BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1962

MÜNCHEN 1963

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie der Kurven insbesondere von 2. und 3. Ordnung in topologisch ebenen projektiven Ebenen

Von Otto Haupt in Erlangen

Vorgelegt am 5. Oktober 1962

1. Einleitung

1.1. Seit C. Juel [1]* weiß man: Die Newtonsche Klassifikation der „Gestalten" der reellen algebraischen Kurven 3. Grades in der (reellen) projektiven Ebene erschöpft schon im wesentlichen alle „Gestalten", welche bei reellen (nicht-algebraischen) Kurven (mit stetiger Tangente) von 3. Ordnung bezüglich des Systems $\mathfrak{k}^*$ der Geraden auftreten. Dabei werden zwei Kurven als von „gleicher Gestalt" bezeichnet, wenn sie – kurz gesagt – die gleiche Anzahl je gleichartiger singulärer Punkte besitzen und sich „in gleicher Weise" aus lokal konvexen Bogen zusammensetzen, die in den singulären Punkten zusammenstoßen; singulär heißt ein Punkt, wenn er keine konvexe Umgebung besitzt, also Wendepunkt oder Dorn oder Schnabel oder Doppelpunkt ist.

Im Anschluß daran sind von Juel selbst und anderen Autoren Untersuchungen über Kurven und Bogen in der projektiven Ebene als „Grundbereich" ausgeführt worden, bei denen ebenfalls $\mathfrak{k}^*$, d. h. das System der Geraden, als System der „Ordnungscharakteristiken" zugrunde gelegt. wird.

1.2. Es scheint bisher nicht bemerkt zu sein, daß die meisten (wenn nicht alle) dieser Untersuchungen, auf welche in Nr. 1.1 verwiesen wurde, auch für sogenannte (vgl. Salzmann [1], § 1, S. 403) *topologisch ebene projektive Ebenen* gelten dürften; dies sind gewöhnliche projektive Ebenen E (oder topologische

* Ziffern in eckiger Klammer im Text verweisen auf das Literaturverzeichnis, ohne Angabe eines Namens auf Arbeiten des Verf.

Bilder von solchen), in denen statt der Geraden ein System $\mathfrak{k}$ von zur reellen Kreislinie homöomorphen Kurven K gegeben ist mit folgenden Eigenschaften:

(I) Zu beliebigen zwei verschiedenen Punkten $p', p'' \in E$ existiert genau eine, p' und p'' enthaltende Ordnungscharakteristik $K \in \mathfrak{k}$, also $p', p'' \in K$.

(II) Zu beliebigen zwei verschiedenen Ordnungscharakteristiken $K', K'' \in \mathfrak{k}$ existiert genau ein in beiden enthaltener Punkt p, also $\{p\} = K' \frown K''$.

(III) Mit p', p'' in (I) ändert sich K stetig und mit K', K'' in (II) ändert sich p stetig. Dabei bezieht sich die Stetigkeitsdefinition für die $K \in \mathfrak{k}$ auf die Topologie im (metrisierbaren) Raum $\mathfrak{a}$ der Kompakta des (metrisierbaren) Raumes E.

1. Anmerkung. Beispiele solcher topologisch ebener projektiver Ebenen liefern die vielfach konstruierten Nicht-Desarguesschen projektiven Ebenen (Literaturzusammenstellung darüber bei Salzmann [1], 404); die Ordnungscharakteristiken („Geraden") in solchen Ebenen können sogar sämtlich algebraisch sein. Eine Konstruktion aller topologisch ebenen projektiven Ebenen findet sich bei Salzmann, a. a. O. S. 403–404).

2. Anmerkung. In diesem Zusammenhang kann an die Kennzeichnung der topologischen Bilder der affinen Ebene mit Hilfe des Jordanschen Kurvensatzes erinnert werden (vgl. van Kampen [1]).

1.3. Untersuchungen der in Nr. 1.1 erwähnten Art in topologisch ebenen projektiven Ebenen sind gemäß der in Nr. 1.2 gegebenen Definition von topologischem Charakter, d. h. invariant gegenüber Homöomorphismen.

In den folgenden Teilen soll skizziert werden, daß die Juelsche Theorie der *Kurven* 3. Ordnung in diesem Sinne topologisch ist und daß gleiches hinsichtlich der *Bogen* 3. Ordnung sowie der Bogen und Kurven 2. Ordnung gilt. Entsprechendes wurde [4] für eine Verallgemeinerung des Satzes von Möbius gezeigt, demzufolge jede einfache Kurve in der projektiven Ebene, welche von ungerader Ordnung bezüglich der Geraden ist und stetige Tangente besitzt, mindestens drei Wendepunkte oder mindestens eine Dornspitze und einen Wendepunkt (ev. eine Schnabelspitze) besitzt.

Beweise sind im Folgenden nur an wenigen Stellen gegeben; im übrigen wird auf eine später erscheinende Darstellung verwiesen.

2. Bogen und Kurven vom schwachen Punktordnungswert Zwei

O. B. d. A. sei also E die (gewöhnliche) projektive Ebene und $\mathfrak{k}$ ein System von Ordnungscharakteristiken, abgekürzt: OCh, in E, welches die in Nr. 1.2 geforderten Eigenschaften (I)–(III) besitzt.

2.1. Vorbemerkungen.

2.1.1. Es sei $K_0 \in \mathfrak{k}$ beliebig und $E_0 = CK_0 = E - K_0$ gesetzt. Für jedes $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ ist $E_0 - K = E_0(K; +) \cup E_0(K; -)$, wobei $E_0(K; \pm)$ offen und einfach zusammenhängend und wobei $E_0(K; +) \cap E_0(K; -) = \theta$ ist. Wir bezeichnen die $E_0(K; \pm)$ als die beiden *Seiten von K in E_0* (positive und negative Seite) oder als die (von K begrenzten) $\mathfrak{k}$-*Halbebenen* in E_0. Diese beiden Seiten ändern sich „stetig“ mit K, d. h. zu beliebig kleiner Umgebung $\mathfrak{n}$ von K in $\mathfrak{k}$ existiert eine Umgebung U von K in E derart, daß $(E_0 - U) \cap E_0(K'; \alpha) = (E_0 - U) \cap E_0(K; \alpha)$ für jedes $K' \in \mathfrak{n}$ und jedes $\alpha = \pm$.

