\underline{eu}$ das *u-Cobild von e* und bezeichnen es auch mit $u_\delta(e)$; speziell ist $u_\delta(i_A) =$ Cobild u.

Satz 2.4: *Ist $u: A \to B$ ein Morphismus und $e': A' \to A$ ein Epimorphismus, so ist $(ue)\,(i_{A'}) = u(i_A)$* (m. a. W.: Bild $ue =$ = Bild u).

Beweis: Es ist $\overline{ue}\, i_{ue}\, \underline{ue} = ue = \bar{u} i_u \underline{u} e$, nach Satz 2.1 folglich $\overline{ue} = \bar{u}$.

Satz 2.4$_\delta$: *Ist $u: B \to A$ ein Morphismus und $m: A \to A'$ ein Monomorphismus, so ist $(mu)_\delta\,(i_{A'}) = u_\delta(i_A)$* (m. a. W.: Cobild $mu =$ Cobild u).

Satz 2.5: *Es seien $v: A \to B$, $u: B \to C$ Morphismen und $m: D \to A$ ein Monomorphismus. Dann ist $(uv)\,(m) = u\big(v(m)\big)$.*

Beweis: Es ist $(uv)(m) = \overline{uvm} = \overline{u\overline{vm}\, i_{vm}\, \underline{vm}} = \overline{u\overline{vm}}$ (letzteres nach Satz 2.4 mit $e = i_{vm}\, \underline{vm}$).

Satz 2.5$_\delta$: *Es seien $v: B \to A$, $u: C \to B$ Morphismen und $e: A \to D$ ein Epimorphismus. Dann ist $(vu)_\delta\,(e) = u_\delta\big(v_\delta(e)\big)$.*

Satz 2.6: *Für zwei Monomorphismen $m': A' \to A$ und $m'': A'' \to A$ ist $m' \leq m''$ genau dann, wenn $m'\,(i_{A'}) \leq m''\,(i_{A''})$* (m. a. W.: Bild $m' \leq$ Bild m'') *ist.*

Beweis: Es sei $m' = m'' m$. Dann ist $\overline{m'}\, i_{m'} = \overline{m''}\, i_{m''}\, m$, also wenn i^* das Inverse von $i_{m'}$ ist, $\overline{m'} = \overline{m''}\, i_{m''}\, m i^*$, also $\overline{m'} \leq \overline{m''}$. Umgekehrt sei $\overline{m'} = \overline{m''}\, m$ und i^* das Inverse von $i_{m''}$. Dann ist $m' = \overline{m'}\, i_{m'} = \overline{m''}\, m\, i_{m'} = \overline{m''}\, i_{m''}\, i^*\, m\, i_{m'} =$ $= m''\, i^*\, m\, i_{m'}$, also $m' \leq m''$.

Satz 2.6$_\delta$: *Für zwei Epimorphismen $e': A \to A'$ und $e'': A \to A''$ ist $e' \leq e''$ genau dann, wenn $e'_\delta\,(i_{A'}) \leq e''_\delta\,(i_{A''})$* (m. a. W.: Cobild $e' \leq$ Cobild e'') *ist.*

Satz 2.7: *Es seien* $m' : A' \to A$, $m'' : A'' \to A$ *und* $m : A \to B$ *Monomorphismen. Es ist dann und nur dann* $m(m') \leq m(m'')$, *wenn* $m' \leq m''$ *ist.*

Beweis: Aus $\overline{mm'} \leq \overline{mm''}$ folgt $mm' \leq mm''$ nach Satz 2.6, d. h. es existiert ein Monomorphismus v mit $mm' = mm''v$; folglich ist $m' = m''v$. Umgekehrt folgt aus $m' \leq m''$, daß $mm' \leq mm''$ ist; nach Satz 2.6 ist daher $\overline{mm'} \leq \overline{mm''}$.

Satz 2.7$_\delta$: *Es seien* $e' : A \to A'$, $e'' : A \to A''$ *und* $e : B \to A$ *Epimorphismen. Es ist dann und nur dann* $e_\delta(e') \leq e_\delta(e'')$, *wenn* $e' \leq e''$ *ist.*

Satz 2.8: *Es seien* $m' : A' \to A$ *und* $m'' : A'' \to A$ *Monomorphismen und* $u : A \to B$ *ein Morphismus. Ist* $m' \leq m''$, *so ist* $u(m') \leq u(m'')$.

Beweis: Es sei $m' = m''m$. Dann ist $u(m') = \overline{um'} = \overline{um''m} = \overline{\overline{um''}\, i_{um''}\, \underline{um''}\, m}$. Wir setzen zur Abkürzung $i_{um''}\, \underline{um''}\, m = v$; nach Satz 2.4 und Satz 2.7 folgt nun $u(m') = \overline{\overline{um''}\, \bar{v}\, i_v\, \underline{v}} = \overline{\overline{um''}\, \bar{v}} = \overline{um''}(\bar{v}) \leq \overline{um''}(i_{A''}) = \overline{um''} = u(m'')$.

Korollar: *Es seien* $m' : A' \to A$ *und* $m'' : A'' \to A$ *Monomorphismen und* $u : A \to B$ *ein Morphismus. Ist* $m' \cong m''$, *so ist* $u(m') = u(m'')$.

Satz 2.8$_\delta$: *Es seien* $e' : A \to A'$ *und* $e'' : A \to A''$ *Epimorphismen und* $u : B \to A$ *ein Morphismus. Ist* $e' \leq e''$, *so ist* $u_\delta(e') \leq u_\delta(e'')$.

Korollar: *Es seien* $e' : A \to A'$ *und* $e'' : A \to A''$ *Epimorphismen und* $u : B \to A$ *ein Morphismus. Ist* $e' \cong e''$, *so ist* $u_\delta(e') = u_\delta(e'')$.

Satz 2.9: *Sind* $v : A \to B$ *und* $u : B \to C$ *Morphismen, so ist* $uv(i_A) \leq u(i_B)$ (m. a. W.: Bild $uv \leq$ Bild u).

Beweis: Es ist $\bar{v} \leq i_B$, nach Satz 2.5 und Satz 2.8 also $uv(i_A) = u(v(i_A)) = u(\bar{v}) \leq u(i_B)$.

Satz 2.9_δ: *Sind* $v: B \to A$ *und* $u: C \to B$ *Morphismen, so ist* $(vu)_\delta\,(i_A) \leq u_\delta\,(i_B)$ (m. a. W.: Cobild $vu \leq$ Cobild u).

Bevor wir in der Theorie fortfahren, geben wir einige Beispiele an.

1. Die Kategorie $\mathfrak{M}$

Die Objekte sind die Mengen; die Morphismen sind die Abbildungen.

2. Die Kategorie $\mathfrak{G}$

Die Objekte sind die Gruppen; die Morphismen sind die Homomorphismen. Dabei gilt:

a) Die Monomorphismen sind die eineindeutigen Homomorphismen in. Es sei nämlich $u: A \to B$ ein Homomorphismus und $u(a_1) = u(a_2)$ $(a_1, a_2 \in A)$, Z die Gruppe der ganzen Zahlen und $u_1, u_2: Z \to A$ definiert durch: $u_1(1) = a_1$, $u_2(1) = a_2$. Dann ist $uu_1 = uu_2$; somit ist u genau dann ein Monomorphismus, wenn $a_1 = a_2$ ist.

b) Die Epimorphismen sind die Homomorphismen auf. Daß Homomorphismen auf Epimorphismen sind, ist trivial. Umgekehrt sei $u: A \to B$ und $u(A) = B'$ echte Untergruppe von B. Weiter sei $B_1 = B_2 = B$, $B_1' = B_2' = B'$ und C das freie Produkt von B_1 und B_2 mit vereinigter Untergruppe B'. Dann existieren Homomorphismen $u_1: B_1 \to C$ und $u_2: B_2 \to C$ mit $u_1 \neq u_2$ und $u_1 u = u_2 u$, d. h. u ist kein Epimorphismus.

3. Die Kategorie $\mathfrak{C}$

Die Objekte sind die linearen (nichtassoziativen) Algebren über einem festen Körper K; die Morphismen sind die Homomorphismen. Die Monomorphismen sind die eineindeutigen Homomorphismen in, die Epimorphismen die Homomorphismen auf. (Der Beweis ergibt sich wie in 2. auf Grund von C. E. Didize, Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85) 379–396, (1958).)

§ 3. Der Verband der kanonischen Monomorphismen $m: X \to A$ bzw. der kanonischen Epimorphismen $e: A \to X$

Unsere Kategorie $\mathfrak{C}$ sei eine Kategorie mit „Null", d. h. sie erfülle folgendes **Axiom:**

(VII) *Es existiert genau ein Objekt O derart, daß für jedes Objekt X die Mengen $Hom(O, X)$ und $Hom(X, O)$ aus genau einem Element bestehen.*

Wir nennen dieses Objekt O das *Nullobjekt* (und verwenden den Buchstaben O nur zur Bezeichnung des Nullobjektes). Außerdem bezeichnen wir das Element von $\mathrm{Hom}(O, X)$ bzw. $\mathrm{Hom}(X, O)$ mit $o_{O,X}$ bzw. $o_{X,O}$.

Satz 3.1: *Für jedes Paar A, B ist $Hom(A, B) \neq \emptyset$.*

Beweis: $o_{O,B}\, o_{A,O} \in \mathrm{Hom}(A, B)$.

Eine Morphismenfamilie $(u_j: A \to A_j)_{j \in J}$[1] heiße ein *allgemeines direktes Produkt* der Familie $(A_j)_{j \in J}$, wenn zu jeder Morphismenfamilie $(v_j: B \to A_j)_{j \in J}$ genau ein Morphismus $v: B \to A$ existiert mit $u_j v = v_j$ für alle $j \in J$.

Eine Morphismenfamilie $(u_j: A_j \to A)_{j \in J}$ heiße eine *allgemeine direkte Summe* der Familie $(A_j)_{j \in J}$, wenn zu jeder Morphismenfamilie $(v_j: A_j \to B)_{j \in J}$ genau ein Morphismus $v: A \to B$ existiert mit $v u_j = v_j$ für alle $j \in J$.

Satz 3.2: *Es sei $(u_j: A \to A_j)_{j \in J}$ ein allgemeines direktes Produkt. Dann ist jedes u_j ein Epimorphismus.*

Beweis: Es sei $j_0 \in J$ fest. Nach Satz 3.1 existiert für jedes $j \neq j_0$ ein $w_j: A_{j_0} \to A_j$. Es sei $w_{j_0} = i_{A_{j_0}}$. Dann existiert ein $w: A_{j_0} \to A$ mit $u_j w = w_j$ $(j \in J)$; folglich ist $u_{j_0} w = i_{A_{j_0}}$; nach Satz 1.4_δ ist u_{j_0} ein Epimorphismus.

---

[1] Indexmengen werden immer als nichtleer vorausgesetzt.

Satz 3.2$_\delta$: *Es sei* $(u_j : A_j \to A)_{j \in J}$ *eine allgemeine direkte Summe. Dann ist jedes* u_j *ein Monomorphismus.*

Satz 3.3: *Es sei* $(u_j : A \to A_j)_{j \in J}$ *ein allgemeines direktes Produkt,* $(v_j : B \to A_j)_{j \in J}$ *eine Morphismenfamilie und* $v : B \to A$ *der Morphismus mit* $u_j v = v_j\ (j \in J)$. *Ist* v_{j_0} *ein Monomorphismus für mindestens ein* $j_0 \in J$, *so ist* v *ein Monomorphismus.*

Beweis: Es ist $u_{j_0} v = v_{j_0}$, also v nach Satz 1.4 ein Monomorphismus.

Satz 3.3$_\delta$: *Es sei* $(u_j : A_j \to A)_{j \in J}$ *eine allgemeine direkte Summe,* $(v_j : A_j \to B)_{j \in J}$ *eine Morphismenfamilie und* $v : A \to B$ *der Morphismus mit* $v u_j = v_j\ (j \in J)$. *Ist* v_{j_0} *ein Epimorphismus für mindestens ein* $j_0 \in J$, *so ist* v *ein Epimorphismus.*

Satz 3.4: *Sind* $(u_j : A \to A_j)_{j \in J}$ *und* $(u'_j : A' \to A'_j)_{j \in J}$ *allgemeine direkte Produkte, so gibt es zu jeder Morphismenfamilie* $(v_j : A_j \to A'_j)_{j \in J}$ *genau einen Morphismus* $v : A \to A'$ *mit* $u'_j v = v_j u_j$ *für alle* $j \in J$. *Sind alle* v_j *Monomorphismen (Isomorphismen), so ist* v *ein Monomorphismus (Isomorphismus).*

Beweis: Die Morphismenfamilie $(v_j u_j : A \to A'_j)_{j \in J}$ definiert genau einen Morphismus $v : A \to A'$ mit $v_j u_j = u'_j v\ (j \in J)$. – Es seien nun alle v_j Monomorphismen und $w, w' : B \to A$ Morphismen mit $v w = v w'$. Für alle $j \in J$ ist dann $u'_j v w = u'_j v w'$, also $v_j u_j w = v_j u_j w'$, also $u_j w = u_j w'$ und daher nach Definition des allgemeinen direkten Produktes $w = w'$. – Schließlich seien alle v_j Isomorphismen und $v_j^* : A'_j \to A_j$ die Inversen der v_j. Weiter sei v^* der durch $u_j v^* = v_j^* u'_j$ definierte Morphismus. Für alle $j \in J$ ist dann $u'_j v v^* = v_j u_j v^* = v_j v_j^* u'_j = u'_j = u'_j i_{A'}$. Also ist $v v^* = i_{A'}$. Analog zeigt man $v^* v = i_A$.

Satz 3.4$_\delta$: *Sind* $(u_j : A_j \to A)_{j \in J}$ *und* $(u'_j : A'_j \to A')_{j \in J}$ *allgemeine direkte Summen, so gibt es zu jeder Morphismenfamilie* $(v_j : A'_j \to A_j)_{j \in J}$ *genau einen Morphismus* $v : A' \to A$ *mit* $v u'_j = u_j v_j$ *für alle* $j \in J$. *Sind alle* v_j *Epimorphismen (Isomorphismen), so ist* v *ein Epimorphismus (Isomorphismus).*

Korollar: *Ist* $(u_j : A \to A_j)_{j \in J}$ *ein allgemeines direktes Produkt, so ist* $(u'_j : A' \to A_j)_{j \in J}$ *dann und nur dann allgemeines* *direktes Produkt, wenn ein Isomorphismus* $w: A' \to A$ *existiert mit* $u'_j = u_j w$ *für alle* $j \in J$. – *Ist* $(u'_j: A_j \to A)_{j \in J}$ *eine allgemeine direkte Summe, so ist* $(u'_j: A_j \to A')_{j \in J}$ *dann und nur dann allgemeine direkte Summe, wenn ein Isomorphismus* $w: A \to A'$ *existiert mit* $u'_j = w u_j$ *für alle* $j \in J$.