Eine Menge $M \subset E$ heiße $\mathfrak{k}$-*beschränkt*, wenn es ein zur abgeschlossenen Hülle $\bar{M}$ von M fremdes $K_0 \in \mathfrak{k}$ gibt oder also ein E_0 mit $\bar{M} \subset E_0$.

Jeder einfache Bogen, welcher mit der, seine Endpunkte enthaltenden OCh nur diese beiden Endpunkte gemeinsam hat, ist $\mathfrak{k}$-beschränkt (vgl. [4], Nr. 1.2). Ebenso ist jeder echte, abgeschlossene Teilbogen einer OCh $\mathfrak{k}$-beschränkt.

Ist $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ und $a, b \in K \cap E_0$, $a \neq b$, so liegt genau einer der beiden, von a und b begrenzten abgeschlossenen Teilbogen von K in E_0.

2.1.2. *Es ist $\mathfrak{k}$ kompakt* (im Raum $\mathfrak{a}$ der Kompakta von E).

Dies ergibt sich vermöge Dualität (vgl. z. B. Salzmann [1], Bemerkung 1.3) oder als Spezialfall eines Satzes über allgemeinere Systeme $\mathfrak{k}$ (vgl. [5]).

2.1.3. Es besitzt $\mathfrak{k}$ weiter die nachstehende verschärfte Limeseigenschaft:

Es sei $K(a, b)$ ein abgeschlossener Teilbogen von $K \in \mathfrak{k}$ mit den Endpunkten a, b. Zu hinreichend kleinem η $(0 < \eta < \eta^*(K; a, b))$ gibt es immer $\varepsilon > 0$ und (ε-)Umgebungen $\mathfrak{A}$ von a (in E) sowie $\mathfrak{B}$ von b (mit $\bar{\mathfrak{A}} \frown \bar{\mathfrak{B}} = 0$) von folgender Art: Gehört K' zur η-Nachbarschaft $\mathfrak{n}(\eta; K) \subset \mathfrak{a}$ von K und ist $K' \frown \mathfrak{A} \neq 0$, $K' \frown \mathfrak{B} \neq 0$, so gibt es $a' \in K' \frown \mathfrak{A}$ und $b' \in K' \frown \mathfrak{B}$, so daß einer der (beiden) von a' und b' begrenzten Teilbogen $K'(a', b')$ von K' in der η-Umgebung $U(\eta; K(a, b)) \subset E$ von $K(a, b)$ liegt.

Zusatz. Es kann $\varepsilon > 0$ so gewählt werden, daß $\mathfrak{A} \smile \mathfrak{B} \subset U(\eta; K(a, b))$ und dann für *jedes* $a' \in K' \frown \mathfrak{A}$ und jedes $b' \in K' \frown \mathfrak{B}$ auch $K'(a', b') \subset U(\eta; K(a, b))$ ist, ferner daß jedes $K' \in \mathfrak{k}$ mit $K' \frown \mathfrak{A} \neq 0$ und $K' \frown \mathfrak{B} \neq 0$ η-benachbart ist zu K (in $\mathfrak{a}$).

Bew. (α) Folgendes sei vorausgeschickt. Gemäß Nr. 2.1.1 ist $B = \bar{B} = K(a, b)$ $\mathfrak{k}$-beschränkt, etwa $B \subset E_0 = \mathbf{C} K_0$. Es gibt $a_0, b_0 \in E_0 \frown K$ derart, daß $B \subset \underset{\sim}{K}(a_0, b_0)$ und $\bar{K}(a_0, b_0) \subset E_0$.[1] Weiter gibt es $K_1 \in \mathfrak{k} - \{K_0\} - \{K\}$ mit $a_0 \in K_1$. Es existieren $c' \in E_0(K; +) \frown K_1$ und $d' \in E_0(K; -) \frown K_1$ sowie $K_2, K_3 \in \mathfrak{k}$ mit $b_0, c' \in K_2$; $b_0, d' \in K_3$. Unter den von b_0 und c' begrenzten offenen Teilbogen von K_2 gibt es einen, der in $E_0(K; +)$ liegt; er sei mit $\underset{\sim}{K}_2(b_0, c')$ bezeichnet. Entsprechend existiert $\underset{\sim}{K}_3(b_0, d') \subset E_0(K; -)$ sowie $\underset{\sim}{K}_1(c', d') \subset E_0$.

Nun ist $C = K_1(c', d') \smile K_3(d', b_0) \smile K_2(b_0, c')$ eine einfache geschlossene, $\mathfrak{k}$-beschränkte Kurve ($C \subset E_0$). Es sei $D = \underset{\sim}{D}^1$ das von C begrenzte, $\mathfrak{k}$-beschränkte Gebiet, für welches also $\bar{D} \subset E_0$ sowie $B \subset \underset{\sim}{D}$ gilt. Dieses D werde für das Folgende festgehalten.

(β) Indirekter Beweis. **(I)** Ist die Beh. (vgl. oben Nr. 2.1.3) nicht richtig, so gibt es beliebig kleine $\eta > 0$, zu welchen keine $\varepsilon > 0$ bzw. $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ von der in der Behauptung gekennzeichneten Art exi-

---

[1] Ist $M \subset E$, so bezeichnet $\bar{M}$ die abgeschlossene Hülle und $\underset{\sim}{M}$ den offenen Kern von M. Ist $B = \bar{B}$ ein abgeschlossener Bogen mit den Endpunkten a, b, so schreiben wir auch $B = B\ (a. b)$ und $\underset{\sim}{B} = B - \{a\} - \{b\}$; es wird $\underset{\sim}{B}$ auch als der größte in B enthaltene offene Bogen bezeichnet. Ist H eine abgeschlossene HalbOCh mit dem Anfangspunkt a, so setzen wir $\underset{\sim}{H} = H - \{a\}$.

stieren. Es gibt daher beliebig kleine $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und dazu mindestens ein $K' \in \mathfrak{n}(\eta)$ (bei irgendwie vorgegebenem η) mit $\mathfrak{A} \cap K' \neq \theta$, $\mathfrak{B} \cap K' \neq \theta$, bei welchem für jedes $a'' \in \mathfrak{A} \cap K'$ und für jedes $b'' \in \mathfrak{B} \cap K'$ keiner der beiden, von a'', b'' begrenzten Teilbogen von K' in $U(\eta; K(a, b))$ liegt. – Demgemäß existieren $a_n \in \mathfrak{A}$, $b_n \in \mathfrak{B}$ mit $a = \lim a_n$, $b = \lim b_n$ und dazu $K_n \in \mathfrak{k}$ mit $a_n, b_n \in K_n$ derart, daß für jeden der beiden von a_n, b_n begrenzten Teilbogen T_n von K_n gilt $T_n \cap \mathbf{C}\, U(\eta; K(a, b)) \neq \theta$.

(II) Da $\eta > 0$ beliebig klein sein darf (vgl. Ziff. (I)), kann η von vorneherein so gewählt werden, daß $U = U(\eta; K(a, b)) \subset \underline{D}$ (vgl. (α)). Und da auch ε, unabhängig von der Wahl von η, beliebig klein sein darf, kann und soll überdies $\bar{\mathfrak{A}} \cup \bar{\mathfrak{B}} \subset U(\eta; K(a, b))$ angenommen werden. Weil aber K_n nicht $\mathfrak{k}$-beschränkt ist, also $K_n \cap \mathbf{C}\, \bar{D} \neq \theta$, ist von vornherein eines der beiden T_n nicht in U enthalten, nämlich das T_n mit $T_n \cap K_0 \neq \theta$. Das andere T_n sei mit $T'_n = K_n\ (a_n, b_n)$ bezeichnet. Es ist $T'_n \subset D$; denn andernfalls enthält $\underset{\sim}{T}'_n \cap C$, wegen $a_n \in \mathfrak{A} \subset \underline{D}$, $b_n \in \mathfrak{B} \subset \underline{D}$ mindestens 2 Punkte; da auch $T_n \cap C$ 2-punktig ist (für das erste T_n), ist somit $K_n \cap C$ mindestens 4-punktig und mithin (mindestens) eines der $K_n \cap K_i$, $i = 1, 2, 3$, mindestens 2-punktig im Widerspruch zu $K_n \neq K_i$ und Nr. 1.2 (II). Zufolge der Definition von K_n ist aber $\underset{\sim}{T}_n \cap (\underline{D} - U) \neq \theta$, so daß ein $x_n \in \underset{\sim}{T}'_n \cap (\underline{D} - U)$ existiert. Durch Auswahl (soweit nötig) aus der Folge der x_n erreicht man (wegen der Kompaktheit von E), daß $x = \lim x_n \in \bar{D} - U \subset E$ existiert.

(III) *Ist* $x \in E_0 - K$, so gibt es ein $K'' \in \mathfrak{k} - \{K\}$ mit $a_0 \in K''$ derart, daß $x_n \in E_0(K''; +)$ und $a_n, b_n \in E_0(K''; -)$ für schließlich alle n; man braucht nur auf dem $\mathfrak{k}$-beschränkten, offenen von x und b_0 begrenzten Teilbogen Q_0 der, x und b_0 enthaltenden OCh ein y zu wählen und $a_0, y \in K''$ zu nehmen. – *Ist hingegen* $x \in K$, also $x \in K - K(a, b)$, so gibt es $a'' \in K(a_0, b_0) - K(a, b)$ derart, daß für jedes $K'' \in \mathfrak{k} - \{K\}$ mit $a'' \in K''$ gilt: $x_n \in E_0(K''; +)$ und $a_n, b_n \in E_0(K''; -)$ für schließlich alle n.

(IV) Wegen x_n, $a_n b_n \in T'_n = \bar{T}'_n$ und gemäß der Definition von K'' haben die in $\underline{D}$ enthaltenen Teilbogen $\underset{\sim}{B}'_n = \underset{\sim}{K}_n\ (a_n, x_n)$

und $\underset{\sim}{B}''_n = \underset{\sim}{K}_n(x_n, b_n)$ von T'_n (wobei $\underset{\sim}{B}'_n \frown \underset{\sim}{B}''_n = \theta$) je mindestens einen Punkt mit K'' gemeinsam. Daher ist $K \frown K''$ mindestens 2-punktig im Widerspruch damit, daß $K \neq K''$, also $K \frown K''$ einpunktig ist. – Damit ist die Behauptung in Nr. 2.1.3. bewiesen. – Der Beweis des Zusatzes ergibt sich (indirekt) mit Hilfe der Behauptung.

2.2. Man erklärt den beschränkten ($\mathfrak{k}$-) Punktordnungswert POW$(M; \mathfrak{k})$ einer Menge M als die obere Grenze der Mächtigkeiten POW$(M \frown K)$ der $M \frown K$ für alle $K \in \mathfrak{k}$. Als *schwacher* Punktordnungswert schwPOW$(M; \mathfrak{k})$ wird dann die kleinste der Zahlen t bezeichnet, für welche die Menge der $K \in \mathfrak{k}$ mit POW$(M \frown K) > t$ nirgends dicht ist in $\mathfrak{k}$.

Ferner erklärt man eine Menge M als $\mathfrak{k}$-*konvex*, wenn M $\mathfrak{k}$-beschränkt ist und mit $a, b \in M$ auch der $\mathfrak{k}$-beschränkte abgeschlossene, von a und b begrenzte Bogen $K(a, b)$ zu M gehört (wobei $K \in \mathfrak{k}$ mit $a, b \in K$).

2.2.1. Jedes $\mathfrak{k}$-konvexe, abgeschlossene $\bar{M} \subset E_0$ ist der Durchschnitt aller M enthaltenden $\mathfrak{k}$-Halbebenen (bezüglich E_0). Es existiert zu jedem $\mathfrak{k}$-beschränkten N eindeutig die abgeschlossene $\mathfrak{k}$-*konvexe Hülle* als kleinste abgeschlossene $\mathfrak{k}$-konvexe Obermenge von N.