Unsere Kategorie $\mathfrak{C}$ genüge den zwei weiteren Axiomen:

(VIII) *Zu jeder Familie* $(A_j)_{j \in J}$ *von Objekten existieren mindestens ein allgemeines direktes Produkt* $(u_j: A \to A_j)_{j \in J}$ *und eine allgemeine direkte Summe* $(u_j: A_j \to A)_{j \in J}$.

(IX) *In der Klasse aller allgemeinen direkten Produkte (Summen) einer jeden Familie* $(A_j)_{j \in J}$ *von Objekten ist ein Element ausgezeichnet.* Wir nennen es *das direkte Produkt (die direkte Summe)* der Familie $(A_j)_{j \in J}$.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Ist $(u_j: A \to A_j)_{j \in J}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j \in J}$, so schreiben wir für A auch $\prod_{j \in J} A_j$. Ist weiter $(v_j: B \to A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Morphismen und v der eindeutig bestimmte Morphismus aus $\mathrm{Hom}(B, A)$ mit $u_j v = v_j$ $(j \in J)$, so schreiben wir für v auch $\prod_{j \in J} v_j$. – Ist $(u_j: A_j \to A)_{j \in J}$ die direkte Summe der Familie $(A_j)_{j \in J}$, so schreiben wir für A auch $\sum_{j \in J} A_j$. Ist weiter $(v_j: A_j \to B)_{j \in J}$ eine Familie von Morphismen und v der eindeutig bestimmte Morphismus aus $\mathrm{Hom}(A, B)$ mit $v u_j = v_j$ $(j \in J)$, so schreiben wir für v auch $\sum_{j \in J} v_j$.

Es sei eine Monomorphismenfamilie $(m_j: A_j \to A)_{j \in J}$ gegeben. Falls ein Monomorphismus $m: \underline{A} \to A$ existiert mit:

a) für alle $j \in J$ ist $m_j \leq m$;

b) ist $m': A' \to A$ ein Monomorphismus und $m_j \leq m'$ für alle $j \in J$, dann ist $m \leq m'$,

so heiße $\overline{m} = \text{Bild } m$ *die Vereinigung* der m_j und wir schreiben $\overline{m} = \bigvee_{j \in J} m_j$.

Es sei eine Epimorphismenfamilie $(e_j: A \to A_j)_{j \in J}$ gegeben. Falls ein Epimorphismus $e: A \to \underline{A}$ existiert mit:

a) für alle $j \in J$ ist $e_j \leq e$;

b) ist $e' : A \to A'$ ein Epimorphismus und $e_j \leq e'$ für alle $j \in J$, dann ist $e \leq e'$,

so heiße $\underline{e} =$ Cobild e *die Vereinigung* der e_j und wir schreiben $\underline{e} = \bigvee_{j \in J} e$.

Es sei eine Monomorphismenfamilie $(m_j\colon A_j \to A)_{j \in J}$ gegeben. Falls ein Monomorphismus $m : \underline{A} \to A$ existiert mit:

a) für alle $j \in J$ ist $m \leq m_j$;

b) ist $m' : A' \to A$ ein Monomorphismus und $m' \leq m_j$ für alle $j \in J$, dann ist $m' \leq m$,

so heiße $\overline{m} =$ Bild m *der Durchschnitt* der m_j und wir schreiben $\overline{m} = \bigwedge_{j \in J} m_j$.

Es sei eine Epimorphismenfamilie $(e_j\colon A \to A_j)_{j \in J}$ gegeben. Falls ein Epimorphismus $e\colon A \to \underline{A}$ existiert mit:

a) für alle $j \in J$ ist $e \leq e_j$;

b) ist $e' : A \to A'$ ein Epimorphismus und $e' \leq e_j$ für alle $j \in J$, dann ist $e' \leq e$,

so heiße $\underline{e} =$ Cobild e *der Durchschnitt* der e_j und wir schreiben $\underline{e} = \bigwedge_{j \in J} e$.

Satz 3.5: *Zu jeder Monomorphismenfamilie* $(m_j\colon A_j \to A)_{j \in J}$ *existiert* $\bigvee_{j \in J} m_j$ (und zwar ist $\bigvee_{j \in J} m_j = \text{Bild } u = \overline{u}$, wenn $\sum_{j \in J} m_j = u$ gesetzt ist).

Beweis: Es sei $(u_j\colon A_j \to B)_{j \in J}$ die direkte Summe der A_j. Für alle $j \in J$ ist dann einerseits $m_j \cong \overline{m_j} = \overline{u\, u_j} \leq \overline{u}$ nach Satz 2.9. Andererseits sei $m' : A' \to A$ und $m_j \leq m'$ für alle $j \in J$; ist dann m_j'' der Morphismus mit $m'\, m_j'' = m_j = u\, u_j$ und $v = \sum_{j \in J} m_j''$, so ist $m'\ v\ u_j = m'\ m_j'' = m_j = u\, u_j$, also $m' v = u$ und daher $\overline{u} = \overline{m' v} \leq \overline{m'} \cong m'$ nach Satz 2.9.

Satz 3.5$_\delta$: *Zu jeder Epimorphismenfamilie* $(e_j\colon A \to A_j)_{j \in J}$ *existiert* $\bigvee_{j \in J} e_j$ (und zwar ist $\bigvee_{j \in J} e_j = \text{Cobild } u = \underline{u}$, wenn $\prod_{j \in J} e_j = u$ gesetzt ist).

Satz 3.6: *Es sei* $(m_j: A_j \to A)_{j\in J}$ *eine Monomorphismenfamilie und* $u: A \to C$. *Dann ist* $u\left(\bigvee_{j\in J} m_j\right) = \bigvee_{j\in J} u(m_j)$.

Beweis: Es sei $(u_j: A_j \to B)_{j\in J}$ die direkte Summe der A_j, $\overline{um_j}: A'_j \to C$, $(u'_j: A'_j \to B')_{j\in J}$ die direkte Summe der A'_j, $v = \sum_{j\in J} m_j$, $v' = \sum_{j\in J} \overline{um_j}$, $e_j = i_{um_j}\,\underline{um_j}$ und $e = \sum_{j\in J} u'_j e_j$. Dann ist $v' e u_j = v' u'_j e_j = \overline{um_j}\, e_j = u v u_j$, also $v' e = u v$. Nach Satz 2.5 ist daher $u(\overline{v}) = \overline{uv} = \overline{v' e} = \overline{v'}$, letzteres nach Satz 2.4 und Satz 3.4_δ. Nach Satz 3.5 folgt daraus $u\left(\bigvee_{j\in J} m_j\right) = u(\overline{v}) = \overline{v'} = \bigvee_{j\in J} u(m_j)$.

Satz 3.6_δ: *Es sei* $(e_j: A \to A_j)_{j\in J}$ *eine Epimorphismenfamilie und* $u: C \to A$. *Dann ist* $u_\delta\left(\bigvee_{j\in J} e_j\right) = \bigvee_{j\in J} u_\delta(e_j)$.

Weiter verlangen wir die Gültigkeit von **Axiom**

(X) *Für jedes Objekt A ist die Klasse der kanonischen Monomorphismen* $m: X \to A$ *und die Klasse der kanonischen Epimorphismen* $e: A \to X$ *eine Menge.*

Satz 3.7: *Für jedes Objekt A bilden die kanonischen Monomorphismen* $m: X \to A$ *bezüglich der Ordnungsrelation einen Vollverband.*

Beweis: Es ist für jede Familie $(m_j: A_j \to A)_{j\in J}$ von kanonischen Monomorphismen die Existenz von $\bigvee_{j\in J} m_j$ und $\bigwedge_{j\in J} m_j$ zu zeigen. Beides folgt aus Satz 3.5; ersteres direkt; letzteres folgendermaßen: es sei $(m'_k: A'_k \to A)_{k\in K}$ die Familie aller kanonischen Monomorphismen $m': A' \to A$ mit $m' \leq m_j$ für alle $j \in J$; dann existiert $m' = \bigvee_{k\in K} m'_k$ und es ist $m' = \bigwedge_{j\in J} m_j$.

Satz 3.7_δ: *Für jedes Objekt A bilden die kanonischen Epimorphismen* $e: A \to X$ *bezüglich der Ordnungsrelation einen Vollverband.*

Es sei $u: A \to B$ und $m: B' \to B$ ein Monomorphismus. Dann nennen wir die Vereinigung $\bigvee\left(\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A;\ u(\overline{m'}) \leq m\right)$ aller kanonischen Monomorphismen $\overline{m'}: A' \to A$ mit $u(\overline{m'}) \leq m$ das *Urbild* von m bezüglich u und bezeichnen es mit $u^{-1}(m)$. – Es sei $u: B \to A$ und $e: B \to B'$ ein Epimorphismus. Dann nennen wir die Vereinigung $\bigvee \left(\underline{e}' \mid \underline{e}' \leq i_A ; u_\delta (\underline{e}') \leq e\right)$ aller kanonischen Epimorphismen $\underline{e}' : A \to A'$ mit $u_\delta (\underline{e}') \leq e$ das *Urcobild* von e bezüglich u und bezeichnen es mit $u_\delta^{-1} (e)$.

Satz 3.8: *Es seien $m : A \to B$ und $m' : A' \to A$ Monomorphismen. Dann ist $m^{-1} (m (m')) = m' (i_{A'}) =$ Bild $m' \cong m'$.*

Beweis: Es ist $m^{-1}(m(m')) = \bigvee(\overline{m''} \mid \overline{m''} \leq i_A ; m (\overline{m''}) \leq m(m'))$ und nach Satz 2.7 ist dies $= \bigvee (\overline{m''} \mid \overline{m''} \leq i_A ; \overline{m''} \leq m') \cong m'$.

Satz 3.8$_\delta$: *Es seien $e : B \to A$ und $e' : A \to A'$ Epimorphismen. Dann ist $e_\delta^{-1} (e_\delta (e')) = e'_\delta (i_{A'}) =$ Cobild $e' \cong e'$.*

Satz 3.9: *Es seien $m' : B' \to B$ und $m'' : B'' \to B$ Monomorphismen, $m' \leq m''$ und $u : A \to B$. Dann ist $u^{-1} (m') \leq u^{-1} (m'')$.*

Beweis: Definition des Urbildes.

Korollar: *Es seien $m' : B' \to B$ und $m'' : B'' \to B$ Monomorphismen, $m' \cong m''$ und $u : A \to B$. Dann ist $u^{-1} (m') = u^{-1} (m'')$.*

Satz 3.9$_\delta$: *Es seien $e' : B \to B'$ und $e'' : B \to B''$ Epimorphismen, $e' \leq e''$ und $u : B \to A$. Dann ist $u_\delta^{-1} (e') \leq u_\delta^{-1} (e'')$.*

Korollar: *Es seien $e' : B \to B'$ und $e'' : B \to B''$ Epimorphismen, $e' \cong e''$ und $u : B \to A$. Dann ist $u_\delta^{-1} (e') = u_\delta^{-1} (e'')$.*

Satz 3.10: *Es seien $u : A \to B$ ein Morphismus und $m : B' \to B$ ein Monomorphismus. Dann ist $u (u^{-1} (m)) \leq m$.*

Beweis: $u (u^{-1} (m)) = u (\bigvee (\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A ;\ u (m') \leq m)) = \bigvee (u (\overline{m'}) \overline{m'} \mid \leq i_A ;\ u (\overline{m'}) \leq m) \leq m$.

Satz 3.10$_\delta$: *Es seien $u : B \to A$ ein Morphismus und $e : B \to B'$ ein Epimorphismus. Dann ist $u_\delta (u_\delta^{-1} (e)) \leq e$.*

Satz 3.11: *Es sei $m : A' \to A$ ein Monomorphismus und $u : A \to B$. Dann ist $m \leq u^{-1} (u (m))$.*

Beweis: Definition des Urbildes.

Satz 3.11$_\delta$: *Es sei $e : A \to A'$ ein Epimorphismus und $u : B \to A$. Dann ist $e \leq u_\delta^{-1} (u_\delta (e))$.*

Satz 3.12: *Es sei $m: C' \to C$ ein Monomorphismus, $u: A \to B$ und $v: B \to C$. Dann ist $(v\,u)^{-1}(m) = u^{-1}(v^{-1}(m))$.*

Beweis: Es ist $u^{-1}(v^{-1}(m)) = \bigvee(\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A;\ u(\overline{m'}) \leq v^{-1}(m))$ und $(v\,u)^{-1}(m) = \bigvee(\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A;\ (v\,u)(\overline{m'}) \leq m)$. Nun folgt nach Satz 2.8 aus $u(\overline{m'}) \leq v^{-1}(m)$, daß $(v\,u)(\overline{m'}) \leq v(v^{-1}(m)) \leq m$ ist, und umgekehrt nach Satz 3.11 aus $(v\,u)(\overline{m'}) \leq m$, daß $u(\overline{m'}) \leq v^{-1}(v\,u(\overline{m'})) \leq v^{-1}(m)$ ist, letzteres nach Satz 3.9.

Satz 3.12$_\delta$: *Es sei $e: C \to C'$ ein Epimorphismus, $u: B \to A$ und $v: C \to B$. Dann ist $(u\,v)_\delta^{-1}(e) = u_\delta^{-1}(v_\delta^{-1}(e))$.*

Satz 3.13: *Es sei $m: A \to B$ ein Monomorphismus und $m' \leq m$. Dann ist $m(m^{-1}(m')) = \overline{m'}$.*

Beweis: Wegen $m' \leq m$ existiert ein Monomorphismus m'' mit $m' = m\,m''$ und es ist $m' \cong \overline{m'} = \overline{m\,m''} = m(m'')$. Nach den Korollaren zu Satz 2.8 und Satz 3.9 ist dann $m(m^{-1}(m')) = m(m^{-1}(m(m''))) = m(m'')$, letzteres nach Satz 3.8 und Korollar zu Satz 2.8, und nach obigem ist $m(m'') = \overline{m'}$.