Es gilt der Satz von Blaschke [1]: Der $\mathfrak{k}$-beschränkte Limes einer konvergenten Folge $\mathfrak{k}$-konvexer Mengen ist (falls nicht leer) selbst $\mathfrak{k}$-konvex.

Anmerkung. Es gilt auch der Satz von E. Helly [1] für $\mathfrak{k}$-konvexe Mengen.

Die (einfachen) Kurven C bzw. Bogen B mit schwPOW$(C; \mathfrak{k}) = 2$ bzw. mit schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = 2$ sind identisch mit den $\mathfrak{k}$-*konvexen Kurven* bzw. *Bogen*, d. h. mit den Begrenzungen der $\mathfrak{k}$-konvexen Mengen bzw. mit Teilbogen solcher Begrenzungen (wobei sich ein solcher Bogen auch auf einen Teilbogen einer OCh reduzieren kann).

2.2.2. Ist $K \in \mathfrak{k} - \{K_0\}$ und $a \in K \frown E_0$, so ist $K \frown E_0$ Vereinigung zweier, bis auf a fremder, von a begrenzter abgeschlossener Teilbogen, der sogenannten $\mathfrak{k}$-*HalbOCh* Kh$(a; K; \pm)$.

Ist schwPOW$(B; \mathfrak{k}) = 2$ und $a \in \underset{\sim}{B}$,[1] so existieren in a an B eindeutig die vorderen und hinteren $\mathfrak{k}$-*Paratingenten*, d. h. die Limiten der OCh K, welche zwei gegen a konvergierende, nicht hinter a bzw. nicht vor a gelegene Punkte von B enthalten. Ebenso existieren eindeutig die vordere und hintere $\mathfrak{k}$-*Halbtangente* an B in a. Wegen der Kompaktheit von $\mathfrak{k}$ sind die $\mathfrak{k}$-Paratingenten und $\mathfrak{k}$-Halbtangenten ebenfalls OCh (aus $\mathfrak{k}$). Die Träger der $\mathfrak{k}$-Halbtangenten sind die zugehörigen $\mathfrak{k}$-Paratingenten. (In den Endpunkten von B existieren nur die vorderen bzw. hinteren $\mathfrak{k}$-Paratingenten und $\mathfrak{k}$-Halbtangenten).

Die Menge der Punkte, in denen ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen B nicht $\mathfrak{k}$-*differenzierbar* ist, d. h. in welchem vordere und hintere $\mathfrak{k}$-Paratingente verschieden sind, ist abzählbar. In jedem Punkt $x \in B$ ist beispielsweise die vordere $\mathfrak{k}$-Halbtangente stetig, d. h. Limes aller vorderen $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in Punkten y, die vor x auf B liegen, übrigens auch der Komplemente der hinteren $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in den y (Komplement bezogen auf den Träger der betr. $\mathfrak{k}$-Halbtangente).

2.2.3. *Konstruktion aller Bogen und Kurven vom schwachen Punktordnungswert Zwei bezüglich* $\mathfrak{k}$ (also aller $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen und Kurven).

Jede Kurve C mit schwPOW$(C; \mathfrak{k})$ ist Vereinigung zweier Bogen mit gleichem schwPOW. Da diese Bogen identisch sind mit den $\mathfrak{k}$-konvexen, sind sie $\mathfrak{k}$-beschränkt (vgl. Nr. 2.2.1. und 2.2.). Daher genügt zur Konstruktion aller Bogen und Kurven mit schwPOW Zwei die Lösung der folgenden

G r u n d a u f g a b e. Es sollen alle $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen $B \subset E_0 = CK_0$ konstruiert werden, von denen vorgegeben sind: Die Endpunkte $a, b \in E_0$, $a \neq b$, sowie die $\mathfrak{k}$-Halbtangenten (bezüglich K_0) H_a, H_b in a bzw. b.

Bei der Behandlung der Grundaufgabe kann o. B. d. A. angenommen werden, daß $\underset{\sim}{H}_a$ und $\underset{\sim}{H}_b$ in der Umgebung von a bzw. b auf der gleichen Seite von K liegen, etwa in $E_0(K; +)$ und daß $\{c\} = \underset{\sim}{H}_a \cap \underset{\sim}{H}_b$ in $E_0(K; +)$ liegt; denn jeder $\mathfrak{k}$-konvexe Bogen B mit den Endpunkten $a, b \in K$ und mit $\underset{\sim}{B} \subset E_0(K; +)$ ist Vereinigung endlich vieler $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen, deren $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in ihren Endpunkten dieser Bedingung genügen.

---

[1] Siehe Fußnote [1] S. 66.

Zur Vereinfachung bezeichnen wir jeden echten, bezüglich K_0 $\mathfrak{k}$-beschränkten Teilbogen eines $K' \in \mathfrak{k}$ als eine $\mathfrak{k}$-*Strecke*; sind $a'b'$ die Endpunkte der $\mathfrak{k}$-Strecke, so bezeichnen wir diese abkürzend mit $S(a', b') = S(b', a')$. Es ist dann $C = S(a, b) \cup S(b, c) \cup S(c, a)$ eine $\mathfrak{k}$-beschränkte einfache Kurve, deren $\mathfrak{k}$-beschränktes Inneres ein (offenes) $\mathfrak{k}$-Dreieck $\underline{D}_1$ ist.

In $\bar{D}_1$ liegen alle gesuchten $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen B.

Die Konstruktion verläuft nun in folgenden Schritten:

1. Schritt. Zunächst ist $S(a, c) \cup S(c, b)$ selbst ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen B der gesuchten Art. Alle übrigen gesuchten Bogen enthalten Punkte $c_1 \in \underline{D}_1$.

In c_1 existiert an (jedes solche) B eine stützende OCh K_1, welche $S(a, c)$ und $S(b, c)$ in je einem Punkt a_1 bzw. b_1 trifft. Es sei K_1 irgendeine solche StützOCh. In dem von $C_{21} = S(a, c_1) \cup S(c_1, a_1) \cup S(a_1, a)$ begrenzten $\mathfrak{k}$-Dreieck, das in $\bar{D}_1$ liegt, spielt sich nun die weitere Konstruktion des Teilbogens $B(a, c_1)$ eines jeden gesuchten Bogens B ab. Es besitzt $B(a, c_1)$ in a die $\mathfrak{k}$-Halbtangente H_a, während in c_1 die $\mathfrak{k}$-Halbtangente noch willkürlich wählbar ist aber mit der Einschränkung, daß sie einen Punkt $x \in S(a, a_1) - \{a\}$ enthält; dabei kann also $x = a_1$ sein.

2. Schritt. Die Konstruktion eines $B(a, c_1) \neq S(a, x) \cup S(x, c_1)$ verläuft nun in dem von $S(a, c_1) \cup S(c_1, x) \cup S(x, a)$ begrenzten $\mathfrak{k}$-Dreieck D_{21}, wie beim 1. Schritt bezüglich $B(a, b)$ in D_1; man wählt demgemäß ein $c_{21} \in \underline{D}_{21}$ usw. – Entsprechende Bemerkungen gelten für die Konstruktion von $B(c_1, b)$ im $\mathfrak{k}$-Dreieck D_{22}, wobei man die $\mathfrak{k}$-Halbtangente an $B(c_1, b)$ in c_1 durch ein $y \in S(b, b_1) - \{b\}$ festlegt. Der 2. Konstruktionsschritt führt also zu einem $\mathfrak{k}$-konvexen 5-Eck $S(a, x') \cup S(x', c_1) \cup S(c_1, y') \cup S(y', b)$, wobei $x' = x$ oder $x' = c_{21}$ und $y' = y$ oder $y' = c_{22}$.

Die Fortsetzung der Konstruktion ist danach klar. Sie liefert eine absteigende Folge von $\mathfrak{k}$-konvexen (offenen) Mengen G_n, deren Begrenzungen $\mathfrak{k}$-konvexe Bogen P_n, genauer „$\mathfrak{k}$-Polygone" P_n, und Lösungen der Grundaufgabe sind. Da die Folge der G_n konvergiert, ist der Limes $L = \cap_n \bar{G}_n$ nach dem Satz von Blaschke (Nr. 2.2.1.) eine abgeschlossene nicht leere $\mathfrak{k}$-konvexe Menge $\bar{G}$; und die Begrenzung von $\bar{G}$ ist ein $\mathfrak{k}$-konvexer Bogen, welcher ebenfalls die Grundaufgabe löst. Es ist auch klar, daß die Konstruktion alle Bogen der gewünschten Art liefert.

2.2.3.1. Aus der vorstehenden Lösung der Grundaufgabe (Nr. 2.2.3.) ergibt sich zugleich: *Es existieren* $\mathfrak{k}$*-konvexe Kurven und Bogen* (mit vorgegebenen $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in den Endpunkten), *die* (α) *keine* $\mathfrak{k}$*-Strecken enthalten* und die also den POW$(B;\ \mathfrak{k}) = 2$ besitzen, nicht nur den schwachen POW $= 2$, sowie (β) *solche, die in jedem ihrer Punkte* $\mathfrak{k}$*-differenzierbar sind* (vgl. Nr. 2.2.2.). Und zwar erhält man ebenfalls sämtliche Kurven und Bogen mit den Eigenschaften (α) und (β).

Bew. *Betr.* (α) Ist $z \in \underset{\sim}{S}(a, b)$ und projiziert man durch, z enthaltende, OCh einen (beliebigen) in D_1 enthaltenden $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen B mit den $\mathfrak{k}$-Halbtangenten H_a bzw. H_b in den Endpunkten a bzw. b, auf den $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen $B' = S(a, c) \cup S(c, b)$ (vgl. Nr. 2.2.3., Bemerkungen vor „1. Schritt"), so liegt keine in B enthaltene $\mathfrak{k}$-Strecke auf einer der ProjektionsOCh. Daher enthält B keine $\mathfrak{k}$-Strecken genau dann, wenn die Menge der bei der Konstruktion von B auftretenden Punkte $c_1, c_{21}, c_{22}, \ldots$ aus z projiziert wird in eine auf B' überall dichte Menge. Man braucht also eine in B' dichte Menge nur beliebig vorzuschreiben als Menge der Projektionen von noch zu wählenden $c_1, c_{21}, c_{22}, \ldots$, um sicher zu sein, daß B keine $\mathfrak{k}$-Strecken enthält.

Betr. (β) Wählt man im 2. Konstruktionsschritt $x = a_1$, $y = b_1$, so ist jedes im weiteren Verlauf der Konstruktion auftretende P_n (vgl. Nr. 2.2.3.) und damit auch B $\mathfrak{k}$-differenzierbar in c_1, besitzt dort also eine $\mathfrak{k}$-Tangente. Ist hingegen $x \neq a_1$, so liegt der Schnittpunkt der $\mathfrak{k}$-Halbtangente an $P_n(a, c_1)$ bzw. an $B(a, c_1)$ in c_1 auf $S(a, c)$ näher an a als der Schnittpunkt des Komplementes der $\mathfrak{k}$-Halbtangente an $P_n(c_1, b)$ bzw. an $B(c_1, b)$ in c_1. Ferner, liegt falls z. B. B in $c', c'' \in \underset{\sim}{B}$ $\mathfrak{k}$-differenzierbar ist, der Schnittpunkt der $\mathfrak{k}$-Tangente in c' mit $S(a, c)$ näher bei a auf $S(a, c)$ als der der $\mathfrak{k}$-Tangente in c'', wenn c' auf B näher bei a liegt als c''. Man braucht also die Konstruktion nur so einzurichten, daß B in jedem der schrittweise gewählten Punkte $c_1, c_{21}, c_{22}, \ldots$ eine $\mathfrak{k}$-Tangente besitzt und daß die Schnittpunkte dieser $\mathfrak{k}$-Tangenten mit $S(a, c)$ eine auf $S(a, c)$ dichte Menge bilden (wobei man eine solche Menge a priori vorgibt).