Satz 3.13$_\delta$: *Es sei $e: B \to A$ ein Epimorphismus und $e' \leq e$. Dann ist $e_\delta(e_\delta^{-1}(e')) = \underline{e'}$.*

Satz 3.14: *Es seien $m: A \to B$ und $m': B' \to B$ Monomorphismen. Dann ist $m(m^{-1}(m')) = m \wedge m'$.*

Beweis: Es ist $m(m^{-1}(m')) = m(\bigvee(\overline{m''} \mid \overline{m''} \leq i_A;\ m(\overline{m''}) \leq m')) = \bigvee(m(\overline{m''}) \mid \overline{m''} \leq i_A;\ m(\overline{m''}) \leq m')$ und dies ist nach Satz 2.7 und Satz 3.13 weiter $= \bigvee(\overline{m'''} \mid \overline{m'''} \leq m;\ \overline{m'''} \leq i_B;\ \overline{m'''} \leq m') = m \wedge m'$.

Satz 3.14$_\delta$: *Es seien $e: B \to A$ und $e': B \to B'$ Epimorphismen. Dann ist $e_\delta(e_\delta^{-1}(e')) = e \wedge e'$.*

Satz 3.15: *Es sei $u: A \to B$ und $(m_j: B_j \to B)_{j \in J}$ eine Monomorphismenfamilie. Dann ist $u^{-1}\left(\bigwedge_{j \in J} m_j\right) = \bigwedge_{j \in J} u^{-1}(m_j)$.*

Beweis: Es ist $u^{-1}\left(\bigwedge_{j \in J} m_j\right) = \bigvee_{j \in J}(\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A;\ u(\overline{m'}) \leq m_j$ für alle $j \in J)$ und $\bigwedge_{j \in J} u^{-1}(m_j) = \bigvee(\overline{m'} \mid \overline{m'} \leq i_A;\ \overline{m'} \leq u^{-1}(m_j)$

für alle $j \in J$). Nach Satz 3.9 und Satz 3.11 folgt nun aus $u(\overline{m'}) \leq m_j$, daß $\overline{m'} \leq u^{-1}(u(m')) \leq u^{-1}(m_j)$ ist, und umgekehrt nach Satz 3.10 und Satz 3.11 aus $\overline{m'} \leq u^{-1}(m_j)$, daß $u(\overline{m'}) \leq \leq u(u^{-1}(m_j)) \leq m_j$ ist.

Satz 3.15$_\delta$: *Es sei $u: B \to A$ und $(e_j: B \to B_j)_{j \in J}$ eine Epimorphismenfamilie. Dann ist $u_\delta^{-1}\left(\bigwedge_{j \in J} e_j\right) = \bigwedge_{j \in J} u_\delta^{-1}(e_j)$.*

§ 4. Kern und Cokern

Satz 4.1: *Es ist $o_{O,O} = i_O$.*

Beweis: Axiome (I) und (VII).

Für jedes Paar A, B von Objekten bezeichnen wir den Morphismus $o_{O,B}\, o_{A,O}: A \to B$ mit $o_{A,B}$.

Satz 4.2$_{(\delta)}$: *Der Morphismus $o_{O,A}: O \to A$ ist ein Monomorphismus, der Morphismus $o_{A,O}: A \to O$ ein Epimorphismus.*

Beweis: Für jedes Objekt X existiert in Hom (X, O) bzw. Hom (O, X) nur ein einziger Morphismus.

Satz 4.3$_{(\delta)}$: *Für jeden Morphismus $u: A \to B$ ist $o_{B,C}\, u = o_{A,C}$ und $u\, o_{C,A} = o_{C,B}$.*

Beweis: Es ist $o_{B,C}\, u = o_{O,C}\, o_{B,O}\, u$; wegen $o_{B,O}\, u: A \to O$ ist $o_{B,O}\, u = o_{A,O}$ nach (VII) und somit $o_{B,O}\, u = o_{O,C}\, o_{A,O} = o_{A,C}$.

Satz 4.4$_{(\delta)}$: *Ist $o_{O,A}$ ein Epimorphismus ($o_{A,O}$ ein Monomorphismus), so ist $A = O$.*

Beweis: Nach den Sätzen 4.2$_{(\delta)}$ und 2.3 ist dann $o_{O,A}$ ein Isomorphismus und $o_{A,O}$ wegen (VII) das Inverse von $o_{O,A}$, d. h. es ist $o_{O,A}\, o_{A,O} = i_A$. Es sei $w: X \to A$ ein Morphismus. Nach Satz 4.3$_{(\delta)}$ ist dann $w = o_{O,A}\, o_{A,O}\, w = o_{X,A}$; für alle X besteht also Hom (X, A) nur aus einem einzigen Element. Ähnlich zeigt man, daß Hom (A, X) nur aus einem Element besteht. Nach (VII) ist daher $A = O$.

Satz 4.5: *Es sei* $m: A' \to A$ *ein Monomorphismus und* $m \leq \leq o_{O,A}$. *Dann ist* $m = o_{O,A}$.

Beweis: Aus $m \leq o_{O,A}$ folgt die Existenz eines Monomorphismus $m': A' \to O$ mit $m = o_{O,A}\, m'$; nach (VII) ist $m' = o_{A',O}$ und nach Satz $4.4_{(\delta)}$ ist $A' = O$, also $m = o_{O,A}$ nach (VII).

Satz 4.5_δ: *Es sei* $e: A \to A'$ *ein Epimorphismus und* $e \leq o_{A,O}$. *Dann ist* $e = o_{A,O}$.

Satz $4.6_{(\delta)}$: $o_{O,A}$ *ist ein kanonischer Monomorphismus und* $o_{A,O}$ *ein kanonischer Epimorphismus.*

Beweis: Satz 4.5 und Satz 4.5_δ.

Satz $4.7_{(\delta)}$: *Für jeden Morphismus* $v: A \to B$ *sind folgende Aussagen äquivalent: (1)* $v = o_{A,B}$; *(2)* $\overline{v} = o_{O,B}$; *(3)* $\underline{v} = o_{A,O}$.

Beweis: Es gelte (1); dann ist $v = o_{O,B}\, o_{A,O}$, nach Satz $4.6_{(\delta)}$ also $\overline{v} = o_{O,B}$ und $\underline{v} = o_{A,O}$. – Es gelte (2); dann existiert ein Epimorphismus $e: A \to O$ mit $v = o_{O,B}\, e = o_{A,B}$, letzteres nach Satz $4.3_{(\delta)}$. – Dual zeigt man, daß (1) aus (3) folgt.

Satz $4.8_{(\delta)}$: *Für jeden Morphismus* $u: A \to B$ *ist* $u\,(o_{O,A}) = o_{O,B}$ *und* $u_\delta\,(o_{B,O}) = o_{A,O}$.

Beweis: Nach Satz $4.3_{(\delta)}$ und Satz $4.6_{(\delta)}$ ist $\overline{u\, o_{O,A}} = o_{O,B}$.

Satz 4.9: *Für jeden Monomorphismus* $m: A \to B$ *ist* $m^{-1}(o_{O,B}) = o_{O,A}$.

Beweis: Sätze 2.7, $4.8_{(\delta)}$, 4.5 und $4.6_{(\delta)}$.

Satz 4.9_δ: *Für jeden Epimorphismus* $e: B \to A$ *ist* $e_\delta^{-1}\,(o_{B,O}) = o_{A,O}$.

Es sei $u: A \to B$ ein Morphismus. Dann bezeichnen wir $u^{-1}(o_{O,B})$ als *Kern* u und $u_\delta^{-1}(o_{A,O})$ als *Cokern* u.

Satz 4.10: *Es sei* $u: A \to B$ *ein Morphismus und* $m: A' \to A$ *ein Monomorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(1) $m \cong$ *Kern* u;

(2) a) es ist $u\,m = o_{A',B}$ *und*

b) zu jedem Morphismus $v: C \to A$ *mit* $u\,v = o_{C,B}$ *existiert ein Morphismus* $v': C \to A'$ *mit* $v = m\,v'$.

Beweis: Es gelte (1). Nach dem Korollar zu Satz 2.8 ist $\overline{u\,m} = \overline{u\,\overline{m}} = o_{O,B}$, letzteres nach Definition des Kernes; nach Satz $4.7_{(\delta)}$ ist also $u\,m = o_{A',B}$. Es sei nun $v: C \to A$ ein Morphismus mit $u\,v = o_{C,B}$, also $\overline{u\,v} = \overline{u\,\overline{v}} = o_{O,B}$. Dann ist $\overline{v} \leq u^{-1}(o_{O,B}) = \overline{m}$. Daher existiert ein Monomorphismus m' mit $\overline{v} = \overline{m}\,m'$ und es ist $v = \overline{v}\,i_v \underline{v} = \overline{m}\,m'\,i_v \underline{v}$. Es sei i^* das Inverse von i_m; dann ist $v = \overline{m}\,i_m\,i^*\,m'\,i_v \underline{v}$ und mit $i^* m'\,i_v \underline{v} = v'$ ist daher $v = m\,v'$. Also gilt (2). – Umgekehrt gelte (2). Es sei $u^{-1}(o_{O,B}) = \overline{m'}$, also $\overline{u\,\overline{m'}} = o_{O,B}$. Dann existiert wegen b) ein Monomorphismus m'' mit $\overline{m'} = m\,m''$; also ist $u^{-1}(o_{O,B}) \leq m$. Nach a) ist $u\,m = o_{A',B}$, nach Satz $4.7_{(\delta)}$ also $\overline{u\,m} = o_{O,B}$ und somit $m \leq u^{-1}(o_{O,B})$. Folglich gilt (1).

Satz 4.10_δ: *Es sei* $u: B \to A$ *ein Morphismus und* $e: A \to A'$ *ein Epimorphismus. Dann sind folgende Aussagen äquivalent;*

(1) $e \cong$ *Cokern* u;

(2) a) es ist $e\,u = o_{B,A'}$ *und*

b) zu jedem Morphismus $v: A \to C$ *mit* $v\,u = o_{B,C}$ *existiert ein Morphismus* $v': A' \to C$ *mit* $v = v'\,e$.

Satz $4.11_{(\delta)}$: *Es sei* $m: B \to C$ *ein Monomorphismus und* $e: A \to B$ *ein Epimorphismus. Dann ist*

(1) Kern $m\,e =$ *Kern* e *(2) Cokern* $m\,e =$ *Cokern* m.

Beweis: Nach den Sätzen 3.12 und 4.9 ist Kern $m\,e = e^{-1}(m^{-1}(o_{O,C})) = e^{-1}(o_{O,B}) =$ Kern e.

Satz 4.12:[1] *Es sei* $(e_j: A \to A_j)_{j \in J}$ *ein direktes Produkt, wobei die Menge* J *wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalte;*

[1] Wegen des Korollars zu Satz 3.4_δ kann man in diesem und den folgenden Sätzen dieses Kapitels das direkte Produkt (die direkte Summe) einer Familie von Objekten durch ein allgemeines direktes Produkt (eine allgemeine direkte Summe) dieser Familie ersetzen.

$j_0 \in J$ sei fest gewählt, $(e'_j : A^{j_0} \to A_j)_{j \in J, j \neq j_0}$ sei das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j \in J, j \neq j_0}$; weiter sei $w_j = e'_j$ falls $j \neq j_0$, $w_{j_0} = o_{A^{j_0}, A_{j_0}}$ und $m^{j_0} = \prod_{j \in J} w_j$. Dann ist $m^{j_0} : A^{j_0} \to A$ ein Monomorphismus und $m^{j_0} \cong$ Kern e_{j_0}.

Beweis: Es sei $w, w' : B \to A^{j_0}$ und $m^{j_0} w = m^{j_0} w'$. Für $j \neq j_0$ ist dann $e'_j w = w_j w = e_j m^{j_0} w = e_j m^{j_0} w' = w_j w' = e'_j w'$, also $w = w'$, d. h. m^{j_0} ist ein Monomorphismus. Wir wollen nun Satz 4.10 anwenden. Zunächst ist $e_{j_0} m^{j_0} = w_{j_0} = o_{A^{j_0}, A}$. Es sei nun $v : B \to A$, $e_{j_0} v = o_{B, A_{j_0}}$ und $v' = \prod_{\substack{j \in J \\ j \neq j_0}} e_j v$. Dann ist $e_j m^{j_0} v' = w_j v' = e_j v$, also $v = m^{j_0} v'$.

Satz 4.12$_\delta$: *Es sei $(m_j : A_j \to A)_{j \in J}$ eine direkte Summe, wobei die Menge J wenigstens zwei verschiedene Elemente enthalte; $j_0 \in J$ sei fest gewählt, $(m'_j : A_j \to A^{j_0})_{j \in J, j \neq j_0}$ sei die direkte Summe der Familie $(A_j)_{j \in J, j \neq j_0}$ weiter sei $w_j = m'_j$ falls $j \neq j_0$, $w_{j_0} = o_{A_{j_0}, A^{j_0}}$ und $e^{j_0} = \sum_{j \in J} w_j$. Dann ist $e^{j_0} : A \to A^{j_0}$ ein Epimorphismus und $e^{j_0} \cong$ Cokern m_{j_0}.*

Satz 4.13: *Es sei $(e_j : A \to A_j)_{j \in J}$ ein direktes Produkt. Dann ist $\bigwedge_{j \in J}$ Kern $e_j = o_{O, A}$.*

Beweis: Es sei $\overline{m} : \bar{A} \to A$ und $\overline{m} = \bigwedge_{j \in J}$ Kern e_j, mit der Bezeichnung von Satz 4.12 also $\overline{m} = \bigwedge_{j \in J} m^j$. Dann existieren Monomorphismen m_j mit $m = m^j m_j$ und für alle $j \in J$ ist $e_j m = e_j m^j m_j = o_{\bar{A}, A}$, also $\overline{m} = o_{\bar{A}, A} = o_{O, A}\, o_{\bar{A}, O}$, nach den Sätzen 1.4 und 4.4$_\delta$ ist daher $\bar{A} = O$.