3. Die Gestalten der Bogen B und Kurven C vom Punktordnungswert Drei

Ein Unterschied zwischen Bogen und Kurven besteht hier insofern, als es (anders als im Falle des POW Zwei) Bogen B mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ gibt, die nicht Teilbogen von Kurven C mit $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = 3$ sind. (Man konstruiert solche Beispiele, vermittelst der Konstruktion in Nr. 2.2.3., wie in der gewöhnlichen projektiven Ebene; vgl. z. B. Marchaud [1], S. 89); man beachte dabei, daß ein Bogen oder eine Kurve von endlichem POW keine $\mathfrak{k}$-Strecken enthalten kann. Außerdem sei hervorgehoben, daß von den jetzt zu betrachtenden Bogen und Kurven $\mathfrak{k}$-Differenzierbarkeit nicht gefordert wird.

3.1. Unter dem Punktordnungswert (bezüglich $\mathfrak{k}$) eines *Punktes* x eines Bogens A, abgekürzt: $\mathrm{POW}(x; A; \mathfrak{k})$, verstehen wir die untere Grenze der $\mathrm{POW}(U; \mathfrak{k})$, wobei U das System der Umgebungen von x auf A durchläuft. Es heißt $x \in A$ *$\mathfrak{k}$-singulär* auf A, wenn $\mathrm{POW}(x; A; \mathfrak{k}) \geq 3$ ist; im Falle, daß $\mathrm{POW}(x; A; \mathfrak{k}) = 2$ ist, heißt x *$\mathfrak{k}$-regulär.* Die Menge der $\mathfrak{k}$-singulären Punkte ist abgeschlossen.

Jedes B und C mit $\mathrm{POW}(B; \mathfrak{k}) = 3$ oder $\mathrm{POW}(C; \mathfrak{k}) = 3$ besitzt nur *endlich viele* $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte. Ein Endpunkt ist stets $\mathfrak{k}$-regulär (Die $\mathfrak{k}$-singulären Punkte liegen isoliert auf B bzw. C).

Bew. Es genügt, zu zeigen, daß jedes $\mathfrak{k}$-singuläre $x \in A$ mit $\mathrm{POW}(x; A; \mathfrak{k}) = 3$ eine $\mathfrak{k}$-konvexe vordere und eine $\mathfrak{k}$-konvexe hintere Umgebung V bzw. H auf A besitzt. Ist nämlich z. B. kein V $\mathfrak{k}$-konvex, so besitzt $\tilde{V}$ entweder StützOCh mit mehreren Stützpunkten, so daß $\mathrm{POW}(V; \mathfrak{k}) \geq 4$ ist; oder es gibt ein $K \in \mathfrak{k}$ mit $x \in K$ und mit $\mathrm{POW}(V \cap K) = \infty$ (vgl. [1], S. 3, Nr. 3, Hilfssatz).

3.2. Die Typen der $\mathfrak{k}$-singulären Punkte $x \in A$ mit *POW*$(x: A; \mathfrak{k}) = 3$.

3.2.1. Es sei a ein Endpunkt des Bogens A. Zur Abkürzung bezeichnen wir einen Punkt $y \in A - \{a\}$ als *$\mathfrak{k}(a)$-singulär*, wenn zu beliebig kleinen Umgebungen U von y auf A solche $K \in \mathfrak{k}$ mit

$a \in K$ existieren, für welche $U \cap K$ mindestens 2-punktig ist. – Es sei $x \in \underset{\sim}{A}$ $\mathfrak{k}$-singulär mit POW$(x; A; \mathfrak{k}) = 3$; definitionsgemäß gibt es – bei gegebener Orientierung von A – zu beliebig kleinen vorderen und hinteren Umgebungen V bzw. H von x auf A solche $K' \in \mathfrak{k}$, für die $((V \cup H) — \{x\}) \cap K' = \{x_1\} \cup \{x_2\} \cup \{x_3\}$, wobei die Numerierung der x_i so gewählt ist, daß x_{i+1} vor x_i liegt (auf A), $i = 1, 2$. Wir bezeichnen dann x als (1,2)- bzw. als (2,1)-*Punkt*, wenn es unter den K' solche gibt, für die $x_1 \in \underset{\sim}{H}$ und $x_2, x_3 \in V$ bzw. $x_1, x_2 \in \underset{\sim}{H}$ und $x_3 \in \underset{\sim}{V}$.

3.2.2. Ein $\mathfrak{k}$-singulärer Punkt $x \in \underset{\sim}{A}$ (mit POW $(x; A; \mathfrak{k}) = 3$) gehört zu genau einem der folgenden 3 Typen, wenn POW$(A; \mathfrak{k}) = 3$:

I. *Typus* ($\mathfrak{k}$-Wendepunkt). Es ist x sowohl (1,2)- als (2,1)-Punkt, aber nicht $\mathfrak{k}(a)$-singulär.

II. *Typus* ($\mathfrak{k}$-Dorn, einschließlich $\mathfrak{k}$-Dornspitze). Es ist x sowohl (1,2)- als (2,1)-Punkt und zugleich $\mathfrak{k}(a)$-singulär.

III. *Typus* ($\mathfrak{k}$-Schnabel): Es ist x entweder kein (1,2)- oder kein (2,1)-Punkt.

3.2.3. Mit den Typen I.–III. sind die folgenden drei gleichwertig, welche den im Fall der gewöhnlichen projektiven Ebene üblichen entsprechen. Man bezeichne die $\mathfrak{k}$-Halbtangente an eine vordere Umgebung V von x auf A bzw. an eine hintere Umgebung H mit $Th_v(x)$ bzw. mit Th_h(x), ferner die $Th_v(x)$ bzw. $Th_h(x)$ enthaltende OCh mit T_v bzw. mit T_h. Dann gilt:

I. Es ist x ein $\mathfrak{k}$-Wendepunkt genau dann, wenn $Th_v(x) \neq Th_h(x)$ und $T_v = T_h = T \in \mathfrak{k}$ und wenn $V — \{x\}$ und $H — \{x\}$ auf verschiedenen Seiten von T liegen.