Satz 4.13$_\delta$: *Es sei $(m_j : A_j \to A)_{j \in J}$ eine direkte Summe. Dann ist $\bigwedge_{j \in J}$ Cokern $m_j = o_{A, O}$.*

Satz 4.14: *Es sei $(e_j : A \to A_j)_{j \in J}$ eine Epimorphismenfamilie. Dann ist Kern $\bigvee_{j \in J} e_j = \bigwedge_{j \in J}$ Kern e_j.*

Beweis: Es sei $(e'_j : A' \to A_j)_{j \in J}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j \in J}$ und $v = \prod_{j \in J} e_j$, nach Satz 3.5$_\delta$ also $\underline{v} = \bigvee_{j \in J} e_j$. Dann ist Kern v = Kern $\underline{v} = v^{-1}(o_{O, A'}) = v^{-1}\left(\bigwedge_{j \in J} e_j'^{-1}(o_{O, A_j})\right)$, letzteres nach Satz 4.13; nach Satz 3.15 und Satz 3.12 ist dies weiter $= \bigwedge_{j \in J} (e'_j v)^{-1} (o_{O, A_j}) = \bigwedge_{j \in J} e_j^{-1} (o_{O, A_j})$.

Satz 4.14$_\delta$: *Es sei* $(m_j: A_j \to A)_{j \in J}$ *eine Monomorphismenfamilie. Dann ist Cokern* $\bigvee_{j \in J} m_j = \bigwedge_{j \in J}$ *Cokern* m_j.

Satz 4.15$_{(\delta)}$: *Es ist*

Kern $i_A = o_{O, A}$, *Kern* $o_{A, O} = i_A$;

Cokern $i_A = o_{A, O}$, *Cokern* $o_{O, A} = i_A$.

Beweis: Da i_A ein Monomorphismus ist, folgt Kern $i_A = o_{O, A}$ aus Satz 4.9; Kern $o_{A, O} = i_A$ folgt aus den Sätzen 4.3$_{(\delta)}$ und 4.7$_{(\delta)}$.

Satz 4.16$_{(\delta)}$: *Aus Kern* $u \leq m$ *folgt* u *(Kern* $u\,m$*)* $=$ *Kern* u; *aus Cokern* $v \leq e$ *folgt* v_δ *(Cokern* $e\,v$*)* $=$ *Cokern* v.

Beweis: Es sei $m: A' \to A$. Dann ist $m\,((u\,m)^{-1} (o_{O, A})) = m\,(m^{-1} (u^{-1} (o_{O, A}))) = m\,(m^{-1}$ (Kern u)) $=$ Kern u, letzteres nach Satz 3.13.

Beispiele: In den Kategorien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}$ sind auch die Axiome (VII)–(X) erfüllt. In der Kategorie $\mathfrak{M}$ sind sie nicht erfüllt. Wir modifizieren daher die Kategorie $\mathfrak{M}$, indem wir in jeder Menge, die Objekt ist, ein „Basiselement" auszeichnen, als Nullobjekt eine einpunktige Menge nehmen, alle einpunktigen Mengen identifizieren und als Morphismen nur solche Mengenabbildungen zulassen, die das Basiselement des Definitionsbereiches auf das Basiselement der Bildmenge abbilden. In der so erhaltenen Kategorie $\hat{\mathfrak{M}}$ gelten (I)–(X).

§ 5. Normale Monomorphismen, conormale Epimorphismen

Ein Monomorphismus m heiße *normal*, wenn Kern (Cokern m) $\cong m$ ist. – Ein Epimorphismus e heiße *conormal*, wenn Cokern (Kern e) $\cong e$ ist.

Satz 5.1$_{(\delta)}$: *Jeder Isomorphismus* $i: A \to B$ *ist normal und conormal.*

Beweis: Nach den Sätzen $4.11_{(\delta)}$ und $4.15_{(\delta)}$ und nach (IV_i) ist Kern (Cokern i) $=$ Kern (Cokern $\bar{i}$) $=$ Kern (Cokern i_B) $=$ Kern $o_{B,O} = i_B \cong i$.

Satz 5.2$_{(\delta)}$: *Der Morphismus* $o_{O,A}$ *ist normal, der Morphismus* $o_{A,O}$ *ist conormal.*

Beweis: Satz $4.15_{(\delta)}$.

Wir formulieren jetzt die letzten beiden **Axiome**, denen unsere Kategorie $\mathfrak{C}$ genügen soll.

(XI) *Jeder Epimorphismus ist conormal.*

(XII) *Es sei* $e: A \to B$ *ein Epimorphismus und* $m: A' \to A$ *ein Monomorphismus. Dann gilt:*

1. ist m *normal, so ist* $e(m)$ *normal;*

2. ist Kern $e \leq m$ *und* $e(m)$ *normal, so ist* m *normal.*

Auch diese beiden Axiome sind in den Kategorien $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{C}$ erfüllt.

Im Gegensatz zu den Axiomen (I) – (X) sind die Axiome (XI) und (XII) nicht selbstdual. Deshalb ist es von hier ab nicht mehr möglich, Sätze ohne erneuten Beweis zu dualisieren.

Satz 5.3: *Für jeden Morphismus* $u: A \to B$ *ist* $\underline{u} =$ *Cobild* $u =$ $=$ *Cokern (Kern* u*).*

Beweis: Cokern (Kern u) $=$ Cokern (Kern $\underline{u}$) $= \underline{u}$ nach Satz $4.11_{(\delta)}$ und (XI).

Satz 5.4: *Ein Monomorphismus* $m: A' \to A$ *ist dann und nur dann normal, wenn ein Morphismus* $u: A \to B$ *mit* $m \cong$ *Kern* u *existiert.*

Beweis: Es sei m normal. Für $e =$ Cokern m ist dann $m \cong$ $\cong$ Kern e. Umgekehrt sei ein $u: A \to B$ mit $m \cong$ Kern u gegeben. Nach Satz $4.11_{(\delta)}$ ist dann $m \cong$ Kern $u =$ Kern $\underline{u}$. Nach (XI) und Satz $4.11_{(\delta)}$ ist daher $\underline{u} =$ Cokern (Kern u) $=$ Cokern $\overline{m}$ $=$ $=$ Cokern m, also Kern (Cokern m) $=$ Kern $\underline{u} = \overline{m} \cong m$.

Satz 5.5: *Es sei $u : A \to B$ ein Morphismus, $m : B' \to B$ normal und $e \cong$ Cokern m. Dann ist $u^{-1}(m) =$ Kern $e\,u$.*

Beweis: Es sei $e : B \to C$. Dann ist Kern $e\,u = u^{-1}\big(e^{-1}(o_{O,C})\big) = u^{-1}$ (Kern e) $= u^{-1}(m)$.

Satz 5.6: *Es seien $e' : A \to B$ und $e'' : B \to C$ Epimorphismen. Dann ist Cokern $(e'$ Kern $(e''\,e')) \cong e''$.*

Beweis: Es sei Kern $e''\,e' : A' \to A$. Dann ist Cokern (e' Kern $(e''\,e')) = e'^{-1}_{\delta}\big((\text{Kern}\; e''\,e')^{-1}_{\delta}(o_{A',O})\big) = e'^{-1}_{\delta}$ (Cokern (Kern $e''\,e'$)) $=$ $= e'^{-1}_{\delta}(\underline{e''\,e'}) = e'^{-1}_{\delta}(e'_{\delta}(e'')) \cong e''$, letzteres nach Satz 3.8_{δ}.

Satz 5.7: *Es sei $e : A \to B$ ein Epimorphismus, $m : A' \to A$ normal und Kern $e \leq m$. Dann ist $m \cong$ Kern ((Cokern $e\,m$) e).*

Beweis: Es sei Cokern $e\,m : B \to B'$ und Kern $e : A'' \to A$. Aus Kern $e \leq m$ folgt die Existenz eines Monormorphismus $m' : A'' \to A'$ mit $m\,m' =$ Kern e. Es ist (Cokern $e\,m$) $e\,m =$ $= o_{A',B'}$. Weiter sei $w : A \to X$ ein Morphismus mit $w\,m = o_{A',X}$. Dann ist $o_{A'',X} = w\,m\,m' = w$ Kern e, also, da $e \cong$ Cokern (Kern e) ist, $w = w'\,e$ und es ist $w'\,e\,m = w\,m = o_{A',X}$; also existiert ein Morphismus w'' mit $w' = w''$ Cokern $e\,m$; folglich ist $w = w''$ (Cokern $e\,m$) e; hieraus folgt nach Satz 4.10_{δ} die Behauptung.

Satz 5.8: *Es sei $u : A \to B$ ein Morphismus und $u(m)$ normal. Dann ist $u(m) =$ Kern (Cokern $u\,m$).*

Beweis: Es ist $u(m) = \overline{u\,m} =$ Kern (Cokern $\overline{u\,m}$) $=$ Kern (Cokern $u\,m$), letzteres nach Satz 4.11_{δ}.

Satz 5.9: *Es sei $e : A \to B'$ ein Epimorphismus, $v : A \to B$ ein Morphismus und Kern $e \leq$ Kern v. Dann existiert ein Morphismus v' mit $v = v'\,e$.*

Beweis: Es sei Kern $e : \bar{A} \to A$ und $\underline{v} : A \to \underline{A}$. Nach Voraussetzung existiert ein Monomorphismus m mit Kern $e =$ (Kern v) m. Weiter ist $e \cong$ Cokern Kern $e =$ Cokern ((Kern v) m) und $\underline{v}$ Kern $e = \underline{v}$ (Kern v) $m = \underline{v}$ (Kern $\underline{v}$) $m = o_{\bar{A},\underline{A}}$; also existiert ein Morphismus v'' mit $\underline{v} = v'' e$ und daher ist $\bar{v}\, i_v\, v''\, e = = \bar{v}\, i_v\, \underline{v} = v$. Setzen wir nun $v' = \bar{v}\, i_v\, v''$, so ist also $v = v'\, e$.

Satz 5.10: *Es sei $e : A \to B$ ein Epimorphismus und $m : B' \to B$ normal. Dann ist $e\,(e^{-1}\,(m)) \cong m$.*

Beweis: Nach Satz 5.5 ist $e^{-1}\,(m) = \text{Kern}\,((\text{Cokern}\; m)\, e)$, nach Satz 5.4 also $e^{-1}\,(m)$ normal, nach (XII) also $e\,(e^{-1}\,(m))$ normal. Nach Satz 5.8 und Satz 5.6 ist daher $e\,(e^{-1}\,(m)) = = e(\text{Kern}\,((\text{Cokern}\; m)\, e)) = \text{Kern Cokern}\,(e\; \text{Kern}\,((\text{Cokern}\; m)\, e)) = \text{Kern Cokern}\; m \cong m$.

Satz 5.11: *Es sei $e : A \to B$ ein Epimorphismus und φ der durch e induzierte Monomorphismus des Vereins $\mathfrak{N}^e_A$ der normalen kanonischen Monomorphismen $m : X \to A$ mit Kern $e \leq m$ in den Verein $\mathfrak{N}_B$ der normalen kanonischen Monomorphismen $m : X \to B$, d. h. $\varphi\,(m) = e\,(m)$, wobei m ein normaler kanonischer Monomorphismus mit Kern $e \leq m$ ist. Dann ist φ ein Isomorphismus des Vereins $\mathfrak{N}^e_A$ auf den Verein $\mathfrak{N}_B$.*

Beweis: 1. Nach (XII), 1. ist φ eine Abbildung von $\mathfrak{N}^e_A$ in $\mathfrak{N}_B$. 2. Nach (XII), 2. und Satz 5.10 ist φ eine Abbildung auf. 3. φ ist eineindeutig; es seien nämlich m' und m'' aus $\mathfrak{N}^e_A$ und es sei $e\,(m') = e\,(m'')$, d. h. $\overline{e\, m'} = \overline{e\, m''}$. Nach Satz 5.7 und Satz $4.11_{(\delta)}$ ist dann $m' = \text{Kern}\,((\text{Cokern}\; e\, m')\, e) = \text{Kern}\,((\text{Cokern}\; \overline{e\, m'})\, e) = \text{Kern}\,((\text{Cokern}\; \overline{e\, m''})\, e) = \text{Kern}\,((\text{Cokern}\;\; e\, m'')\, e) = m''$. 4. Daß φ ein Isomorphismus ist, folgt nun unmittelbar aus den Sätzen 2.8, 3.9 und 5.10.

Satz 5.12: *Für jeden Morphismus $u : A \to B$ und für jeden Monomorphismus $m : A' \to A$ ist $u^{-1}\,(u\,(m)) = m \vee \text{Kern}\; u$.*

Beweis: Es sei $e = i_{u\,m}\, \underline{u\, m} : A' \to B'$, $m' = u^{-1}\,(\overline{u\, m}) : A'' \to A$. Aus $m \leq u^{-1}\,(u\,(m))$ folgt: es existiert ein Monomorphismus $m'' : A' \to A''$ mit $m'\, m'' = m$ und es ist $u(m) \leq u(u^{-1}(u(m)))$. Da andererseits $u\,(u^{-1}\,(u\,(m))) \leq u\,(m)$ ist, muß $u\,(u^{-1}\,(u\,(m))) = u(m)$ sein, also $\overline{u\, m'} = \overline{u\, m}$; folglich ist $i_{u\,m}\, \underline{u\, m'} = e' : A'' \to B'$. Weiter folgt daraus $\overline{u\, m}\; e'\, m'' = u\, m'\, m'' = u\, m = \overline{u\, m}\; e$, also $e'\, m'' = e$, und daher ist $e'\,(m'' \vee \text{Kern}\; e') = e'\,(m'') = i_{B'}$, nach (XII), 2. also $m'' \vee \text{Kern}\; e'$ normal und nach Satz 5.11 gleich $i_{A''}$. Weiter ist $u^{-1}(u(m)) = u^{-1}(\overline{u\,m}) = m' = m'(i_{A''}) = m'(m'' \vee \text{Kern}\, e') = m'\, m'' \vee m'\, (\text{Kern}\, e') = m \vee m'\, (\text{Kern}\, \overline{u\,m'}\, e')$, letzteres nach Satz $4.11_{(\delta)}$. Nach den Sätzen $4.3_{(\delta)}$ und 3.9 ist Kern $u = u^{-1}(o_{O,B}) \leq u^{-1}(\overline{u\,m}) = m'$ und nach den Sätzen 3.12 und 3.14 folgt hieraus $m' = m \vee m'\, (\text{Kern}\, u\, m') = m \vee m'\, (m'^{-1}(u^{-1}(o_{O,B}))) = m \vee (m' \wedge \text{Kern}\, u) = m \vee \text{Kern}\, u$.