II. Es ist x ein $\mathfrak{k}$-Dorn genau dann, wenn entweder $T_v \neq T_h$ ist und $V — \{x\}$ sowie $H — \{x\}$ in von T_v, T_h gebildeten „$\mathfrak{k}$-Scheitelwinkeln" liegen oder wenn $Th_v(x) = Th_h(x)$ ist und $V — \{x\}$ und $H — \{x\}$ auf verschiedenen Seiten von $T_v = T_h$ lieegen.

III. Es ist x ein $\mathfrak{k}$-Schnabel genau dann, wenn $T_v \neq T_h$ ist und wenn $V — \{x\}$ und $H — \{x\}$ in „$\mathfrak{k}$-Nebenwinkeln" liegen, die von T_v, T_h gebildet werden.

3.3. Die Bogen B vom Punktordnungswert Drei.

Jeder solche Bogen ist $\mathfrak{k}$-beschränkt.

3.3.1. *Bogen die zu* $\mathfrak{k}$ *normal* sind. Dabei heißen B, $\mathfrak{k}$ *normal* (zueinander), wenn folgendes gilt: Es sei B orientiert und $B \cap K = \bigcup_{i=1}^{3} \{x_i\}$ für $K \in \mathfrak{k}$, wobei die x_i im Sinne der Orientierung von B aufeinander folgen (also x_i hinter x_{i+1} liegt). Im Falle der Normalität von B, $\mathfrak{k}$ soll nun *jedes* $K \in \mathfrak{k}$ mit 3-punktigem $B \cap K$ so orientierbar sein, daß die Reihenfolge der x_i auf K (und auf B) auch der Orientierung von $K \cap E_0$ (und von B) entspricht.

Für zueinander normale B, $\mathfrak{k}$ besitzt B mit POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ *mindestens* einen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt und höchstens drei, wobei ein $\mathfrak{k}$-Dorn als zwei $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte gezählt wird. Es ist B Vereinigung von höchstens vier abgeschlossenen, bis auf Endpunkte paarweise fremden k-konvexen Bogen (Die $\mathfrak{k}$-singulären Punkte fallen in gemeinsame Endpunkte je zweier dieser $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen).

3.3.2. Sind B, $\mathfrak{k}$ *nicht normal* und ist POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$, so besitzt B höchstens einen $\mathfrak{k}$-singulären Punkt und keinen $\mathfrak{k}$-Dorn. Es ist B Vereinigung von höchstens drei $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen, die bis auf Endpunkte paarweise fremd sind.

3.4. Die Kurven C vom Punktordnungswert Drei.

Erklärt man eine „Kurve" als eindeutiges stetiges Bild der Kreisperipherie $\mathfrak{P}$ in E und zählt man jeden Punkt der Kurve so oft, als die Anzahl seiner Urbilder in $\mathfrak{P}$ beträgt, so besitzt C höchstens einen mehrfachen, also zweifachen Punkt; die Menge der Bildpunkte von $\mathfrak{P}$ besitzt daher höchtens einen Verzweigungspunkt.

Ist C eine *einfache* Kurve, so existieren genau drei $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte, wobei aber ein $\mathfrak{k}$-Schnabel und ein $\mathfrak{k}$-Wendepunkt für je einen, hingegen ein $\mathfrak{k}$-Dorn für zwei $\mathfrak{k}$-singuläre Punkte gezählt wird. (Es sind alle hiernach erlaubten Kombinationen von $\mathfrak{k}$-Schnäbeln, -Wendepunkten und -Dornen möglich.) Es ist C Vereinigung von drei oder (im Falle ein Dorn auftritt) von zwei $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen.

Besitzt aber C einen *zweifachen Punkt* d, so ist C Vereinigung einer $\mathfrak{k}$-konvexen Kurve C' und einer einfachen Kurve C'' mit POW $(C''; \mathfrak{k}) = 3$. Und zwar besitzt C'' in d einen $\mathfrak{k}$-Dorn (aber keine $\mathfrak{k}$-Dornspitze) und außerdem noch einen $\mathfrak{k}$-Schnabel bzw. $\mathfrak{k}$-Wendepunkt. Ferner ist $C' \cap C'' = \{d\}$ und es liegt C' im „$\mathfrak{k}$-Scheitelwinkelraum" des von den $\mathfrak{k}$-Halbtangenten $Th_v(d)$ und $Th_h(d)$ an C'' in d begrenzten, zu C'' fremden „$\mathfrak{k}$-Winkelraumes".

4. Anhang

4.1. Bogen B und Kurven C vom schwachen Punktordnungswert Drei.

Im Unterschied zum Fall POW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ bzw. POW $(C; \mathfrak{k}) = 3$ können jetzt B und C auch $\mathfrak{k}$-Strecken (vgl. Nr. 2.2.3., vor 1. Schritt) enthalten. Insbesondere gehören also hierher die (nicht-geschlossenen oder geschlossenen) $\mathfrak{k}$-*Polygone*, d. h. die Vereinigungen von endlich vielen geordneten $\mathfrak{k}$-Strecken (die bis auf höchstens Endpunkte paarweise fremd sind).

Enthält B (oder C) drei im Sinne der Orientierung unmittelbar aufeinanderfolgende $\mathfrak{k}$-Strecken, also $S(a_1, a_2)$, $S(a_2, a_3)$ und $S(a_3, a_4)$, von denen keine zwei der gleichen OCh angehören, so wird durch den Teilbogen $P = S(a_1, a_2) \cup S(a_2, a_3) \cup S(a_3, a_4)$ ein $\mathfrak{k}$-Wendepunkt von B genau dann geliefert, wenn $S(a_1, a_2)$ und $\underset{\sim}{S}(a_3, a_4)$ in der Umgebung von a_2 bzw. a_3 auf verschiedenen Seiten der, a_2 und a_3 enthaltenden OCh liegen. Vermittelst der in Nr. 2.2.3. entwickelten Konstruktion läßt sich nun durch „Abrundung" ein zu B beliebig benachbarter Bogen B' finden, bei welchem P durch einen, genau einen $\mathfrak{k}$-Wendepunkt enthaltenden Bogen P' ersetzt ist. Zu dem Zweck wähle man etwa ein $a_i' \in \underset{\sim}{S}(a_i, a_{i+1})$, $i = 1, 2, 3$, und ersetze $S(a_1', a_2) \cup S(a_2, a_2')$ durch einen $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen B' mit den Endpunkten a_1', a_2') in dessen $\mathfrak{k}$-Halbtangenten in a_1', a_2' bzw. die $\mathfrak{k}$-Strecken $S(a_1', a_2)$ und $S(a_2, a_2')$ enthalten sind; dabei kann und soll von B' gefordert werden, daß er keine $\mathfrak{k}$-Strecken enthält. Entsprechend verfährt man mit $S(a_2', a_3) \cup S(a_3, a_3')$, erhält einen k-konvexen Bogen B'' mit den Endpunkten a_2', a_3' und einen $\mathfrak{k}$-Wendepunkt auf $B' \cup B''$ in a_2'.

Mit Hilfe dieser Abrundung kann man zunächst jedes $\mathfrak{k}$-Polygon P mit *schw*POW $(P; \mathfrak{k}) = 3$ beliebig genau durch Bogen bzw. Kurven vom POW Drei approximieren. Damit erweisen sich die Ergebnisse in Nr. 3.3. und 3.4. als gültig auch für $\mathfrak{k}$-Polygone. – Ähnlich kann man durch Abrundungen den Fall eines Bogens B mit schwPOW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ auf den des POW Drei zurückführen, auch wenn B kein $\mathfrak{k}$-Polygon ist.
Zusatz. Der Fall der Bogen B vom schwachen *Komponentenordnungswert* Drei liefert nichts Neues, weil schwKOW $(B; \mathfrak{k})$ $=$ schwPOW $(B; \mathfrak{k}) = 3$ ist (Dies ist ein Spezialfall eines allgemeineren Satzes, vgl. [3], auch [5]).

4.2. Ebene Kontinua vom Punktordnungswert Drei.

Solche Kontinua $\mathfrak{K}$ besitzen zufolge des – auch für $\mathfrak{k}$ gültigen – Satzes von Marchaud [1]höchstens einen Verzweigungspunkt v. Ist kein v vorhanden, so ist K ein Bogen oder eine Kurve mit POW $(\mathfrak{K}; \mathfrak{k}) = 3$. Existiert v, so ist $\mathfrak{K}$ Vereinigung von beschränkt vielen $\mathfrak{k}$-konvexen Bogen. Die verschiedenen „Gestalten" dieser Kontinua $\mathfrak{K}$ lassen sich angeben.

4.3. Bogen von endlichem Punktordnungswert.

Ist B ein Bogen mit endlichem POW $(B; \mathfrak{k})$, d. h. ist $B \cap K$ endlich für jedes $K \in \mathfrak{k}$, so existiert in jedem Punkt eindeutig die vordere (und die hintere) $\mathfrak{k}$-Halbtangente. (Für die gewöhnliche projektive Ebene vgl. Rosenthal [1], Nr. 38).

4.4. $\mathfrak{k}$-ordnungshomogene Bogen.

Es sei A ein beliebiger Bogen in E. Es ist dann A abgeschlossene Hülle einer Vereinigung von abzählbar vielen $\mathfrak{k}$-Strecken S_ν und $\mathfrak{k}$-ordnungshomogenen (offenen) Bogen B_ϱ. Dabei heißt B_ϱ $\mathfrak{k}$-*ordnungshomogen*, wenn POW $(x; B_\varrho; \mathfrak{k}) = m_\varrho$ für alle $x \in B_\varrho$ unabhängig von x ist, wobei auch der Fall einbegriffen sein soll, daß POW $(x; B_\varrho; k)$ endlich aber nicht beschränkt oder unendlich ist für jedes $x \in B_\varrho$.

Es zeigt sich: Es kann m_ϱ für jedes ϱ nur die Werte 2 und unendlich annehmen. Anders ausgedrüclt: Es gibt $\mathfrak{k}$-ordnungshomogene Bogen nur mit den lokalen Punktordnungswerten zwei und unendlich. (Für den Fall der gewöhnlichen projektiven Ebene vgl. [2].)

Literatur

Blaschke, W., [1] Kreis und Kugel, 2. Aufl. (Berlin 1956).

Haupt, [1] Zur Juelschen Theorie der reellen ebenen Kurven 4. Ordnung. Bayer. Akad. d. Wiss. Sitz.-Ber. math.-naturw. Abt. Jahrg. 1925, 1–8.

[2] Über die Struktur reeller Kurven. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 164 (1931), 50–60.

[3] Verallgemeinerung eines ordnungsgeometrischen Reduktionssatzes. Journ. f. d. r. u. angew. Math. 200 (1958), 170–181.

[4] Verallgemeinerung eines Satzes von Möbius. Bull. Soc. Math. de Grèce. N. Ser. (im Druck).

[5] Bemerkungen über gewisse Systeme von Ordnungscharakteristiken in der Ebene. (Erscheint später).

Helly, E., [1] Über Mengen konvexer Körper mit gemeinschaftlichen Punkten. Jahresber. d. d. Math.Ver. 32 (1923), 175–177.

Juel, C., [1] Einleitung in die Theorie der ebenen Elementarkurven dritter und vierter Ordnung. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter (7) 11 (1914), 119–167.

van Kampen, [1] E. R., On some characterizations of 2-dimensional manifolds. Duke math. Journ. 1 (1935), 74–95.

Marchaud, A., [1] Sur les continus d'ordre borné. Acta math. 55 (1930), 67–115.

Rosenthal, A., [1] Über die Singularitäten der reellen ebenen Kurven. Math. Ann. 73 (1913), 480–521.

Salzmann, H., [1] Kompakte zweidimensionale projektive Ebenen. Math. Ann. 145 (1962), 401–428, sowie die dort angegebene Literatur.