§ 6. Der Verband der normalen kanonischen Monomorphismen m : X → A

Satz 6.1: *Für jede Familie $(m_j\colon A_j \to A)_{j \in J}$ normaler Monomorphismen ist $\bigwedge_{j \in J} m_j$ normal und Cokern $\bigwedge_{j \in J} m_j = \bigvee_{j \in J}$ Cokern m_j.*

Beweis: Nach Satz 4.14 ist Kern $\bigvee_{j \in J}$ Cokern $m_j = \bigwedge_{j \in J}$ Kern Cokern $m_j = \bigwedge_{j \in J} m_j$; nach Satz 5.4 ist also $\bigwedge_{j \in J} m_j$ normal. Nach (XI) folgt weiter Cokern $\bigwedge_{j \in J} m_j =$ Cokern (Kern $\bigvee_{j \in J}$ Cokern m_j) $= \bigvee_{j \in J}$ Cokern m_j.

Satz 6.2: *Die Vereinigung endlich vieler normaler Monomorphismen $m_j\colon A_j \to A$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ ist normal.*[1]

Beweis: Es genügt, dies für zwei normale Monomorphismen $m'\colon A' \to A$ und $m''\colon A'' \to A$ zu zeigen. Es sei $e' =$ Cokern m'. Dann ist umgekehrt $m' \cong$ Kern e'. Nach Satz 5.12 ist $m'' \vee m' = m'' \vee \text{Kern}\, e' = e'^{-1}(e'(m''))$. Nach Axiom (XII) folgt aber aus der Normalität von m'', daß auch $e'^{-1}(e'(m''))$ normal ist, also auch $m'' \vee$ Kern e'.

Satz 6.3: *Es seien $m'\colon A' \to A$ und $m''\colon A'' \to A$ Monomorphismen, m' sei normal und $m = m' \wedge m''$. Dann ist $m''^{-1}(m)$ normal.*

Beweis: 1. Es sei $m\colon \underline{A} \to A$ und m_2 der Monomorphismus mit $m''\, m_2 = m$. Es ist $m''(m_2) = \overline{m''\, m_2} = m$, nach Satz 3.8 also $m_2 \cong m''^{-1}(m''(m_2)) = m''^{-1}(m)$. 2. Es sei m_1 der

[1] Wir wissen nicht, ob dies auch für beliebig viele normale Monomorphismen gilt.

Monomorphismus mit $m' m_1 = m$ und es sei $e = \text{Cokern } m'$: $: A \to \bar{A}$, also, da m' normal ist, $m' \cong \text{Kern } e$. Dann ist $e\, m''\, m_2 = = e\, m'\, m_1 = o_{\underline{A}, \bar{A}}$. Weiter sei $w : B \to A''$ ein Morphismus mit $e\, m''\, w = o_{B, \bar{A}}$. Nach Satz 4.10 existiert ein $w' : B \to A'$ mit $m'\, w' = m''\, w$ und nach Satz 2.9 ist $\overline{m''\, w} = \overline{m'\, w'} \leq m'$ und $\overline{m''\, w} \leq m''$, also $\overline{m''\, w} \leq m' \wedge m''$. Folglich existiert ein Morphismus w'' mit $\overline{m''\, w} = m\, w''$ und es ist $m''\, m_2\, w''\, i_{m''\, w}\, \underline{m''\, w} = = m\, w''\, i_{m''\, w}\, \underline{m''\, w} = \overline{m''\, w}\, i_{m''\, w}\, \underline{m''\, w} = m''\, w$; somit ist $w = = m_2\, w''\, i_{m''\, w}\, \underline{m''\, w}$. Es ist nach Satz 4.10 also $m_2 \cong \text{Kern } e\, m''$, nach Satz 5.4 folglich m_2 und damit wegen 1. auch $m''^{-1}(m)$ normal.

Satz 6.4: *Es sei $e : A \to B$ ein Epimorphismus, $m : A' \to A$ ein Monomorphismus und $m' : B' \to B$ ein normaler Monomorphismus. Dann ist $e\, m\, ((e\, m)^{-1}(m')) = e\,(m) \wedge m'$.*

Beweis: Es sei $(\overline{e\, m})^{-1}(m') = m''$ und $\overline{e\, m} : \bar{B} \to B$. Nach Satz 3.14 ist dann $\overline{e\, m}\,(m'') = \overline{e\, m}\,((\overline{e\, m})^{-1}(m')) = \overline{e\, m} \wedge m'$, also ist $m'' = (\overline{e\, m})^{-1}(\overline{e\, m} \wedge m')$, nach Satz 6.3 also m'' normal. Weiter ist nun $e\, m\, ((e\, m)^{-1}(m')) = \overline{e\, m}\, i_{e\, m}\, \underline{e\, m}\, ((i_{e\, m}\, \underline{e\, m})^{-1}(m''))$, und dies ist nach Satz 5.10 weiter $= \overline{e\, m}\,(m'') = \overline{e\, m} \wedge m' = = e\,(m) \wedge m'$.

Satz 6.5: *Es sei $e : A \to B$ ein Epimorphismus, $m : A' \to A$ ein Monomorphismus und $m' : B' \to B$ ein normaler Monomorphismus. Dann ist $e\,(m \wedge e^{-1}(m')) = e\,(m) \wedge m'$.*

Beweis: Nach Satz 3.14 und Satz 6.4 ist $e\,(m \wedge e^{-1}(m')) = = e\,(m\,(m^{-1}(e^{-1}(m')))) = e\, m\, ((e\, m)^{-1}(m')) = e\,(m) \wedge m'$.

Satz 6.6: *Für jedes Objekt A ist der Verband der normalen kanonischen Monomorphismen $m : X \to A$ modular,* d. h. für drei normale kanonische Monomorphismen $m_1 : A_1 \to A$, $m_2 : A_2 \to A$ und $m_3 : A_3 \to A$ mit $m_1 \leq m_3$ ist $(m_1 \vee m_2) \wedge m_3 = = m_1 \vee (m_2 \wedge m_3)$.

Beweis: Nach Satz 6.1 und Satz 6.2 sind $m_1 \vee m_2$, $(m_1 \vee m_2) \wedge m_3$ und $m_1 \vee (m_2 \wedge m_3)$ normal. Weiter sei $e = \text{Cokern } m_1$, also $m_1 = \text{Kern } e$. Da außerdem $m_1 \leq (m_1 \vee m_2) \wedge m_3$ ist, gilt:

$$
\begin{array}{ll}
(m_1 \vee m_2) \wedge m_3 = & \\
= e^{-1}\left(e\left((m_1 \vee m_2) \wedge m_3\right)\right) & \text{nach Satz 5.12} \\
= e^{-1}\left(e\left((m_1 \vee m_2) \wedge e^{-1}\left(e\left(m_3\right)\right)\right)\right) & \text{nach Satz 5.12} \\
= e^{-1}\left(e\left(m_1 \vee m_2\right) \wedge e\left(m_2\right)\right) & \text{nach Satz 6.5 und (XII), 2.} \\
= e^{-1}\left(e\left(m_2\right) \wedge e\left(m_3\right)\right) & \text{nach Satz 3.6 und Satz 4.10} \\
= e^{-1}\left(e\left(m_2 \wedge e^{-1}\left(e\left(m_3\right)\right)\right)\right) & \text{nach Satz 6.5 und Satz 5.12} \\
= e^{-1}\left(e\left(m_2 \wedge m_3\right)\right) & \text{nach Satz 5.12} \\
= (m_2 \wedge m_3) \vee m_1 & \text{nach Satz 5.12.}
\end{array}
$$

§ 7. Exakte Sequenzen und Isomorphiesätze

Es sei J ein (nicht notwendig endlicher) Abschnitt aus der Menge der ganzen Zahlen und jedem $j \in J$ sei ein Morphismus $u_j \colon A_j \to A_{j+1}$ zugeordnet. Dann nennen wir die Gesamtheit dieser Morphismen eine *Sequenz* und schreiben dafür etwa $(\ldots, u_{j-1}, u_j, \ldots)$.

Eine Sequenz heiße *exakt bei* A_j, wenn Bild u_{j-1} = Kern u_j ist ($j-1$, $j \in J$). Eine Sequenz heiße *exakt*, wenn sie überall exakt ist. Hieraus folgt insbesondere, daß für eine exakte Sequenz $u_j u_{j-1} = o_{A_{j-1}, A_{j+1}}$ ist ($j-1$, $j \in J$).

Satz 7.1: *Eine Sequenz (u_1, u_2) ist dann und nur dann exakt, wenn $\overline{u_1}$ normal und $\underline{u_2}$ = Cokern u_1 ist.*

Beweis: 1. Die Sequenz (u_1, u_2) sei exakt. Nach Satz 5.4 ist dann $\overline{u_1}$ normal und nach Satz 5.3 ist $\underline{u_2}$ = Cokern Kern $\underline{u_2}$ = = Cokern $\overline{u_1}$ = Cokern u_1, letzteres nach Satz $4.11_{(\delta)}$. 2. Es sei $\overline{u_1}$ normal und $\underline{u_2}$ = Cokern u_1. Nach Satz $4.11_{(\delta)}$ ist dann $\overline{u_1}$ = Kern Cokern $\overline{u_1}$ = Kern Cokern u_1 = Kern $\underline{u_2}$ = Kern u_2.

Satz 7.2: *Es sei $u \colon A \to B$ ein Morphismus. Die Sequenz*

$$
\left.\begin{array}{l}
(o_{O,A}, u) \\
(u, o_{B,O}) \\
(o_{O,A}, u, o_{B,O})
\end{array}\right\} \textit{ist genau dann exakt, wenn } u \textit{ ein} \left\{\begin{array}{l}
\textit{Monomorphismus} \\
\textit{Epimorphismus} \\
\textit{Isomorphismus}
\end{array}\right.
$$

ist.

Beweis: 1. Ist $(o_{O,A}, u)$ exakt, so ist $\underline{u}$ = Cokern Kern $\underline{u}$ = = Cokern $o_{O,A} = i_A$, also u ein Monomorphismus. 2. Ist $(u, o_{B,O})$ exakt, so ist $\bar{u}$ = Kern $o_{B,O} = i_B$, also u ein Epimorphismus. Ist umgekehrt u ein Epimorphismus, so ist $\overline{u} = i_B$ = Kern $o_{B,O}$. 3. Die dritte Behauptung folgt auf Grund des 1. Korollars zu Satz 1.1_δ und Satz 2.3 aus den beiden ersten Behauptungen.

Satz 7.3: *Es seien $u: A \to B$ und $v: B \to C$ Morphismen. Die Sequenz (u, v) ist dann und nur dann exakt, wenn die Sequenz $(\overline{u}, \underline{v})$ exakt ist.*

Beweis: Es ist Kern v = Kern $\underline{v}$ nach Satz $4.11_{(\delta)}$ und $u\,(i_A) = \bar{u}$.

Fassen wir die Mengen Hom (X, Y) als Objekte der am Ende von § 4 definierten Kategorie $\widehat{\mathfrak{M}}$ auf, mit $o_{X,Y}$ als Basiselement, so induziert ein Morphismus $u: A \to B$ in $\widehat{\mathfrak{M}}$ Morphismen u_x : Hom $(X, A) \to$ Hom (X, B), indem wir $u_X(v: X \to A) = = u\,v: X \to B$ setzen.

Satz 7.4: *Es sei $m: A \to B$ und $u: B \to C$. Die Sequenz $(o_{O,A}, m, u)$ ist dann und nur dann exakt, wenn die in $\widehat{\mathfrak{M}}$ induzierte Sequenz $((o_{O,A})_X, m_X, u_X)$ exakt ist für alle Objekte X unserer Kategorie $\mathfrak{C}$.*

Beweis: 1. Es sei die Sequenz $(o_{O,A}, m, u)$ exakt und $v: X \to B$ ein Morphismus. Dann ist $u_X(v) = o_{X,C}$ genau dann, wenn ein Morphismus $v': X \to A$ existiert mit $v = m\,v'$, d. h. wenn ein $v' \in$ Hom (X, A) existiert mit $m_X(v') = v$, also ist die Sequenz (m_X, u_X) exakt. Genauso folgert man, daß die Sequenz $((o_{O,A})_X, m_X)$ exakt ist. 2. Es sei die Sequenz $((o_{O,A})_X, m_X, u_X)$ exakt für alle Objekte X. Für jeden Morphismus $w: X \to A$ mit $m\,w = o_{X,B}$ ist dann $m_X\,(w) = o_{X,A}$; also existiert ein $w': X \to O$ mit $w = (o_{O,A})_X\,(w')$, d. h. $w = o_{O,A}\,w'$, also ist die Sequenz $(o_{O,A}\,m)$ exakt und nach Satz 7.3 ist m ein Monomorphismus. Analog folgert man, daß zu jedem Morphismus $v: X \to B$ mit $u\,v = o_{X,C}$ ein Morphismus v' mit $v = m\,v'$ existiert. Indem wir für X speziell A wählen, erhalten wir noch $um = o_{A,C}$, also ist nach Satz 4.10 auch (m, u) eine exakte Sequenz.

Satz 7.5: *Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten*

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d, "o_{O,A_1}"] & O \arrow[d, "o_{O,B_1}"] & \\
 & A_1 \arrow[r, "m_1"'] \arrow[d, "m'"] & B_1 \arrow[d, "m''"] & \\
O \arrow[r, "o_{O,A_2}"'] & A_2 \arrow[r, "m_2"'] \arrow[d, "v'"] & B_2 \arrow[r, "v_2"'] \arrow[d, "v''"] & C_2 \\
O \arrow[r, "o_{O,A_3}"'] & A_3 \arrow[r, "m_3"'] & B_3 &
\end{tikzcd}$$

Dann ist m_1 ein Monomorphismus und $m_1 \cong$ Kern $v_2\, m''$.

Beweis: 1. Nach Satz 7.2 und Satz 1.2 ist $m''\, m_1 = m_2\, m'$ ein Monomorphismus, und nach Satz 1.4 ist daher m_1 ein Monomorphismus. 2. Es ist $v_2\, m''\, m_1 = v_2\, m_2\, m' = o_{A_1, C_2}$. Es sei nun $w : X \to B_1$ ein Morphismus mit $v_2\, m''\, w = o_{X, C_2}$. Nach den Sätzen 7.2, 7.1 und 4.10 existiert dann ein Morphismus w' mit $m_2 w' = m'' w$ und es ist $m_3 v' w' = v'' m_2 w' = v'' m'' w = o_{X, B_3}$; daraus folgt, da m_3 ein Monomorphismus ist, $v' w' = o_{X, A_3}$, und nach Satz 7.1 und Satz 4.10 existiert somit ein Morphismus w'' mit $w' = m' w''$. Nun ist $m''\, m_1 w'' = m_2\, m'\, w'' = m_2\, w' = m''\, w$, also, da m'' nach Satz 7.2 ein Monomorphismus ist, $w = m_1\, w''$ und nach Satz 4.10 ist somit $m_1 \cong$ Kern $v_2\, m''$.

Satz 7.5_d: *Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:*

$$\begin{tikzcd}
 & O & O & \\
 & A_1 \arrow[u, "o_{A_1,O}"] & B_1 \arrow[l, "e_1"] \arrow[u, "o_{B_1,O}"] & \\
O & A_2 \arrow[l, "o_{A_2,O}"] \arrow[u, "e'"] & B_2 \arrow[l, "e_2"] \arrow[u, "e''"] & C_2 \arrow[l, "v_2"] \\
O & A_3 \arrow[l, "o_{A_3,O}"] \arrow[u, "v'"] & B_3 \arrow[l, "e_3"] \arrow[u, "v''"] &
\end{tikzcd}$$

Dann ist e_1 ein Epimorphismus und $e_1 \cong$ Cokern $e''\, v_2$.

Beweis: Der Beweis verläuft unter Beachtung von Satz 7.1 und Satz 7.2 fast vollständig dual zu dem Beweis von Satz 7.5.

Satz 7.6: *Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:*

$$\begin{tikzcd}
 & O \arrow[d, "o_{O,A_1}"] & O \arrow[d, "o_{O,A_2}"] & O \arrow[d, "o_{O,A_3}"] & \\
O \arrow[r, "o_{O,A_1}"'] & A_1 \arrow[r, "m'"'] \arrow[d, "m_1"] & A_2 \arrow[r, "e'"'] \arrow[d, "m_2"] & A_3 \arrow[r, "o_{A_3,O}"'] \arrow[d, "m_3"] & O \\
O \arrow[r, "o_{O,B_1}"'] & B_1 \arrow[r, "m''"'] \arrow[d, "e_1"] & B_2 \arrow[r, "e''"'] \arrow[d, "e_2"] & B_3 \arrow[r, "o_{B_3,O}"'] \arrow[d, "e_3"] & O \\
 & C_1 \arrow[d, "o_{C_1,O}"] & C_2 \arrow[d, "o_{C_2,O}"] & C_3 \arrow[d, "o_{C_3,O}"] & \\
 & O & O & O &
\end{tikzcd}$$

Dann existieren eindeutig bestimmte Morphismen $m''' : C_1 \to C_2$ *und* $e''' : C_2 \to C_3$ *derart, daß* $m''' e_1 = e_2 m''$ *und* $e''' e_2 = e_3 e''$ *ist. Die Sequenz* $(o_{O,C_1}, m''', e''', o_{C_3,O})$ *ist exakt.*[1]

Beweis: 1. Da $e_2 m'' m_1 = e_2 m_2 m' = o_{A_1,C_2}$ ist, folgt nach Satz 7.1 und Satz 4.10_δ die Existenz eines Morphismus $m''' : C_1 \to C_2$ mit $m''' e_1 = e_2 m''$, und m''' ist eindeutig bestimmt, da e_1 nach Satz 7.2 ein Epimorphismus ist. Analog zeigt man die Existenz und Eindeutigkeit von e'''. 2. Nach den Sätzen 7.2 1.2_δ und 1.4_δ folgt aus $e''' e_2 = e_3 e''$, daß e'' ein Epimorphismus ist. 3. Nach Satz 7.5 ist $m_1 \cong$ Kern $e_2 m''$. Nach Satz 5.3 und Satz 7.1 ist daher $\underline{e_1} = \underline{e_2 m''}$; folglich ist, wenn wir mit i^* das Inverse von i_{e_1} bezeichnen, $m''' e_1 = e_2 m'' = \overline{e_2 m''}\, i_{e_2 m''} i^* i_{e_1} \underline{e_2 m''} = \overline{e_2 m''}\, i_{e_2 m''} i^* i_{e_1} \underline{e_1} = \overline{e_2 m''}\, i_{e_2 m''} i^* e_1$, also $m''' = \overline{e_2 m''}\, i_{e_2 m''} i^*$; nach dem 1. Korollar zu Satz 1.1_δ und nach Satz 1.4 ist also m''' ein Monomorphismus. 4. Nach Satz 7.1 ist m'' normal und nach (XII), 2. folgt daher aus $m''' \cong \overline{e_2 m''}\, i_{e_2 m''} i^* =$

[1] Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung des 2. Isomorphiesatzes der Gruppentheorie.

$= e_2(m'')$, letzteres nach Satz 2.4, daß m''' normal ist. Da nach Satz 7.5_δ und Satz $4.11_{(\delta)}$ außerdem $e''' \cong \text{Cokern } e_2 m'' = \text{Cokern } m'''$ ist, folgt aus Satz 7.1 zusammen mit Satz 2.3. und Satz 7.2 die Exaktheit der Sequenz $(o_{O,C_1}, m''', e''', o_{C_3,O})$.

Satz 7.6_δ: *Gegeben sei das folgende kommutative Diagramm mit exakten Zeilen und Spalten:*

$$\begin{tikzcd}
 & O & O & O & \\
O & A_1 \arrow[l, "o_{A_1,O}"] \arrow[u, "o_{A_1,O}"'] & A_2 \arrow[l, "e'"'] \arrow[u, "o_{A_2,O}"'] & A_3 \arrow[l, "m'"'] \arrow[u, "o_{A_3,O}"'] & O \arrow[l, "o_{O,A_3}"] \\
O & B_1 \arrow[l, "o_{B_1,O}"] \arrow[u, "e_1"'] & B_2 \arrow[l, "e''"'] \arrow[u, "e_2"'] & B_3 \arrow[l, "m''"'] \arrow[u, "e_3"'] & O \arrow[l, "o_{O,B_3}"] \\
 & C_1 \arrow[u, "m_1"'] & C_2 \arrow[u, "m_2"'] & C_3 \arrow[u, "m_3"'] & \\
 & O \arrow[u, "o_{O,C_1}"'] & O \arrow[u, "o_{O,C_2}"'] & O \arrow[u, "o_{O,C_3}"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann existieren eindeutig bestimmte Morphismen $e''' : C_2 \to C_1$ und $m''' : C_3 \to C_2$ derart, daß $m_1 e''' = e'' m_2$ und $m_2 m''' = m'' m_3$ ist. Die Sequenz $(o_{O,C_3}, m''', e''', o_{C_1,O})$ ist exakt.

Beweis: Der Beweis verläuft im wesentlichen dual zu dem von Satz 7.6, wobei man anstelle von Satz 5.3 hier den Satz 5.8 zusammen mit (XII), 2. verwendet.

Anmerkung: Der Satz 7.6_δ entspricht dem Theorem 5.5 in Buchsbaum, Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 1–34. Ohne Beweis sei noch angeführt, daß sich auch das dortige Theorem 5.8 unter der zusätzlichen Voraussetzung der Normalität von $\bar{d}_1$, $\bar{d}$ und $\bar{d}_2$, das Theorem 5.9 und die Korollare 5.10 und 5.11 in unveränderter Form herleiten lassen.

§ 8. Das direkte Produkt[1]

Satz 8.1[2]: *Es sei* $(e_j: B \to A_j)_{j \in J}$ *das direkte Produkt der Familie* $(A_j)_{j \in J}$, *wobei die Menge* J *wenigstens zwei verschiedene Elemente enthält;* $j_0 \in J$ *sei fest gewählt und* $(e_j^{j_0}: B^{j_0} \to A_j)_{j \in J, j \neq j_0}$ *sei das direkte Produkt der Familie* $(A_j)_{j \in J, j \neq j_0}$. *Dann gilt:*

1. *Es existieren eindeutig bestimmte Monomorphismen* $m_j: A_j \to B$ *mit* $e_j m_k = o_{A_k, A_j}$, *falls* $k \neq j$, *und* $e_j m_j = i_{A_j}$;
   (Wir nennen diese Monomorphismen m_j die zum direkten Produkt *zugehörigen* Monomorphismen.[3])
2. *Es sei* $e'_{j_0} = \prod_{j \in J, j \neq j_0} e_j$. *Dann ist* $e'_{j_0} \cong$ *Cokern* m_{j_0}.
3. *Für alle* $j \in J$ *ist* m_j *normal.*
4. *Es sei* $w_j = e_j^{j_0}$ *für* $j \neq j_0$ *und* $w_{j_0} = o_{B^{j_0}, A_{j_0}}$. *Dann ist* $m^{j_0} = \prod_{j \in J} w_j$ *ein Monomorphismus.*

Beweis: 1. Es ist $m_j = \prod_{k \in J} v_k$ mit $v_k = o_{A_j, A_k}$ für $j \neq k$ und $v_j = i_{A_j}$, also existieren die Morphismen m_j und sind eindeutig bestimmt. Nach Satz 3.3 sind die m_j Monomorphismen. 2. Für $j \neq j_0$ ist $e_j^{j_0} e'_{j_0} m^{j_0} = e_j m^{j_0} = e_j^{j_0}$, also $e'_{j_0} m^{j_0} = i_{B^{j_0}}$, nach Satz 1.4 und Satz 1.4$_\delta$ also e'_{j_0} ein Epimorphismus und m^{j_0} ein Monomorphismus, womit 4. bereits bewiesen ist. Für $j \neq j_0$ ist weiter $e_j^{j_0} e'_{j_0} m_{j_0} = e_j m_{j_0} = o_{A_{j_0}, A_j}$, also $e'_{j_0} m_{j_0} = o_{A_{j_0}, B^{j_0}}$. Es sei nun $w: X \to B$ ein Morphismus mit $e'_{j_0} w = o_{X, B^{j_0}}$. Für $j \neq j_0$ ist dann $e_j w = e_j^{j_0} e'_{j_0} w = o_{X, A_j}$ und es ist $e_{j_0} m_{j_0} e_{j_0} w = e_{j_0} w$, also $w = m_{j_0} e_{j_0} w$. Nach Satz 4.10 ist daher $m_{j_0} \cong$ Kern e'_{j_0}, nach (XI) also $e'_{j_0} \cong$ Cokern m_{j_0} und außerdem nach Satz 5.4 der Monomorphismus m_{j_0} normal.

---

[1] Es bleibt offen, inwieweit die zu den Sätzen dieses Kapitels dualen Aussagen richtig sind (vgl. die Bemerkung zu den Axiomen (XI) und (XII) in § 5).

[2] Siehe Fußnote Seite 181.

[3] Dual dazu erhält man die zu einer direkten Summe zugehörigen Empimorphismen.

Satz 8.2: *Es sei* $(e_j: B \to A_j)_{j=1,2}$ *das direkte Produkt von* A_1 *und* A_2. *Weiter seien* m_1, m_2 *die zugehörigen Monomorphismen und* $m = m_1 \vee m_2$. *Dann ist Cokern* $m = o_{B,O}$.

Beweis: Für jedes Objekt X ist $(i_X: X \to X)$ ein allgemeines direktes Produkt von X. Nach dem Korollar zu Satz 3.4_δ und nach Satz 8.1 ist daher $e_1 \cong$ Cokern m_2, $e_2 \cong$ Cokern m_1, $m_1 \cong$ Kern e_2 und $m_2 \cong$ Kern e_1. Es sei $e_1 \wedge e_2 = e: B \to \bar{B}$. Dann existieren Epimorphismen e_1' und e_2' mit $e_1' e_1 = e_2' e_2 = e$ und es ist $e_1' = e_1' e_1 m_1 = e m_1 = e_2' e_2 m_1 = o_{A_1, \bar{B}}$, somit ist $e = e_1' e_1 = o_{B, \bar{B}}$. Nach den Sätzen 4.14_δ und $4.7_{(\delta)}$ ist weiter Cokern $m =$ Cokern $(m_1 \vee m_2) =$ Cokern $m_1 \wedge$ Cokern $m_2 = \underline{e} = o_{B,O}$.

Satz 8.3: *Es sei* $(e_j: B \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ *das direkte Produkt von* $A_1, \ldots, A_n$ *und* $m_1, \ldots, m_n$ *seien die zugehörigen Monomorphismen. Dann ist* $\bigvee_{j=1}^{n} m_j = i_B$.

Beweis: Für $n = 1$ ist die Behauptung richtig. Wir nehmen an sie sei für $n \leq r$ bereits bewiesen. Es sei nun $n = r + 1$ und $(e_j': B' \to A_j)_{j=1,\ldots,n-1}$ das direkte Produkt von $A_1, \ldots, A_{n-1}$. Weiter seien $m_1', \ldots, m_{n-1}'$ die zugehörigen Monomorphismen, $(e_j'': B'' \to A_j'')_{j=1,2}$ das direkte Produkt von $A_1'' = B'$ und $A_2'' = A_n$ und m_1'', m_2'' die zugehörigen Monomorphismen. Wir setzen $\prod_{j=1}^{n} v_j = v$, wobei $v_j = e_j' e_1''$ ist für $j = 1, \ldots, n-1$ und $v_n = e_2''$; weiter setzen wir $\prod_{j=1}^{n-1} e_j = e'$ und $\prod_{j=1}^{2} w_j = w$, wobei $w_1 = e'$ und $w_2 = e_n$ ist. Für $j = 1, \ldots, n-1$ ist dann $e_j v w = e_j' e_1'' w = e_j' e' = e_j$ und es ist $e_n v w = e_2'' w = e_n$; also ist $v w = i_B$ und daher v ein Epimorphismus. Für $j, k = 1, \ldots, n-1$ ist weiter $e_k v m_1'' m_j' = e_k' e_1'' m_1'' m_j'$ und dies ist $= o_{A_j, A_k}$, falls $j \neq k$, und $= i_{A_j}$, falls $j = k$ ist. Außerdem ist $e_n v m_1'' m_j' = e_2'' m_1'' m_j' = o_{A_j, A_n}$. Daher ist $m_j = v m_1'' m_j'$ für $j = 1, \ldots, n-1$; ähnlich zeigt man, daß $m_n = v m_2''$ ist. Nach Satz 3.6 folgt nun aus den obigen Beziehungen, daß $\bigvee_{j=1}^{n} m_j = v\left(\left(\bigvee_{j=1}^{n-1} m_1'' m_j'\right) \vee m_2''\right) = v\left(m_1''\left(\bigvee_{j=1}^{n-1} m_j'\right) \vee m_2''\right) = v(m_1'' \vee m_2'')$ ist, letzteres nach Induktionsannahme. Nach Satz 8.1 sind m_1'' und m_2'' normal, nach Satz 6.2 ist also auch $m_1'' \vee m_2''$ normal. Nach Satz 8.2 ist somit $m_1'' \vee m_2'' =$ Kern Cokern $(m_1'' \vee m_2'') =$ Kern $o_{B'', O} = i_{B''}$, letzteres nach Satz 4.15$_{(\delta)}$. Also ist $\bigvee_{j=1}^{n} m_j = v(i_{B''}) = i_B$, da v ein Epimorphismus ist.

Satz 8.4: *Es sei $(e_j : B \to A_j)_{j \in J}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j \in J}$ weiter sei $(u_j : C \to A_j)_{j \in J}$ eine Familie von Morphismen und $u = \prod_{j \in J} u_j$. Dann ist Kern $u = \bigwedge_{j \in J}$ Kern u_j.*

Beweis: Nach Satz 4.13 und Satz 3.15 ist $u^{-1}(o_{O,B}), = u^{-1}\left(\bigwedge_{j \in J} e_j^{-1}\left(o_{O,A_j}\right)\right) = \bigwedge_{j \in J} \left(e_j\, u\right)^{-1}\left(o_{O,A_j}\right) = \bigwedge_{j \in J} u_j^{-1}\left(o_{O,A_j}\right)$.

Satz 8.5: *Es sei $(e_j :\ A \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$; weiter seien m_j die zugehörigen Monomorphismen und $m : A' \to A$ ein Monomorphismus. Dann ist $m \leq \bigvee_{j \in J}^{n} m_j\, e_j\,(m)$.*

Beweis: Es sei $e_j(m) = m_j'' :\ B_j \to A_j, (e_j' :\ B \to B_j)_{j=1,\ldots,n}$ das direkte Produkt von $(B_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_j', $v = \prod_{j=1}^{n} i_{e_j m}\, \underline{e_j\, m}$ und $m'' = \prod_{j=1}^{n} m_j''\, e_j'$. Dann ist $e_j\, m''\, v = m_j''\, e_j'\, v = m_j''\, i_{e_j m}\, e_j m = e_j m$ für $j = 1, \ldots, n$. Also ist $m''\, v = m$ und nach Satz 2.9 folglich $m \leq \overline{m''}$. Für $k \neq j$ ist weiter $e_k\, m_j\, m_j'' = o_{B_j, A_k} = m_k''\, e_k'\, m_j' = e_k\, m''\, m_j'$ und für $k = j$ ist $e_j\, m_j\, m_j'' = m_j''\, e_j'\, m_j' = e_j\, m_j''\, m_j$, also ist $m_j\, m_j'' = m''\, m_j'$. Nach Satz 8.3 ist nun $\overline{m''} = m''\left(\bigvee_{j=1}^{n} m_j'\right) = \bigvee_{j=1}^{n} m''(m_j') = \bigvee_{j=1}^{n} m_j\,(m_j'') = \bigvee_{j=1}^{n} m_j\, e_j\,(m)$, letzteresnach Satz 2.5; folglich ist $m \leq \overline{m''} = \bigvee_{j=1}^{n} m_j\, e_j\,(m)$.

Satz 8.6: *Es sei $(e_j : A \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_j; $(e_j' : B \to B_j)_{j=1,\ldots,n}$ sei das direkte Produkt der Familie $(B_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_j'; weiter sei $(u_j :\ A_j \to B_j)_{j=1,\ldots,n}$ eine Morphismenfamilie und $u = \prod_{j=1}^{n} u_j\, e_j$. Dann ist Kern $u = \bigvee_{j=1}^{n} m_j$ (Kern u_j).*

Beweis: Man zeigt zunächst unter Ausnutzung der Eigenschaften direkter Produkte, daß $u\, m_j = m'_j\, u_j$ ist ($j = 1, \ldots, n$). Nach Satz 3.6 und Satz 2.5 folgt $u\left(\bigvee_{j=1}^{n} m_j\,(\text{Kern } u_j)\right) = \bigvee_{j=1}^{n} u\, m_j$ $(\text{Kern } u_j) = \bigvee_{j=1}^{n} m'_j\, u_j\,(\text{Kern } u_j) = o_{O,B}$, also ist $\bigvee_{j=1}^{n} m_j\,(\text{Kern } u_j) \leq$ $\leq \text{Kern } u$. Da andererseits $u_j\, e_j\,(\text{Kern } u) = e'_j\, u\,(\text{Kern } u) = o_{O,B_j}$ also $e_j\,(\text{Kern } u) \leq \text{Kern } u_j$ ist, folgt nach Satz 8.5, daß Kern u $\leq \bigvee_{j=1}^{n} m_j\, e_j\,(\text{Kern } u) \leq \bigvee_{j=1}^{n} m_j\,(\text{Kern } u_j)$ ist.

Satz 8.7: *Es sei $(e_j\colon B \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_j; $(m'_j\colon A_j \to B')_{j=1,\ldots,n}$ sei die direkte Summe der Familie $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Epimorphismen e'_j. Dann ist $\prod_{j=1}^{n} e'_j = e\colon B' \to B$ ein Epimorphismus und $e\, m'_j = m_j$ ($j = 1, \ldots, n$).*

Beweis: Für $j, k = 1, \ldots, n$ ist $e_j e\, m'_k = e'_j m'_k = e_j m_k$, also $e\, m'_k = m_k$ und nach Satz 8.3 und Satz 3.6 ist somit $i_B = \bigvee_{j=1}^{n} m_j =$ $= e\left(\bigvee_{j=1}^{n} m'_j\right) = e\,(i_{B'})$, letzteres nach Satz 3.5 und Satz 3.4_8. Folglich ist $\bar{e} = i_B$, also e ein Epimorphismus.

Satz 8.8: *Es sei $(e_j\colon B \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ das direkte Produkt der Familie $(A_j)_{j=1,\ldots,n}$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_j; weiter seien $w, w'\colon B \to C$ zwei Morphismen mit $w\, m_j = w'\, m_j$ für $j = 1, \ldots, n$. Dann ist $w = w'$.*

Beweis: Mit den Bezeichnungen von Satz 8.7 ist $w\, e\, m'_j =$ $= w\, m_j = w' m_j = w'\, e\, m'_j$, also $w\, e = w' e$ und somit $w = w'$, denn nach Satz 8.7 ist e ein Epimorphismus.

§ 9. Abelsche Objekte

Es sei $A_1 = A_2 = A$ und $(e_j\colon B \to A_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von A_1 und A_2 mit den zugehörigen Monomorphismen m_1 und m_2. Falls ein Morphismus $\nabla\colon B \to A$ existiert mit $\nabla\, m_1 =$ $= \nabla\, m_2 = i_A$, so heiße A ein *abelsches Objekt*.

Nach Satz 1.4_δ ist der Morphismus ∇, falls er existiert, ein Epimorphismus, und nach Satz 8.8 gibt es höchstens einen solchen Morphismus.

Satz 9.1: *Ist* $(A_j)_{j\in J}$ *eine Familie abelscher Objekte, so ist* $\prod_{j\in J} A_j$ *abelsch.*

Beweis: Es sei $(e_j : B \to A_j)_{j\in J}$ das direkte Produkt der A_j, und m_j seien die zugehörigen Monomorphismen. Ferner sei $B_1 = B_2 = B$ und $(e'_r: B' \to B)_{r=1,2}$ das direkte Produkt von B_1 und B_2 mit den zugehörigen Monomorphismen m'_1 und m'_2; weiter sei $A_j^1 = A_j^2 = A_j$ und $(e_j^r: A''_j \to A_r^j)_{r=1,2}$ das direkte Produkt von A_j^1 und A_j^2 mit den zugehörigen Monomorphismen m_j^r; $(e''_j : B'' \to A''_j)_{j\in J}$ sei das direkte Produkt der A''_j. Wir setzen $w_j = \prod_{r=1}^{2} e_j\, e'_r$. Dann ist $e_j^r\, w_j\, m'_k = e_j e'_r m'_k = e_j^r\, m_j^k\, e_j$, also ist $w_j m'_k = m_j^k e_j$. Da die A_j abelsch sind, existieren Morphismen $\nabla_j : A''_j \to A_j$ mit $\nabla_j m_j^k = i_{A_j}$. Weiter sei nun $w = \prod_{j\in J} w_j$ und $v = \prod_{j\in J} \nabla_j e''_j$. Dann ist $e_j\, v\, w\, m'_k = \nabla_j e''_j w\, m'_k = \nabla_j w_j m'_k = \nabla_j m_j^k e_j = e_j$ $(j \in J,\ k = 1,2)$; folglich ist $v\, w\, m'_k = i_B$, d.h. wir haben einen Morphismus $\nabla = v\, w$ gefunden mit $\nabla\, m'_k = i_B$, also ist B abelsch.

Satz 9.2: *Es sei* A *abelsch und* $A_1 = \ldots = A_n = A$; $(e_j : B \to A_j)_{j=1,\ldots,n}$ *sei das direkte Produkt der* A_j *mit den zugehörigen Monomorphismen* $m_1, \ldots, m_n$. *Dann existiert genau ein Morphismus* $\nabla : B \to A$ *mit* $\nabla\, m_j = i_A$ *für* $j = 1, \ldots, n$.

Beweis: Für $n = 1,2$ ist die Behauptung nach Voraussetzung richtig. Sie sei für $n \leq r$ $(r \geq 2)$ bereits bewiesen. Es sei nun $r < n \leq 2r$. Weiter sei $(e'_j : B' \to A_j)_{j=1,\ldots,r}$ das direkte Produkt von $A_1, \ldots, A_r$ mit den zugehörigen Monomorphismen $m'_1, \ldots, m'_r$; $(e''_j : B'' \to B_j)_{j=1,2}$ sei das direkte Produkt von $B_1 = B'$ und $B_2 = B'$ mit den zugehörigen Monomorphismen m''_1 und m''_2. Nach Induktionsannahme existiert ein Morphismus $\nabla' : B' \to A$ mit $\nabla' m'_j = i_A$; da B' nach Satz 9.1 abelsch ist, existiert ein Morphismus $\nabla'' : B'' \to B'$ mit $\nabla'' m''_k = i_{B'}$, $(k = 1,2)$. Es sei nun $w_1 = \prod_{j=1}^{r} e_j$ und $w_2 = \prod_{j=1}^{r} w'_j$, wobei $w'_j = e_{r+j}$ für

$1 \leq j \leq n-r$ und $w'_j = o_{B,A}$ für $n-r < j \leq r$ ist. Weiter sei $w = \prod_{j=1}^{2} w_j$. Unter Ausnutzung der Eigenschaften direkter Produkte zeigt man, daß $w\, m_j = m''_1\, m'_j$ ist für $1 \leq j \leq r$ und $w\, m_j = m''_2\, m'_{j-r}$ für $r < j \leq n$. Für $j \leq r$ folgert man nun aus den obigen Beziehungen: $\nabla'\nabla''w\, m_j = \nabla'\nabla''m''_1\, m'_j = \nabla' m'_j = i_A$; für $r < j \leq n$ folgert man: $\nabla'\nabla''w\, m_j = \nabla'\nabla''m''_2\, m'_{j-r} = \nabla' m'_{j-r} = i_A$; mit $\nabla = \nabla'\nabla''w$ erhält man also $\nabla m_j = i_A$ $(j = 1, \ldots, n)$. Die Eindeutigkeit von ∇ folgt aus Satz 8.8.

Satz 9.3: *Ist $m : A \to B$ ein Monomorphismus und B abelsch, so ist auch A abelsch.*

Beweis: Es sei $(e'_j : B' \to B_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von $B_1 = B$ und $B_2 = B$ mit den zugehörigen Monomorphismen m'_1 und m'_2; $(e''_j : A'' \to A_j)_{j=1,2}$ sei das direkte Produkt von $A_1 = A$ und $A_2 = A$ mit den zugehörigen Monomorphismen m''_1 und m''_2. Da B abelsch ist, existiert ein Morphismus $\nabla : B' \to B$ mit $\nabla\, m'_j = i_B (j = 1, 2)$. Wir setzen nun $w = \prod_{j=1}^{2} m e''_j$. Dann ist $w m''_j = m'_j m$ und nach Satz 8.3 und Satz 3.6 folgt daraus $\overline{\nabla w} = \nabla w(i_{A''}) = \nabla w(m''_1 \vee m''_2) = \nabla m'_1(m) \vee \nabla m'_2(m) = \overline{m}$. Es sei nun i^* das Inverse von i_m. Mit $\nabla' = i^* i_{\nabla w}\, \underline{\nabla w} : A'' \to A$ ist dann $m\, \nabla'\, m''_j = m\, i^* i_{\nabla w}\, \underline{\nabla w}\, m''_j = \overline{\nabla w} i_{\nabla w}\, \underline{\nabla w}\, m''_j = \nabla w\, m''_j = \nabla m'_j m = m$ für $j = 1, 2$; also ist $\nabla' m''_j = i_A$ für $j = 1, 2$.

Satz 9.4: *Ist $e : A \to B$ ein Epimorphismus und A abelsch, so ist auch B abelsch.*

Beweis: Es sei $(e'_j : B' \to B'_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von $B_1 = B$ und $B_2 = B$ mit den zugehörigen Monomorphismen m'_1 und m'_2; $(e''_j : A'' \to A_j)_{j=1,2}$ sei das direkte Produkt von $A_1 = A$ und $A_2 = A$ mit den zugehörigen Monomorphismen m''_1 und m''_2. Dann existiert nach Voraussetzung ein Morphismus $\nabla : A'' \to A$ mit $\nabla m''_j = i_A$ $(j = 1,2)$. Wir setzen $e' = \prod_{j=1}^{2} e\, e''_j$ und man zeigt, daß $e' m''_j = m'_j e$ ist. Nach Satz 8.6 und Satz 3.12 ist weiter Kern $e' = m''_1$ (Kern e) $\vee\, m''_2$ (Kern e) $= m''_1$ (Kern $e \nabla m''_1$) $\vee$ m''_2(Kern $e \nabla m''_2$) $= m''_1\, (m''^{-1}_1$(Kern $e\nabla$)) $\vee\, m''_2 (m''^{-1}_2$(Kern $e \nabla$))

$\leq$ Kern $e\nabla$, letzteres nach Satz 3.10. Außerdem ist e' ein Epimorphismus, denn nach den Sätzen 8.3, 3.6 und 2.4 ist $\overline{e'} = e'(m_1'' \vee m_2'') = e'(m_1'') \vee e'(m_2'') = \overline{m_1'e} \vee \overline{m_2'e} = \overline{m_1'} \vee \overline{m_2'} = i_B$. Nach Satz 5.9 existiert daher ein Morphismus ∇' mit $e\nabla = \nabla'e'$ und es ist $\nabla' m_j' e = \nabla' e' m_j'' = e\nabla m_j'' = e$, also $\nabla' m_j' = i_B$ $(j = 1,2)$.

Satz 9.5: *Ist $m : X \to A$ ein Monomorphismus und A abelsch, so ist m normal.*

Beweis: Es sei $(e_j' : A' \to A_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von $A_1 = A$ und $A_2 = A$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_1' und m_2'; $(e_j'' : A'' \to A_j'')_{j=1,2}$ sei das direkte Produkt von $A_1'' = X$ und $A_2'' = A$ mit den zugehörigen Monomorphismen m_1'' und m_2''. Weiter sei $w_1 = m\, e_1''$, $w_2 = e_2''$ und $\prod_{j=1}^{n} w_j = w : A'' \to A'$. Dann ist $w\, m_1'' = m_1' m$ und $w\, m_2'' = m_2'$. Nach Voraussetzung existiert ein Morphismus $\nabla : A' \to A$ mit $\nabla m_j' = i_A$; infolgedessen ist $\nabla w\, m_2'' = \nabla m_2' = i_A$, also ∇w ein Epimorphismus. Nun ist $\nabla w\, m_1''(i_A) = \nabla m_1' m(i_X) = \overline{m}$. Nach Satz 8.1 ist m_1'' normal und nach (XII), 2. ist somit $\nabla w(m_1''(i_X)) = \overline{m} \cong m$ normal.

Es bezeichne $\mathfrak{A}$ die Unterkategorie aller abelschen Objekte der vorliegenden Kategorie $\mathfrak{C}$. Wir wollen in den folgenden Sätzen zeigen, daß wir so eine abelsche Kategorie $\mathfrak{A}$ erhalten, d. h. eine Kategorie, in der (I)–(XI) erfüllt sind, außerdem das zu (XI) duale Axiom gilt und den Hom (A, B) sich eine (kommutative) Gruppenstruktur aufprägen läßt, deren neutrales Element der Morphismus $o_{A,B}$ ist und die mit der Komposition distributiv verknüpft ist.

$\mathfrak{A}$ erfüllt nach Definition die Axiome (I)–(III).

Satz 9.6: *Das Nullobjekt O von $\mathfrak{C}$ ist abelsch.*

Beweis: Wegen (VII) ist $(o_{O,O_j} : O \to O_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von $O_1 = O$ und $O_2 = O$ mit den zugehörigen Monomorphismen $o_{O_1,O}$ und $o_{O_2,O}$. Setzt man $\nabla = o_{O,O}$, so ist $\nabla o_{O_j,O} = o_{O,O}\, o_{O_j,O} = o_{O,O} = i_O$.

Satz 9.7: *Es seien A und B abelsche Objekte. Ein Morphismus $u: A \to B$ ist dann und nur dann ein Monomorphismus in $\mathfrak{A}$, wenn er in $\mathfrak{C}$ ein Monomorphismus ist.*

Beweis: Falls u in $\mathfrak{C}$ ein Monomorphismus ist, so auch in $\mathfrak{A}$. Es sei nun u in $\mathfrak{A}$ ein Monomorphismus und $w: X \to A$ ein Morphismus mit $u\,w = o_{X,B}$, wobei X ein beliebiges Objekt von $\mathfrak{C}$ ist, und es sei $\overline{w}: X' \to A$. Wir führen die folgenden Überlegungen in der Kategorie $\mathfrak{C}$ durch. Aus $u\,w = o_{X,B}$ folgt $u\,\overline{w} = o_{X',B}$. Nach Satz 9.3 ist X' abelsch, also ist nach Voraussetzung $\overline{w} = o_{X',A}$, folglich $w = o_{X,A}$. Dies besagt aber nach Satz 4.10, daß Kern $u = o_{O,A}$ ist. Nach Satz 7.2 ist daher u in $\mathfrak{C}$ ein Monomorphismus.

Satz 9.8: *Es seien A und B abelsche Objekte. Ein Morphismus $u: A \to B$ ist dann und nur dann in $\mathfrak{A}$ ein Epimorphismus, wenn er in $\mathfrak{C}$ ein Epimorphismus ist.*

Beweis: Falls u in $\mathfrak{C}$ ein Epimorphismus ist, so auch in $\mathfrak{A}$. Es sei nun u ein Epimorphismus in $\mathfrak{A}$ und $w: B \to X$ ein Morphismus mit $w\,u = o_{A,X}$, wobei X ein beliebiges Objekt von $\mathfrak{C}$ ist. Es sei $\underline{w}: B \to X'$. Aus $w\,u = o_{A,X}$ folgt dann $\underline{w}\,u = o_{A,X'}$; nach Satz 9.4 ist X' abelsch, also ist nach Voraussetzung $\underline{w} = o_{B,X'}$, und nach Satz 4.10_δ ist daher Cokern $u = o_{B,O}$. Nach Satz 9.5 ist weiter $\bar{u}$ normal, nach Satz 7.1 und Satz 7.2 ist also u in $\mathfrak{C}$ ein Epimorphismus.

Auf Grund der letzten drei Sätze ergibt sich, daß in $\mathfrak{A}$ auch die Axiome (IV)–(VII) erfüllt sind.

Satz 9.9: *Es sei $(A_j)_{j\in J}$ eine Familie abelscher Objekte und $(m_j: A_j \to A)_{j\in J}$ die direkte Summe dieser Familie. Weiter sei $e: A \to \underline{A}$ die Vereinigung aller kanonischen Epimorphismen $e: A \to X$, für die X abelsch ist. Dann ist $\underline{A}$ abelsch und die Morphismenfamilie $(e\,m_j: A_j \to \underline{A})_{j\in J}$ ist in $\mathfrak{A}$ eine allgemeine direkte Summe der A_j.*

Beweis: Es sei $(e'_k: A \to A'_k)_{k\in K}$ die Familie aller kanonischen Epimorphismen $e: A \to X$, für die X abelsch ist; $(e''_k: B \to A'_k)_{k\in K}$ sei das direkte Produkt der A'_k und es sei $u = \prod_{k\in K} e'_k$. Nach Satz 3.5_δ ist dann $e = \underline{u}: A \to \underline{A}$. Nach Satz 9.1 ist B abelsch. Es ist $\bar{u}\, i_u : \underline{A} \to B$ ein Monomorphismus, also ist nach Satz 9.3 auch $\underline{A}$ abelsch. Es sei weiter Y abelsch, $(v_j : A_j \to Y)_{j\in J}$ eine Morphismenfamilie und $v = \sum_{j\in J} v_j$. Da Y abelsch ist und $\bar{v}\, i_v : A' \to Y$ ein Monomorphismus ist, folgt nach Satz 9.3, daß A' abelsch ist; folglich ist $\underline{v} \leq \underline{u}$ und es existiert ein Epimorphismus e' mit $\underline{v} = e'\underline{u}$. Wir setzen $\bar{u}\, m_j = e\, m_j = u_j$ und $\bar{v}\, i_v e' = v'$. Dann ist $v' u_j = \bar{v}\, i_v e'\, \underline{u}\, m_j = \bar{v}\, i_v \underline{v}\, m_j = v\, m_j = v_j$. Es sei weiter $v'' : \underline{A} \to Y$ ein Morphismus mit $v'' u_j = v_j$ für alle $j \in J$. Dann ist $v''\underline{u}\, m_j = v\, m_j$, also $v''\underline{u} = v = \bar{v}\, i_v \underline{v} = \bar{v}\, i_v e' \underline{u} = v'\underline{u}$; folglich ist $v' = v''$. Damit ist gezeigt, daß $(e\, m_j = u_j : A_j \to A)_{j\in J}$ in $\mathfrak{A}$ eine allgemeine direkte Summe der A_j ist.

Auf Grund des Satzes 9.1 und des Satzes 9.9 sind in $\mathfrak{A}$ auch die Axiome (VIII)–(XI) erfüllt und wegen Satz 9.5 gilt in $\mathfrak{A}$ auch die zu (XI) duale Aussage.

Ist in $\mathfrak{A}$ eine Morphismenfamilie $(u_j : A' \to A)_{j=1,\ldots,n}$ gegeben und ∇ der in Satz 9.2 gewonnene Morphismus, so definieren wir

$$u_1 + \ldots + u_n = \nabla \prod_{j=1}^{n} u_j.$$

Wie bei S. MacLane, Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 485 bis 516, zeigt man auch hier, daß diese Definition den Hom (A,B) aus $\mathfrak{A}$ eine kommutative Halbgruppenstruktur aufprägt, die mit der Komposition distributiv verknüpft ist und das neutrale Element $o_{A,B}$ besitzt.

Satz 9.10: *Es sei $A_1 = A_2 = A$ abelsch und $(e_j : B \to A_j)_{j=1,2}$ das direkte Produkt von A_1 und A_2 mit den zugehörigen Monomorphismen m_j; weiter sei $\nabla : B \to A$ der eindeutig bestimmte Morphismus mit $\nabla m_1 = \nabla m_2 = i_A$. Dann ist $m_1 \wedge \mathrm{Kern}\, \nabla = m_2 \wedge \mathrm{Kern}\, \nabla = o_{O,B}$.*

Beweis: Wir setzen $m_1 \wedge \mathrm{Kern}\ \nabla = m : B' \to B$. Dann existieren Monomorphismen $m_1' : B' \to A$ und $m' : B' \to \underline{B}$ mit $m_1 m_1' = (\mathrm{Kern}\ \nabla)\, m' = m$. Nach Satz 4.10 folgt daraus $m_1' = \nabla m_1 m_1' = \nabla\ (\mathrm{Kern}\ \nabla)\, m' = o_{B',A}$; also ist $m = m_1 m_1' = o_{B',B} = o_{O,B}\, o_{B',O}$, nach Satz 1.4 und Satz 4.4$_{(\delta)}$ ist also $B' = O$ und somit $m = o_{O,B}$. Analog zeigt man, daß $m_2 \wedge \mathrm{Kern}\ \nabla = o_{O,B}$ ist.

Satz 9.11: *Mit den Bezeichnungen von Satz 9.10 sei weiter* $w_1 = \nabla$, $w_2 = e_2$ *und* $i = \prod_{j=1}^{2} w_j$. *Dann ist* i *ein Isomorphismus.*

Beweis: 1. Es ist i ein Monomorphismus. Nach Satz 8.4 ist nämlich Kern i = Kern $\nabla \wedge$ Kern e_2 = Kern $\nabla \wedge m_1$, letzteres ist im Anfang des Beweises von Satz 8.2 enthalten. Nach Satz 9.10 ist daher Kern $i = o_{O,B}$, nach Satz 7.2 ist also i ein Monomorphismus. 2. Es ist i ein Epimorphismus. Es ist nämlich $e_1 m_1 = i_A = \nabla m_1 = e_1 i\, m_1$ und $e_2 m_1 = e_2 i\, m_1$, also ist $i\, m_1 = m_1$; weiter ist $e_2 i\, m_2 = e_2 m_2 = i_A$, nach Satz 1.4 ist also $e_2 i$ ein Epimorphismus. Aus $e_2(m_2(e_2 i)) = e_2 m_2(e_2 i) = \overline{e_2 i} = i_A$, letzteres da $e_2 i$ ein Epimorphismus ist, folgt $m_2(e_2 i) \leq e_2^{-1}(e_2(i))$. Es sei nun $u: B \to C$ ein Morphismus mit $u\, i = o_{B,C}$. Nach Satz 2.4 und Satz 2.8 ist wegen der obigen Beziehungen $u(m_2) = u(m_2(e_2 i)) \leq u(e_2^{-1}(e_2(i)))$. Nach Satz 5.12 folgt hieraus $u(m_2) \leq u(i \vee \text{Kern } e_2) = u(i \vee m_1) = u(i \vee i\, m_1) = u(i) = o_{O,C}$. Nach Satz $4.7_{(\delta)}$ ist also $u\, m_2 = o_{A,C}$; da außerdem $u\, m_1 = u\, i\, m_1 = o_{A,C}$ ist, folgt nach Satz 8.8, daß $u = o_{B,C}$ ist. Nach Satz 4.10_δ ist somit Cokern $i = o_{B,O}$. Nach Satz 9.5 ist weiter i normal, nach Satz 7.1 und Satz 7.2 also i ein Epimorphismus. 3. Nach Satz 2.3 ist also i ein Isomorphismus.

Ist nun i^* das Inverse des in Satz 9.11 gewonnenen Isomorphismus i, so zeigt man für jeden Morphismus $u: A' \to A$ aus $\mathfrak{A}$, daß $u + (e_1 i^* m_2) u = o_{A',A}$ ist, d. h. die oben definierte Halbgruppenstruktur ist sogar eine Gruppenstruktur.

Damit ist gezeigt, daß $\mathfrak{A}$ eine abelsche Unterkategorie der vorliegenden Kategorie $\mathfrak{C}$ ist.

Wählen wir speziell als Kategorie $\mathfrak{C}$ die Kategorie $\mathfrak{G}$ der Gruppen, so ist $\mathfrak{A}$ die abelsche Kategorie der kommutativen Gruppen.

Literaturverzeichnis

1. D. Arlt: Homologische Algebra und Cohomologietheorie mit Garben. Diplomarbeit (vervielfältigt).

2. D. A. Buchsbaum: Exact categories and duality. Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), 1–34.

3. H. Cartan–S. Eilenberg: Homological Algebra. Princeton Mathematical Series 19, Princeton University Press 1956.

4. C. E. Didize: Nichtassoziative freie Summen von Algebren mit vereinigter Unteralgebra. Mat. Sbornik, n. Ser. 43 (85) (1958), 379–396.

5. S. Eilenberg–S. MacLane, General theory of natural equivalences. Trans. Amer. Math. Soc. 58 (1950), 485–516.

6. S. Eilenberg–N. Steenrod: Foundations of algebraic topology. Princeton Mathematical Series 15, Princeton University Press 1952.

7. A. Grothendieck: Sur quelques points d'algèbre homologique. Tohoku Math. Journal 9 (1957), 119–183.

8. S. MacLane: Groups, categories, and duality. Proc. Nat. Acad. Sci. USA 34 (1948), 263–267.

9. S. MacLane: Duality for groups. Bull. Amer. Math. Soc. 56 (1950), 485–516.